

EDMOND MAILLET

**Sur les fonctions entières d'ordre fini**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2<sup>e</sup> série*, tome 9 (1907), p. 197-202

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1907\\_2\\_9\\_\\_197\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1907_2_9__197_0)

© Université Paul Sabatier, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

# SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI <sup>(1)</sup>,

PAR M. EDMOND MAILLET.

---

J'ai indiqué dans mon Mémoire *Sur les séries divergentes et les équations différentielles* <sup>(2)</sup> le grand intérêt que présente l'étude du problème suivant :

*Reconnaitre si une fonction entière  $F(z)$ , d'ordre fini  $\rho$ ,  $a$ , dans un secteur du plan des  $z$  complexes, ou même le long d'une demi-droite issue de l'origine, son ordre (apparent)  $< \rho$ , c'est-à-dire si le module de  $F(z)$  reste, dans ce secteur,*

$$(1) \quad < e^{r^\sigma} \quad (\text{avec } \sigma \text{ fixe } < \rho)$$

*pour  $|z| = r$ , dès que  $r$  est assez grand.*

Un problème analogue peut se poser pour les fonctions entières d'ordre infini ou nul, et l'on aperçoit immédiatement pour les premières des exemples où la réponse est affirmative [ainsi  $F(z) = e^{-e^z}$ ]. Quand une fonction entière  $F(z)$ , d'ordre fini  $\rho > 0$ , jouit de cette propriété dans un secteur, on peut essayer de lui faire correspondre une série divergente sommable au sens de M. Borel [formules (14) et (15) et théorème de la page 517 du Mémoire précité].

Je signalai, en dehors du cas où  $F(z)$  a son ordre apparent entier plus grand que l'ordre réel, et qui est traité dans le Mémoire précité, d'autres cas où (1) a lieu au moins le long d'une droite : 1° le cas de  $\sin \pi z$  le long de l'axe réel; 2° le cas des produits canoniques de facteurs primaires  $\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}}$ , d'ordre  $\rho$ ,

---

<sup>(1)</sup> Voir un résumé dans les *Comptes rendus* du 18 février 1907, p. 367-368 et dans l'*Intermédiaire des mathématiciens*, 1907, p. 57, réponse à la question 1477.

<sup>(2)</sup> *Annales de l'École Normale*, 1903, p. 487-518, en particulier p. 506 et 515.

avec  $1 < \rho < 2$  <sup>(1)</sup>, dont toutes les racines sont réelles et de même signe; 3° divers exemples cités dans les travaux de M. Mittag-Leffler <sup>(2)</sup>.

II. Je me propose de faire connaître ici des exemples de même nature que d'autres pourront peut-être utiliser ou développer; mais je commence par faire remarquer que l'on ne peut espérer montrer pour toute fonction entière d'ordre fini l'exactitude de l'inégalité (1), même le long d'une demi-droite.

En effet, soit la fonction ( $\rho$  entier)

$$\begin{aligned} F(z) &= e^{iz^\rho} - e^{-iz^\rho}, & z &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \\ z^\rho &= r^\rho(\cos \rho\varphi + i \sin \rho\varphi) = \xi + i\eta, \\ e^{iz^\rho} &= e^{i\xi - \eta}, & e^{-iz^\rho} &= e^{-i\xi + \eta}, \\ M &= |F(z)|^2 = (e^{-\eta} - e^\eta)^2 \cos^2 \xi + (e^{-\eta} + e^\eta)^2 \sin^2 \xi, \\ M &= e^{2\eta} + e^{-2\eta} + 2(\sin^2 \xi - \cos^2 \xi). \end{aligned}$$

M ne reste fini le long d'une demi-droite  $\varphi = \varphi_0$  que si  $\eta = 0$ ,  $\sin \rho\varphi_0 = 0$ ; le long d'une demi-droite où  $\sin \rho\varphi_0 = \lambda \neq 0$ ,

$$M = e^{2\lambda r^\rho} + e^{-2\lambda r^\rho} + 2(\sin^2 \xi - \cos^2 \xi) \geq e^{|\lambda| r^\rho}$$

dès que  $r$  est assez grand. Alors la fonction  $F(z)F(ze^{i\psi})$ , avec  $\psi$  constant, a pour carré de son module

$$M' = (e^{2\eta} + e^{-2\eta} + 2 \sin^2 \xi - 2 \cos^2 \xi)(e^{2\eta_1} + e^{-2\eta_1} + 2 \sin^2 \xi_1 - 2 \cos^2 \xi_1),$$

où

$$\xi_1 = r^\rho \cos \rho(\varphi + \psi), \quad \eta_1 = r^\rho \sin \rho(\varphi + \psi)$$

et  $M'$  ne peut rester fini ou inférieur à  $e^{\mu r^\rho}$  ( $\mu$  constante positive assez petite), quand  $r$  est assez grand, le long d'une demi-droite  $\varphi = \varphi_1$  que si

$$\sin \rho\varphi_1 = \sin \rho(\varphi_1 + \psi) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sin \rho\varphi_1 = \sin \rho\psi = 0;$$

$\psi$  étant arbitraire, on peut toujours le choisir de façon que  $M' \geq e^{\mu r^\rho}$  ( $\mu$  fixe conve-

<sup>(1)</sup> L'indication donnée dans mon Mémoire, probablement incomplète, doit être rectifiée ainsi, comme le montre au surplus le théorème de M. Wiman dont je vais parler tout à l'heure.

<sup>(2)</sup> *Acta math.*, t. XXIX, p. 124 (voir encore *Interm. des math.*, 1905, p. 14, réponse à la question 1477).

nable  $> 0$ ) dès que  $r$  est assez grand, pour une infinité de valeurs de  $r$  aussi grandes qu'on veut (1).

Cet exemple ne permet pas, il est vrai, de dire qu'il y aura des exceptions à (1) quand l'ordre n'est pas entier; mais un théorème de M. Wiman (2) montre que

(1) n'est possible que quand  $\rho \geq \frac{1}{2}$ .

III. Ceci posé, je passe aux exemples de fonctions entières  $F(z)$  autres que ceux déjà indiqués et pour lesquels (1) a lieu.

Soient  $u_n = \frac{z}{a_n}$  et le produit canonique  $\prod_1^{\infty} f_n$ , d'ordre fini  $\rho > 1$  non entier, avec  $\rho - p < 1$  et

$$(2) \quad \log f_n = \log(1 - u_n) + u_n + \frac{u_n^2}{2} + \dots + \frac{u_n^p}{p}.$$

Je pose

$$u_n = \lambda e^{i\varphi};$$

on a

$$\log |f_n| = \frac{1}{2} \log(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi) + \lambda \cos \varphi + \frac{\lambda^2 \cos 2\varphi}{2} + \dots + \frac{\lambda^p \cos p\varphi}{p}.$$

On remarque que  $f_n = 1$  pour  $\lambda = 0$ ;  $|f_n|$  sera donc  $\leq 1$ , pour une valeur donnée de  $\varphi$ , sous la condition suffisante que, avec cette valeur de  $\varphi$ ,

$$\frac{d \log |f_n|}{d\lambda} \leq 0,$$

quel que soit  $\lambda \geq 0$ . Or,

$$\frac{d \log |f_n|}{d\lambda} = \frac{\lambda - \cos \varphi}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi} + \cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi + \dots + \lambda^{p-1} \cos p\varphi,$$

d'où, toutes réductions faites,

$$(1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi) \frac{d \log |f_n|}{d\lambda} = -\lambda^p \cos(p+1)\varphi + \lambda^{p+1} \cos p\varphi,$$

d'après l'identité

$$\cos(\beta + 2\varphi) + \cos \beta = 2 \cos \varphi \cos(\varphi + \beta),$$

(1) Cette restriction est essentielle : aucune fonction entière n'a son module  $> r^\alpha$ , si grand que soit  $\alpha$ , le long de toute demi-droite issue de l'origine, même pour les valeurs de  $r$  assez grandes.

(2) *Arkiv för Matematik*, t. II.

quel que soit  $\beta$ . Posant  $\varphi = \alpha + \pi$ ,

$$(3) \quad (1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \alpha) \frac{d \log |f_n|}{d\lambda} = (-1)^p \lambda^p [\cos(p+1)\alpha + \lambda \cos p\alpha].$$

Il suffira que  $\cos p\alpha$  et  $\cos(p+1)\alpha$  soient tous deux  $\leq 0$  quand  $p$  est pair,  $\geq 0$  quand  $p$  est impair, pour que  $|f_n| \leq 1$  le long de la demi-droite  $\alpha + \pi$ .

La deuxième condition a lieu quel que soit  $p$ , dans un secteur d'angle  $\frac{\pi}{p+1}$  ayant pour bissectrice l'axe des  $u$  réels négatifs dans le plan des  $u$   $\left[ |\alpha| \leq \frac{\pi}{2(p+1)} \right]$ ; la première dans un secteur tel que, à la fois,

$$\frac{\pi}{2} \leq p\alpha \leq \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \leq (p+1)\alpha \leq \frac{3\pi}{2},$$

c'est-à-dire que

$$\frac{\pi}{2} \leq p\alpha, \quad (p+1)\alpha \leq \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2p} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2(p+1)},$$

ce qui est possible, car

$$2(p+1) \leq 6p;$$

cette première condition a lieu aussi dans le secteur symétrique du secteur précédent par rapport à l'axe des  $u$  réels; je ne m'attarde pas à chercher s'il y a, dans les deux cas, d'autres secteurs possibles; je me borne à remarquer que, lorsque  $p = 1$ , il n'y a pas d'autre secteur où  $\frac{d \log |f_n|}{d\lambda} \leq 0$  quel que soit  $\lambda > 0$ .

Soit S un des secteurs en question. La conclusion, c'est qu'il y a toujours un secteur S d'angle fini où  $|f_n| \leq 1$ . Si

$$z = re^{i\gamma}, \quad a_n = r_n e^{i\gamma_n},$$

$\varphi$  est égal à  $\gamma - \gamma_n$ .

Supposant alors que, quel que soit  $n$ , la demi-droite d'argument  $\gamma - \gamma_n$  du plan des  $u$  reste comprise dans le secteur S; il en résulte que

$$\left| \prod f_n \right| \leq 1,$$

quand  $z$  varie le long de la demi-droite  $\gamma$ .

On voit, de même, que le module du produit de  $\prod f_n$  par un polynôme ou une fonction entière d'ordre  $< \rho$  satisfait à l'inégalité (1) le long de la demi-droite  $\gamma$ , sous les mêmes conditions.

Ces conclusions se conservent pour toutes les droites  $\gamma$  comprises dans un secteur d'angle  $2\varepsilon$  du plan des  $z$  ( $\varepsilon$  positif assez petit), quand les demi-droites  $\gamma - \gamma_n$ , du plan des  $u$ , qui sont comprises dans S, forment toutes avec les demi-droites limitant S un angle au moins égal en valeur absolue à l'angle  $\varepsilon$ . En effet, les demi-droites d'argument  $\gamma \pm \varepsilon' - \gamma_n$  du plan des  $u$  sont encore comprises dans le secteur S quand  $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ .

A titre d'exemple, j'énoncerai avec plus de précision les résultats que donne la méthode ci-dessus dans le cas de  $p = 1$ .

Si les racines de  $\prod_1^{\infty} f_n$  sont toutes comprises dans un secteur S' d'angle  $90^\circ - 2\varepsilon$  ( $\varepsilon$  fixe  $> 0$ ) du plan des  $z$ , dans le secteur S'', d'angle  $2\varepsilon$ , ayant pour bissectrice la demi-droite opposée à la demi-droite bissectrice du secteur S', on a

$$\left| \prod_1^{\infty} f_n \right| \leq 1 \quad (1).$$

IV. On peut se demander s'il n'y a pas des résultats analogues pour l'ordre infini non transfini. On prendra alors

$$\log f_n = \log(1 - u_n) + u_n + \frac{u_n^2}{2} + \dots + \frac{u_n^{p_n}}{p_n},$$

où, pour  $n > 1$ ,

$$p_n = \tau_n \log n,$$

$\tau_n$  positif variant entre deux limites fixes. Le même calcul donne

$$(1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \alpha) \frac{d \log |f_n|}{d\lambda} = (-1)^{p_n} \lambda^{p_n} [\cos(p_n + 1)\alpha + \lambda \cos p_n \alpha].$$

On pourra toujours choisir  $p_n$  impair par exemple; on voit que l'angle  $\frac{\pi}{p_n + 1}$  du secteur S correspondant, qui a pour bissectrice l'axe des  $u$  réels négatifs, tend vers 0 avec  $\frac{1}{n}$ . On n'aura sûrement ici  $\left| \prod_1^{\infty} f_n \right| \leq 1$  que si les racines sont groupées le long d'une demi-droite dont elles sont assez voisines, et même s'en rapprochent

(1) Quand les racines sont toutes sur une même droite issue de l'origine, ou, plus exactement, *alignées* ou *orientées* le long de cette droite, suivant la définition de M. Leau (*A. E. N.*, 1906, p. 34), on retombe sur un cas traité par lui beaucoup plus en détail.

Il y aurait lieu de chercher à étendre plus ou moins les résultats de M. Leau au cas où les racines sont dans un ou plusieurs secteurs d'angles finis.

assez vite quand  $n$  croît indéfiniment. Ce sera, en particulier, le cas si les zéros sont tous groupés sur une même demi-droite : alors, le long de la demi-droite opposée,

$$\left| \prod_1^{\infty} f_n \right| \leq 1.$$

On est ainsi conduit à se poser cette question que je ne résous pas :

*Existe-t-il des produits canoniques de facteurs primaires d'ordre infini, et dont le module reste  $\leq 1$  dans un secteur fini du plan des  $z$ ?*

On ne peut se poser la même question pour les fonctions entières d'ordre infini, car la réponse est affirmative, par exemple pour  $e^{G(z)-1}$ , quand  $G(z)$  est une fonction entière d'ordre fini dont le module est  $\leq 1$  dans un secteur fini du plan des  $z$ .

