

HENRI LEBESGUE

**Sur la théorie de la résiduation de Sylvester**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3<sup>e</sup> série*, tome 14 (1922), p. 153-159

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1922\\_3\\_14\\_\\_153\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1922_3_14__153_0)

© Université Paul Sabatier, 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

## SUR LA THÉORIE DE LA RÉSIDUATION DE SYLVESTER

Par M. HENRI LEBESGUE.



[1] Dans un travail récent<sup>(1)</sup> j'ai utilisé cette théorie qui se résume dans l'énoncé suivant : *Si parmi les  $3(m+n)$  points de rencontre d'une cubique et d'une courbe de degré  $m+n$ , il y en a  $3n$  qui sont sur une courbe de degré  $n$ , les  $3m$  autres sont sur une courbe de degré  $m$ .*

Au paragraphe 13 de mon Mémoire j'ai reproduit à peu près la démonstration classique telle, par exemple, qu'on la trouve dans les *Courbes planes* de Salmon. Mais, comme me l'a fait remarquer M. B. Gambier, cette démonstration est insuffisante. Elle ne vaut que dans le cas où toutes les courbes de degré  $m+n-3$  passant par certains points en nombre  $\frac{(m+n-3)(m+n)}{2} - 1$  forment un faisceau; il en est bien ainsi en général, mais il n'en est pas toujours ainsi.

La rédaction de mon Mémoire remontant déjà à plusieurs années, je ne puis dire si cette insuffisance m'avait frappé, mais du moins j'ai prétendu y examiner aussi le cas où les courbes considérées de degré  $m+n-3$  ne forment pas un faisceau, ce que ne fait pas Salmon. Malheureusement, ce que j'ai dit est inopérant et l'objection de M. Gambier s'applique tout autant à mon raisonnement qu'à celui de Salmon; je m'appuie sur ceci : par  $\frac{p(p+3)}{2} - 1$  points il passe un faisceau linéaire de courbes de degré  $p$  ayant en commun  $p^2$  points, à moins que toutes les courbes passant par les points donnés n'aient une partie commune. Or l'affirmation en italiques est fausse; elle serait vraie s'il s'agissait de courbes de degré  $p$  passant par  $p^2$  points, elle est inexacte lorsqu'il s'agit de courbes déterminées par moins de  $p^2$  points.

C'est précisément ce qu'observe M. Gambier en s'appuyant sur des exemples dont voici le plus simple : « Soient, dans un même plan, une cubique  $C_3$  et une quartique  $C_4$  données (choisies au hasard une fois pour toutes, je les suppose indécomposables

---

(<sup>1</sup>) Exposé géométrique d'un Mémoire de Cayley (Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 3<sup>e</sup> série, t. XIII, 1922).

et se coupant en 12 points distincts). J'appelle  $M_1, M_2, \dots, M_{11}, M_{12}$  ces 12 points; je choisis un point  $M, (x_0, y_0)$ , de  $C_4$  distinct de  $M_1, \dots, M_{12}$  et je considère le réseau

$$C_3[\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0)] + \nu \cdot C_4 = 0;$$

quand  $\lambda, \mu, \nu$  varient, les 13 points  $M_1, \dots, M_{12}, M$  sont communs à toutes les courbes du réseau, et ce sont les seules communes à toutes les courbes de ce réseau.

Toutes les courbes de degré 4 passant par les treize points indiqués sont comprises dans l'équation ci-dessus donnée; elles ne constituent pas un faisceau; elles n'ont pas de partie commune à toutes. »

Il y a donc lieu de donner une autre démonstration du théorème de Sylvester. Celle qu'on va lire n'est pas nouvelle: elle n'est que l'adaptation au cas particulier du théorème de Sylvester d'une sorte de lemme préparatoire au théorème de Noëther; théorème d'où l'on déduit des généralisations de l'énoncé de Sylvester, en particulier la proposition connue sous le nom de théorème du reste de Brill et Noëther<sup>(1)</sup>.

[2] Je suppose que les  $3n$  points communs à une courbe  $C_3$  et à une courbe  $C_n$  appartiennent aussi à une courbe  $C_{m+n}$ . Et, naturellement, je suppose que ni  $C_n$ , ni  $C_{m+n}$ , ne contiennent  $C_3$ , ni une partie de  $C_3$ . J'écris les équations de ces courbes

$$C_3 = 0, \quad C_n = 0, \quad C_{m+n} = 0,$$

et je suppose que  $C_3$  contient un terme en  $x^3$ . Je considère  $C_n$  et  $C_{m+n}$  comme des polynômes en  $x$  et je les divise par

$$C_3 = x^3 + px^2 + qx + r;$$

j'obtiens des restes

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= ax^2 + bx + c, \\ \Gamma_{m+n} &= Ax^2 + Bx + C, \end{aligned}$$

$p, q, r, a, b, c, A, B, C$ , sont des polynômes en  $y$  dont les degrés maximum sont déterminés par la condition que  $C_3$  est du troisième degré en  $x, y$  que  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_{m+n}$  sont au plus des degrés  $n$  et  $m+n$ . Ces deux derniers restes sont d'ailleurs effectivement de ces degrés, car  $\Gamma_n = 0$  et  $\Gamma_{m+n} = 0$  représentent deux courbes ne contenant ni  $C_3$ , ni une partie de  $C_3$  et qui coupent  $C_3$  respectivement en les  $3n$  et  $3(m+n)$  points communs à  $C_3$  et  $C_n$ ; à  $C_3$  et  $C_{m+n}$ .

(1) Voir, par exemple, les premières pages du tome II de l'ouvrage de MM. Picard et Simart : *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*.

Les courbes  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_{m+n}$  peuvent donc remplacer  $C_n$  et  $C_{m+n}$ ; c'est sur elles que nous allons raisonner. Je vais démontrer qu'on peut trouver

$$\begin{aligned}\Gamma_m &= \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \\ \Gamma_{m+n-3} &= ux + v,\end{aligned}$$

respectivement de degré  $m$  et  $m+n-3$  en  $x, y$ , tels que l'on ait :

$$(1) \quad \Gamma_{m+n} \equiv \Gamma_n \Gamma_m + C_3 \Gamma_{m+n-3},$$

et cela démontrera bien le théorème.

Or, l'identité précédente donne pour la détermination des polynômes  $\alpha, \beta, \gamma, u, v$ , dont les degrés maxima en  $y$  sont connus, les cinq équations :

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = \alpha x + 0\beta + 0\gamma + u + 0v, \\ 0 = b x + a\beta + 0\gamma + pu + v, \\ A = c x + b\beta + a\gamma + qu + pv, \\ B = 0x + c\beta + b\gamma + ru + qv, \\ C = 0x + 0\beta + c\gamma + ou + rv. \end{cases}$$

Le déterminant  $\Delta$  de ces équations est le résultant des polynômes  $C_3$  et  $\Gamma_n$  qui sont sans facteur commun; donc  $\Delta$  n'est pas identiquement nul et l'on peut résoudre par la règle de Cramer. Cela nous donne des fractions rationnelles dont on trouve de suite les degrés. Pour cela donnons des degrés maxima fictifs aux éléments égaux à zéro de la matrice  $M$  des termes tout connus et des coefficients de notre système d'équations; et cela de façon que, dans une même colonne, les degrés maxima croissent d'une unité quand on passe d'un élément à celui situé au-dessous. Alors, pour la première colonne de  $\Delta$ , le degré maxima de chaque élément, diminué du rang de la ligne le contenant, donne  $n-3$ ; pour la seconde colonne, c'est  $n-4$ ; pour la troisième,  $n-5$ ; pour la quatrième,  $-1$ ; pour la cinquième,  $-2$ . Et comme un terme quelconque est le produit de cinq éléments appartenant respectivement aux cinq lignes et cinq colonnes, ce terme est de degré maximum

$$(n-3) + (n-4) + (n-5) + (-1) + (-2) + [1+2+3+4+5].$$

On trouve ainsi que le degré maximum de  $\Delta$  est  $3n$ , ce que l'on savait déjà; on sait même que le degré de  $\Delta$  est exactement  $3n$  si  $C_3$  et  $C_n$  ont leurs points communs à distance finie, ce que nous supposons. Si maintenant on considère le numérateur de l'une des inconnues, de  $\alpha$  par exemple, donné par la règle de Cramer, il se déduit de  $\Delta$  en remplaçant les éléments de la première colonne par les termes tout connus, ce qui augmente les degrés maxima des éléments de la première colonne

de  $m - 2$ . Donc le numérateur de  $\alpha$  est au plus de degré  $m + 3n - 2$ ,  $\alpha$  est au plus de degré  $m - 2$ .

On raisonne de même pour les cinq inconnues; vérifions maintenant que les fractions rationnelles obtenues sont en réalité des polynômes. Pour cela nous supposons qu'on donne à  $\gamma$  une des valeurs qui annule  $\Delta$  et nous nous demandons ce que devient le numérateur de  $\alpha$ , par exemple, dont l'expression est

$$N = o(1) + o(2) + A(3) + B(4) + C(5),$$

(1), (2), (3), (4), (5) représentant les mineurs de  $\Delta$  pris par rapport aux divers éléments de sa première colonne.

Or on sait que si la valeur  $\gamma_i$  considérée est l'ordonnée d'un seul point commun à  $C_3$  et  $C_n$ , et situé à distance finie, soit  $x_i, y_i$ , les mineurs (1), (2), (3), (4), (5) sont respectivement proportionnels à  $x_i^4, x_i^3, x_i^2, x_i, 1$ . Et comme  $x_i, y_i$  est point de  $\Gamma_{m+n}$  par hypothèse, on a  $N = 0$ .

Donc si les  $3n$  points communs à  $C_3$  et à  $C_n$  sont distincts, auquel cas les  $3n$  racines  $\gamma_i$  de  $\Delta = 0$  peuvent être supposées distinctes et finies, comme  $N$  admet aussi ces  $3n$  racines,  $N$  est divisible par  $\Delta$  et nous trouvons bien pour  $\alpha$  un polynôme.

La démonstration est achevée pour le cas où les  $3n$  points sont distincts.

[3] Dans le cas où les  $3n$  points ne sont pas distincts, ce qu'il importe de faire c'est moins de démontrer le théorème que de préciser ce qu'il faut entendre par la condition supposée dans l'énoncé : les  $3n$  points communs à  $C_3$  et à  $C_n$  appartiennent à  $C_{m+n}$ . A cette question, le théorème de Noëther fournit une réponse dont l'importance est capitale; mais pour la plupart des applications du théorème de Sylvester, et en particulier pour celles de mon Mémoire cité, il suffit d'utiliser la définition suivante : *On dira que les  $3n$  points communs à  $C_3$  et à  $C_n$  appartiennent à  $C_{m+n}$  s'il est possible de modifier infiniment peu  $C_n$  et  $C_{m+n}$  de façon que les  $3n$  points communs à  $C_3$  et à  $C_n$  modifiées soient distincts et appartiennent à  $C_{m+n}$  modifiée.*

Il est bien évident qu'avec cet énoncé le théorème de Sylvester est vrai, car les  $N$  et  $\Delta$  sont des fonctions continues des coefficients de  $C_n$  et  $C_{m+n}$ , et la propriété :  $N$  est divisible par  $\Delta$ , subsiste à la limite; réciproquement d'ailleurs, si l'on a l'identité (1), en modifiant infiniment peu  $\Gamma_n$  de façon à rendre les  $3n$  points communs à  $C_3$  et à  $\Gamma_n$  distincts, et en ne modifiant pas  $\Gamma_m$  et  $\Gamma_{m+n-3}$ , on définit une courbe  $\Gamma_{m+n}$  qui passe par ces  $3n$  points distincts et qui diffère infiniment peu du  $\Gamma_{m+n}$  primitif. La définition précédente est donc bien nécessaire et suffisante pour l'exactitude du théorème de Sylvester.

Si naturelle qu'elle soit, il ne faut pas omettre d'examiner d'autres définitions tout aussi naturelles qui peuvent être en désaccord avec elle : supposons par exemple

que  $C_3$  et  $C_n$  n'aient que des points à distance finie en commun, il pourra paraître naturel de dire que leurs  $3n$  points communs appartiennent à  $C_{m+n}$  si, dans *tout* système de coordonnées cartésiennes, le résultant de  $C_3$  et de  $C_n$ , considérés comme polynômes en  $x$ , divise le résultant de  $C_3$  et de  $C_{m+n}$ . Cette seconde définition est en désaccord avec la première; dans le cas suivant, par exemple :  $C_3$  est une cubique à point double,  $C_n$  est la conique formée par les deux tangentes au point double,  $C_{m+n}$  est la cubique formée de trois droites issues du point double. Le théorème de Sylvester n'est en général pas applicable à ces trois courbes bien qu'avec la seconde définition elles aient six points communs avec  $C_3$  confondus au point double.

Ce fait n'est d'ailleurs pas nouveau, on sait depuis longtemps qu'avec la seconde définition le théorème du reste n'est vrai que pour les groupes de points mobiles déterminés par les adjointes.

[4] L'exemple précédent montre qu'avec la seconde définition relative aux points communs à trois courbes la théorie de la résiduation n'est pas toujours exacte, du moins pour les cubiques unicursales; pour terminer, je vais prouver que, *même avec cette définition, elle est exacte pour les cubiques non unicursales* (les seules que l'on considère ordinairement dans cette théorie) et, d'une façon plus générale, qu'elle est exacte si parmi les  $3n$  points considérés ne figure pas le point double de la cubique, s'il existe.

Je suppose que le point simple A de  $C_3$  compte pour  $p$  points ( $p > 1$ ) dans l'intersection de  $C_3$  et  $C_n$ . Par A je mène une droite quelconque  $D_1$ , coupant  $C_3$  en deux points distincts  $m_1, n_1$ ; par A je mène ensuite  $p - 1$  autres droites  $D_2, \dots, D_p$  infiniment voisines de  $D_1$  et coupant  $C_3$  en deux séries de points  $m_2, \dots, m_p; n_2, \dots, n_p$  infiniment voisins de  $m_1$  et  $n_1$  respectivement. Je trace les droites

$$m_1 n_2, m_2 n_3, \dots, m_{p-1} n_p, m_p n_1.$$

Ces droites forment une courbe L de degré  $p$ , qui coupe  $C_3$  en  $p$  points  $a_1, a_2, \dots, a_p$  en dehors des points  $m$  et  $n$ . Ces  $p$  points sont infiniment voisins de A et l'on peut les supposer différents.

Je vais d'abord démontrer que le théorème de Sylvester s'applique à la courbe  $C_n + L$  (qui jouera le rôle de  $C_{m+n}$ ) et à la courbe P formée par les  $p$  droites  $D_i$ ; les  $3p$  points communs à  $C_3$  et à P appartenant à  $C_n + L$ . Or, d'après le paragraphe précédent, ceci sera prouvé si l'on montre qu'on peut, en modifiant très peu  $C_n + L$  et P, rendre les  $3p$  points communs à ces deux courbes et à  $C_3$  tous distincts.

Modifions quelque peu  $C_n$  en  $C'_n$  de façon à ce que tous ses points de rencontre avec  $C_3$  deviennent distincts. Le point A, qui comptait pour  $p$  points, se trouve ainsi remplacé par  $p$  points  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  voisins de A et qui tendent vers A quand  $C'_n$  tend vers  $C_n$ . Par chaque  $\alpha_i$  menons une droite  $\Delta_i$  qui tend vers  $D_i$  quand

$C'_n$  tend vers  $C_n$  et appelons  $\mu_i$  et  $\nu_i$  les deux points de rencontre de  $\Delta_i$  et de  $C_3$  qui tendent vers  $m_i$  et  $n_i$ . Les droites  $\Delta_i$  forment la courbe  $\Pi$ . La courbe  $\Lambda$ , formée des  $p$  droites  $\mu_1\nu_2, \mu_2\nu_3, \dots, \mu_{n-1}\nu_n, \mu_n\nu_1$ , tend vers  $L$  et elle rencontre  $C_3$  en dehors des points  $\mu, \nu$ , en  $p$  points  $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_p$  tendant respectivement vers  $a_1, a_2, \dots, a_p$ .

Donc, le théorème de Sylvester pouvant être appliqué aux courbes  $C'_n + \Lambda$  et  $\Pi$  qui ont  $3p$  points de rencontre avec  $C_3$  communs et distincts, il peut être appliqué aussi aux courbes  $C_n + L$  et  $P$ . Ainsi il existe une courbe  $C'_n$  de degré  $n$  rencontrant  $C_3$  aux  $3n - p$  points de rencontre de  $C_n$  et de  $C_3$  qui sont différents de  $A$ ;  $C'_n$  passe de plus par les  $p$  points  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , qui ont été déterminés comme il a été dit, aussi voisins que l'on veut de  $A$  et distincts.

Ces  $p$  points ont été déterminés indépendamment de  $C_n$ , si donc  $C_{m+n}$  passe par les  $3n$  points communs à  $C_3$  et à  $C_n$  on peut de même remplacer  $C_{m+n}$  par  $C^1_{m+n}$  coupant  $C_3$  aux mêmes  $3n$  points que  $C^1_n$ .

Si parmi les points communs à  $C_3$  et à  $C_n$ , il y avait  $k$  points  $A, B, \dots, K$  comptant pour plus d'un point et tous points simples de  $C_3$ , après avoir opéré comme il vient d'être dit pour passer de  $C_n$  et  $C_{m+n}$  à  $C^1_n$  et  $C^1_{m+n}$ , on opérerait sur les deux courbes obtenues d'une façon analogue,  $B$  remplaçant  $A$ ; on obtiendrait ainsi  $C^2_n$  et  $C^2_{m+n}$ . Et après  $k$  semblables opérations on arriverait à  $C^k_n$  et  $C^k_{m+n}$ . Les  $3n$  points communs à  $C^k_n$  et à  $C_3$  étant distincts, le théorème de Sylvester s'applique à  $C^k_n, C^k_{m+n}$  et  $C_3$ .

Il faut maintenant en conclure qu'il s'applique aussi à  $C_n, C_{m+n}$  et  $C_3$  en s'appuyant sur le fait que, par exemple, les points  $a_i$  tendent vers  $A$ ; aucune démonstration ne serait nécessaire si nous savions que  $C^k_n$  et  $C^k_{m+n}$  tendent respectivement vers  $C_n$  et  $C_{m+n}$ , mais cette convergence n'a en général pas lieu.

Remarquons que si deux courbes  $C_n$  et  $C_{m+n}$  conduisent à l'égalité (1), entre les deux polynômes  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_{m+n}$  qu'on en déduit on a aussi

$$(1') \quad C_{m+n} = C_n \Gamma_m + C_3 C_{m+n-3},$$

en prenant

$$C_{m+n-3} = Q_{m+n} - \Gamma_m Q_n + \Gamma_{n+n-3},$$

$Q_{m+n}$  et  $Q_n$  étant les quotients de  $C_{m+n}$  et  $C_n$  par  $C_3$ . Nous avons déjà remarqué que si  $C_n$  et  $C_{m+n}$  varient en tendant vers des limites déterminées,  $\Gamma_m$  et  $\Gamma_{m+n}$  tendent vers des limites déterminées. Donc tous les termes de (1') tendent dans ces conditions vers des limites précises. Appliquons cela aux courbes  $C_n + L$  et  $P$  nous aurons :

$$C_n L = P \Gamma'_n + C_3 C_{n+p-3},$$

$\Gamma_n^i$  étant le reste de  $C_n^i$  divisé par  $C_3$ . Faisons maintenant tendre les  $a_i$  vers  $A$ , en faisant tendre  $D_1, D_2, \dots, D_p$  vers  $D_1$ , nous trouvons à la limite

$$C_n D_1^p = D_1^p \gamma_n^i + C_3 c_{n+p-3}.$$

$\gamma_n^i$  et  $c_{n+p-3}$  étant des polynômes déterminés. On peut évidemment tout diviser par  $D_1^p$  et l'on trouve :

$$C_n = \gamma_n^i + C_3 P_{n-3};$$

$\gamma_n^i$  étant de degré 2 en  $x$ ,  $\gamma_n^i$  ne diffère pas du reste  $\Gamma_n$  de la division de  $C_n$  par  $C_3$ .

Donc  $\Gamma_n^i$ , et par suite aussi  $\Gamma_n^k, \dots, \Gamma_n^k$  tendent vers  $\Gamma_n$ , de même  $\Gamma_{m+n}^k$  tend vers  $\Gamma_{m+n}$ , et comme le théorème de Sylvester s'applique à  $\Gamma_n^k$  et  $\Gamma_{m+n}^k$ , il s'applique aussi à  $\Gamma_n$  et à  $\Gamma_{m+n}$ ; donc à  $C_n$  et à  $C_{m+n}$ .

Le théorème de Sylvester est ainsi prouvé pour toutes les cubiques non unicursales. C'est pour ces courbes seulement qu'il est important, puisque son principal avantage est de permettre la suppression de l'emploi des fonctions elliptiques et que, lorsqu'il s'agit de cubiques unicursales, l'usage de ces fonctions est inutile. Aussi je me contenterai d'indiquer que, par des raisonnements analogues aux précédents, on peut étudier aussi certains des cas où  $C_n$  passe par le point double de la cubique  $C_3$ ; par exemple, on prouvera que le théorème de Sylvester s'applique au cas d'une courbe  $C_n$  passant par le point double que j'appelle  $O$ , si  $C_3$  et  $C_n$  n'ont aucune tangente commune en ce point  $O$  et si  $C_{m+n}$  admet comme tangente en  $O$ , et avec un ordre de multiplicité au moins égal, chacune des tangentes en  $O$  à  $C_n$ . On peut aussi appliquer les mêmes procédés pour obtenir certains résultats qu'on déduit d'habitude du théorème de Noëther.

