ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HENRI LEBESGUE

Sur la théorie de la résiduation de Sylvester

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 14 (1922), p. 153-159
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1922_3_14__153_0>

SUR LA THÉORIE DE LA RÉSIDUATION DE SYLVESTER

Par M. Henri LEBESGUE.

[**1**] Dans un travail récent(¹) j'ai utilisé cette théorie qui se résume dans l'énoncé suivant : *Si parmi les* $3(m+n)$ *points de rencontre d'une cubique et d'une courbe de degré* $m+n$, *il y en a* $3n$ *qui sont sur une courbe de degré* n, *les* $3m$ *autres sont sur une courbe de degré* m.

Au paragraphe 13 de mon Mémoire j'ai reproduit à peu près la démonstration classique telle, par exemple, qu'on la trouve dans les *Courbes planes* de Salmon. Mais, comme me l'a fait remarquer M. B. Gambier, cette démonstration est insuffisante. Elle ne vaut que dans le cas où toutes les courbes de degré $m+n-3$ passant par certains points en nombre $\frac{(m+n-3)(m+n)}{2}-1$ forment un faisceau ; il en est bien ainsi en général, mais il n'en est pas toujours ainsi.

La rédaction de mon Mémoire remontant déjà à plusieurs années, je ne puis dire si cette insuffisance m'avait frappé, mais du moins j'ai prétendu y examiner aussi le cas où les courbes considérées de degré $m+n-3$ ne forment pas un faisceau, ce que ne fait pas Salmon. Malheureusement, ce que j'ai dit est inopérant et l'objection de M. Gambier s'applique tout autant à mon raisonnement qu'à celui de Salmon ; je m'appuie sur ceci : par $\frac{p(p+3)}{2}-1$ points il passe un faisceau linéaire de courbes de degré p ayant en commun p^2 points, *à moins que toutes les courbes passant par les points donnés n'aient une partie commune.* Or l'affirmation en italiques est fausse ; elle serait vraie s'il s'agissait de courbes de degré p passant par p^2 points, elle est inexacte lorsqu'il s'agit de courbes déterminées par moins de p^2 points.

C'est précisément ce qu'observe M. Gambier en s'appuyant sur des exemples dont voici le plus simple : « Soient, dans un même plan, une cubique C_3 et une quartique C_4 *données* (choisies au hasard une fois pour toutes, je les suppose indécomposables

(¹) Exposé géométrique d'un Mémoire de Cayley (Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 3ᵉ série, t. XIII, 1922).

et se coupant en 12 points distincts). J'appelle $M_1, M_2, \ldots, M_{11}, M_{12}$ ces 12 points; je choisis un point M, (x_0, y_0), de C_4 distinct de $M_1, \ldots M_{12}$ et je considère le *réseau*

$$C_3[\lambda(x-x_0)+\mu(y-y_0)]+\nu \cdot C_4 = 0;$$

quand λ, μ, ν varient, les 13 points $M_1, \ldots M_{12}$, M sont communs à *toutes* les courbes du réseau, et ce sont les *seuls* communs à *toutes* les courbes de ce réseau.

Toutes les courbes de degré 4 passant par les treize points indiqués sont comprises dans l'équation ci-dessus donnée; elles ne constituent pas un faisceau; elles n'ont pas de partie commune à *toutes*. »

Il y a donc lieu de donner une autre démonstration du théorème de Sylvester. Celle qu'on va lire n'est pas nouvelle: elle n'est que l'adaptation au cas particulier du théorème de Sylvester d'une sorte de lemme préparatoire au théorème de Nœther; théorème d'où l'on déduit des généralisations de l'énoncé de Sylvester, en particulier la proposition connue sous le nom de théorème du reste de Brill et Nœther[1].

[**2**] Je suppose que les $3n$ points communs à une courbe C_3 et à une courbe C_n appartiennent aussi à une courbe C_{m+n}. Et, naturellement, je suppose que ni C_n, ni C_{m+n}, ne contienne C_3, ni une partie de C_3. J'écris les équations de ces courbes

$$C_3 = 0, \qquad C_n = 0, \qquad C_{m+n} = 0,$$

et je suppose que C_3 contient un terme en x^3. Je considère C_n et C_{m+n} comme des polynômes en x et je les divise par

$$C_3 = x^3 + px^2 + qx + r;$$

j'obtiens des restes

$$\Gamma_n = ax^2 + bx + c,$$
$$\Gamma_{m+n} = Ax^2 + Bx + C,$$

$p, q, r, a, b, c, A, B, C$, sont des polynômes en y dont les degrés maximum sont déterminés par la condition que C_3 est du troisième degré en x, y que Γ_n et Γ_{m+n} sont au plus des degrés n et $m+n$. Ces deux derniers restes sont d'ailleurs effectivement de ces degrés, car $\Gamma_n = 0$ et $\Gamma_{m+n} = 0$ représentent deux courbes ne contenant ni C_3, ni une partie de C_3 et qui coupent C_3 respectivement en les $3n$ et $3(m+n)$ points communs à C_3 et C_n; à C_3 et C_{m+n}.

---

(1) Voir, par exemple, les premières pages du tome II de l'ouvrage de MM. Picard et Simart : *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.*

Les courbes Γ_n et Γ_{m+n} peuvent donc remplacer C_n et C_{m+n}; c'est sur elles que nous allons raisonner. Je vais démontrer qu'on peut trouver

$$\Gamma_m = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$
$$\Gamma_{m+n-3} = ux + v,$$

respectivement de degré m et $m+n-3$ en x, y, tels que l'on ait :

$$\Gamma_{m+n} \equiv \Gamma_n \Gamma_m + C_3 \Gamma_{m+n-3}, \tag{1}$$

et cela démontrera bien le théorème.

Or, l'identité précédente donne pour la détermination des polynômes $\alpha, \beta, \gamma, u, v$, dont les degrés maxima en y sont connus, les cinq équations :

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= a\alpha + 0\beta + 0\gamma + u + 0v, \\ 0 &= b\alpha + a\beta + 0\gamma + pu + v, \\ A &= c\alpha + b\beta + a\gamma + qu + pv, \\ B &= 0\alpha + c\beta + b\gamma + ru + qv, \\ C &= 0\alpha + 0\beta + c\gamma + 0u + rv. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Le déterminant Δ de ces équations est le résultant des polynômes C_3 et Γ_n qui sont sans facteur commun; donc Δ n'est pas identiquement nul et l'on peut résoudre par la règle de Cramer. Cela nous donne des fractions rationnelles dont on trouve de suite les degrés. Pour cela donnons des degrés maxima fictifs aux éléments égaux à zéro de la matrice M des termes tout connus et des coefficients de notre système d'équations; et cela de façon que, dans une même colonne, les degrés maxima croissent d'une unité quand on passe d'un élément à celui situé au-dessous. Alors, pour la première colonne de Δ, le degré maxima de chaque élément, diminué du rang de la ligne le contenant, donne $n-3$; pour la seconde colonne, c'est $n-4$; pour la troisième, $n-5$; pour la quatrième, -1; pour la cinquième, -2. Et comme un terme quelconque est le produit de cinq éléments appartenant respectivement aux cinq lignes et cinq colonnes, ce terme est de degré maximum

$$(n-3) + (n-4) + (n-5) + (-1) + (-2) + [1+2+3+4+5].$$

On trouve ainsi que le degré maximum de Δ est $3n$, ce que l'on savait déjà; on sait même que le degré de Δ est exactement $3n$ si C_3 et C_n ont leurs points communs à distance finie, ce que nous supposons. Si maintenant on considère le numérateur de l'une des inconnues, de α par exemple, donné par la règle de Cramer, il se déduit de Δ en remplaçant les éléments de la première colonne par les termes tout connus, ce qui augmente les degrés maxima des éléments de la première colonne de $m-2$. Donc le numérateur de α est au plus de degré $m+3n-2$, α est au plus de degré $m-2$.

On raisonne de même pour les cinq inconnues; vérifions maintenant que les fractions rationnelles obtenues sont en réalité des polynômes. Pour cela nous supposerons qu'on donne à y une des valeurs qui annule Δ et nous nous demandons ce que devient le numérateur de α, par exemple, dont l'expression est

$$N = o(1) + o(2) + A(3) + B(4) + C(5),$$

(1), (2), (3), (4), (5) représentant les mineurs de Δ pris par rapport aux divers éléments de sa première colonne.

Or on sait que si la valeur y_i considérée est l'ordonnée d'un seul point commun à C_3 et C_n, et situé à distance finie, soit x_i, y_i, les mineurs (1), (2), (3), (4), (5) sont respectivement proportionnels à $x^4_i, x^3_i, x^2_i, x_i, 1$. Et comme x_i, y_i est point de Γ_{m+n} par hypothèse, on a $N = o$.

Donc si les $3n$ points communs à C_3 et à C_n sont distincts, auquel cas les $3n$ racines y_i de $\Delta = o$ peuvent être supposées distinctes et finies, comme N admet aussi ces $3n$ racines, N est divisible par Δ et nous trouvons bien pour α un polynôme.

La démonstration est achevée pour le cas où les $3n$ points sont distincts.

[**3**] Dans le cas où les $3n$ points ne sont pas distincts, ce qu'il importe de faire c'est moins de démontrer le théorème que de préciser ce qu'il faut entendre par la condition supposée dans l'énoncé : les $3n$ points communs à C_3 et à C_n appartiennent à C_{m+n}. A cette question, le théorème de Nœther fournit une réponse dont l'importance est capitale; mais pour la plupart des applications du théorème de Sylvester, et en particulier pour celles de mon Mémoire cité, il suffit d'utiliser la définition suivante : *On dira que les $3n$ points communs à C_3 et à C_n appartiennent à C_{m+n} s'il est possible de modifier infiniment peu C_n et C_{m+n} de façon que les $3n$ points communs à C_3 et à C_n modifiées soient distincts et appartiennent à C_{m+n} modifiée.*

Il est bien évident qu'avec cet énoncé le théorème de Sylvester est vrai, car les N et Δ sont des fonctions continues des coefficients de C_n et C_{m+n}, et la propriété : N est divisible par Δ, subsiste à la limite; réciproquement d'ailleurs, si l'on a l'identité (1), en modifiant infiniment peu Γ_n de façon à rendre les $3n$ points communs à C_3 et à Γ_n distincts, et en ne modifiant pas Γ_m et Γ_{m+n-3}, on définit une courbe Γ_{m+n} qui passe par ces $3n$ points distincts et qui diffère infiniment peu du Γ_{m+n} primitif. La définition précédente est donc bien nécessaire et suffisante pour l'exactitude du théorème de Sylvester.

Si naturelle qu'elle soit, il ne faut pas omettre d'examiner d'autres définitions tout aussi naturelles qui peuvent être en désaccord avec elle : supposons par exemple que C_3 et C_n n'aient que des points à distance finie en commun, il pourra paraître naturel de dire que leurs $3n$ points communs appartiennent à C_{m+n} si, dans *tout* système de coordonnées cartésiennes, le résultant de C_3 et de C_n, considérés comme polynômes en x, divise le résultant de C_3 et de C_{m+n}. Cette seconde définition est en désaccord avec la première; dans le cas suivant, par exemple : C_3 est une cubique à point double, C_n est la conique formée par les deux tangentes au point double, C_{m+n} est la cubique formée de trois droites issues du point double. Le théorème de Sylvester n'est en général pas applicable à ces trois courbes bien qu'avec la seconde définition elles aient six points communs avec C_3 confondus au point double.

Ce fait n'est d'ailleurs pas nouveau, on sait depuis longtemps qu'avec la seconde définition le théorème du reste n'est vrai que pour les groupes de points mobiles déterminés par les adjointes.

[**4**] L'exemple précédent montre qu'avec la seconde définition relative aux points communs à trois courbes la théorie de la résiduation n'est pas toujours exacte, du moins pour les cubiques unicursales; pour terminer, je vais prouver que, *même avec cette définition, elle est exacte pour les cubiques non unicursales* (les seules que l'on considère ordinairement dans cette théorie) et, d'une façon plus générale, qu'elle est exacte si parmi les $3n$ points considérés ne figure pas le point double de la cubique, s'il existe.

Je suppose que le point simple A de C_3 compte pour p points ($p > 1$) dans l'intersection de C_3 et C_n. Par A je mène une droite quelconque D_1, coupant C_3 en deux points distincts m_1, n_1; par A je mène ensuite $p-1$ autres droites $D_2, \ldots D_p$ infiniment voisines de D_1 et coupant C_3 en deux séries de points $m_2, \ldots m_p$; $n_2 \ldots n_p$ infiniment voisins de m_1 et n_1 respectivement. Je trace les droites

$$m_1 n_2, m_2 n_3, \ldots m_{p-1} n_p, m_p n_1.$$

Ces droites forment une courbe L de degré p, qui coupe C_3 en p points $a_1, a_2, \ldots a_p$ en dehors des points m et n. Ces p points sont infiniment voisins de A et l'on peut les supposer différents.

Je vais d'abord démontrer que le théorème de Sylvester s'applique à la courbe $C_n + L$ (qui jouera le rôle de C_{m+n}) et à la courbe P formée par les p droites D_i; les $3p$ points communs à C_3 et à P appartenant à $C_n + L$. Or, d'après le paragraphe précédent, ceci sera prouvé si l'on montre qu'on peut, en modifiant très peu $C_n + L$ et P, rendre les $3p$ points communs à ces deux courbes et à C_3 tous distincts.

Modifions quelque peu C_n en C'_n de façon à ce que tous ses points de rencontre avec C_3 deviennent distincts. Le point A, qui comptait pour p points, se trouve ainsi remplacé par p points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ voisins de A et qui tendent vers A quand C'_n tend vers C_n. Par chaque α_i menons une droite Δ_i qui tend vers D_i quand

C'_n tend vers C_n et appelons μ_i et ν_i les deux points de rencontre de Δ_i et de C_3 qui tendent vers m_i et n_i. Les droites Δ_i forment la courbe Π. La courbe Λ, formée des p droites $\mu_1\nu_2, \mu_2\nu_3, \ldots \mu_{n-1}\nu_n, \mu_n\nu_1$, tend vers L et elle rencontre C_3 en dehors des points μ, ν, en p points $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_p$ tendant respectivement vers $a_1, a_2, \ldots a_p$.

Donc, le théorème de Sylvester pouvant être appliqué aux courbes $C'_n + \Lambda$ et Π qui ont $3p$ points de rencontre avec C_3 communs et distincts, il peut être appliqué aussi aux courbes $C_n + L$ et P. Ainsi il existe une courbe C^1_n de degré n rencontrant C_3 aux $3n - p$ points de rencontre de C_n et de C_3 qui sont différents de A; C^2_n passe de plus par les p points $a_1, a_2 \ldots a_p$, qui ont été déterminés comme il a été dit, aussi voisins que l'on veut de A et distincts.

Ces p points ont été déterminés indépendamment de C_n, si donc C_{m+n} passe par les $3n$ points communs à C_3 et à C_n on peut de même remplacer C_{m+n} par C^1_{m+n} coupant C_3 aux mêmes $3n$ points que C^1_n.

Si parmi les points communs à C_3 et à C_n, il y avait k points A, B, ... K comptant pour plus d'un point et tous points simples de C_3, après avoir opéré comme il vient d'être dit pour passer de C_n et C_{m+n} à C^1_n et C^1_{m+n}, on opérerait sur les deux courbes obtenues d'une façon analogue, B remplaçant A; on obtiendrait ainsi C^2_n et C^2_{m+n}. Et après k semblables opérations on arriverait à C^k_n et C^k_{m+n}. Les $3n$ points communs à C^k_n et à C_3 étant distincts, le théorème de Sylvester s'applique à C^k_n, C^k_{m+n} et C_3.

Il faut maintenant en conclure qu'il s'applique aussi à C_n, C_{m+n} et C_3 en s'appuyant sur le fait que, par exemple, les points a_i tendent vers A; aucune démonstration ne serait nécessaire si nous savions que C^k_n et C^k_{m+n} tendent respectivement vers C_n et C_{m+n}, mais cette convergence n'a en général pas lieu.

Remarquons que si deux courbes C_n et C_{m+n} conduisent à l'égalité (1), entre les deux polynômes Γ_n et Γ_{m+n} qu'on en déduit on a aussi

$$(1') \qquad C_{m+n} = C_n \Gamma_m + C_3 C_{m+n-3},$$

en prenant

$$C_{m+n-3} = Q_{m+n} - \Gamma_m Q_n + \Gamma_{m+n-3},$$

Q_{m+n} et Q_n étant les quotients de C_{m+n} et C_n par C_3. Nous avons déjà remarqué que si C_n et C_{m+n} varient en tendant vers des limites déterminées, Γ_m et Γ_{m+n} tendent vers des limites déterminées. Donc tous les termes de (1') tendent dans ces conditions vers des limites précises. Appliquons cela aux courbes $C_n + L$ et P nous aurons :

$$C_n L = P \Gamma''_n + C_3 C_{n+p-3},$$

$\Gamma^1{}_n$ étant le reste de $C^1{}_n$ divisé par C_3. Faisons maintenant tendre les a_i vers A, en faisant tendre $D_2, D_3, \dots D_p$ vers D_1, nous trouvons à la limite

$$C_n D^p{}_1 = D^p{}_1 \gamma^1{}_n + C_3 c_{n+p-3}.$$

$\gamma^1{}_n$ et c_{n+p-3} étant des polynômes déterminés. On peut évidemment tout diviser par $D^p{}_1$ et l'on trouve :

$$C_n = \gamma^1{}_n + C_3 P_{n-3};$$

$\gamma^1{}_n$ étant de degré 2 en x, $\gamma^1{}_n$ ne diffère pas du reste Γ_n de la division de C_n par C_3.

Donc $\Gamma^1{}_n$, et par suite aussi $\Gamma^2{}_n, \dots \Gamma^k{}_n$ tendent vers Γ_n, de même $\Gamma^k{}_{m+n}$ tend vers Γ_{m+n}, et comme le théorème de Sylvester s'applique à $\Gamma^k{}_n$ et $\Gamma^k{}_{m+n}$, il s'applique aussi à Γ_n et à Γ_{m+n}; donc à C_n et à C_{m+n}.

Le théorème de Sylvester est ainsi prouvé pour toutes les cubiques non unicursales. C'est pour ces courbes seulement qu'il est important, puisque son principal avantage est de permettre la suppression de l'emploi des fonctions elliptiques et que, lorsqu'il s'agit de cubiques unicursales, l'usage de ces fonctions est inutile. Aussi je me contenterai d'indiquer que, par des raisonnements analogues aux précédents, on peut étudier aussi certains des cas où C_n passe par le point double de la cubique C_3; par exemple, on prouvera que le théorème de Sylvester s'applique au cas d'une courbe C_n passant par le point double que j'appelle O, si C_3 et C_n n'ont aucune tangente commune en ce point O et si C_{m+n} admet comme tangente en O, et avec un ordre de multiplicité au moins égal, chacune des tangentes en O à C_n. On peut aussi appliquer les mêmes procédés pour obtenir certains résultats qu'on déduit d'habitude du théorème de Nœther.