

LOUIS ROY

Sur l'électrodynamique des milieux en mouvement

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 15 (1923), p. 199-241

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1923_3_15__199_0

© Université Paul Sabatier, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉLECTRODYNAMIQUE

DES MILIEUX EN MOUVEMENT

Par LOUIS ROY.

INTRODUCTION

Nous avons récemment montré ⁽¹⁾ comment l'Électrodynamique de Helmholtz, complétée par Duhem, explique d'une manière très sûre et sans briser la tradition tous les résultats essentiels obtenus par Maxwell pour les milieux en repos. Il était donc tout indiqué, malgré la faveur actuelle des théories électroniques, de chercher à étendre cette Électrodynamique aux milieux en mouvement et d'en comparer les résultats à ceux de Hertz et de M. Lorentz. C'est cette extension que nous allons tenter dans le présent Mémoire. La doctrine de Helmholtz-Duhem ainsi prolongée apparaîtra certainement comme un perfectionnement de celle de Hertz, bien qu'elle soit, comme c'était à prévoir, tout aussi impuissante que cette dernière et toutes les autres à expliquer à la fois l'expérience de Fizeau et celle de M. Michelson dans le cadre de nos idées traditionnelles.

Nous considérons un système de corps continus animés d'un mouvement quelconque par rapport à des axes de coordonnées entièrement arbitraires. Le changement élémentaire de configuration éprouvé à chaque instant par le système étant une déformation infiniment petite, nous commençons par rappeler certaines formules utiles de la Cinématique des milieux continus, avant d'aborder l'étude générale des courants électriques.

Après avoir établi les équations indéfinie et superficielle de continuité du courant de conduction, nous passons à l'étude du courant de polarisation, analogue au courant de déplacement de Maxwell et se confondant très sensiblement avec lui dans le cas des milieux en repos. Or, on passe de la définition du courant de conduction

⁽¹⁾ L. Roy, *L'Électrodynamique des milieux isotropes en repos d'après Helmholtz et Duhem*, collection Scientia, 1 vol. in-8 de 94 p., Paris, 1923.

à celle du courant de polarisation, en remplaçant simplement la quantité d'électricité ayant traversé un élément de surface lié à la matière, depuis un instant initial quelconque jusqu'à l'instant t , par le flux de polarisation à travers l'élément à cet instant. De là, un parallélisme complet entre les équations de continuité, tant indéfinies que superficielles, de ces deux sortes de courants, qui montre que le courant de polarisation joue, par rapport à la distribution fictive équivalente (E, Σ) de la polarisation diélectrique, le même rôle que le courant de conduction par rapport à la distribution électrique réelle (e, σ) .

On sait que les expériences de Rowland ont conduit à admettre qu'un élément dQ de charge électrique, qui se meut avec une vitesse U par rapport au trièdre de référence $Oxyz$, produit, en tout point lié à ce trièdre, les mêmes phénomènes électromagnétiques et électrodynamiques qu'un élément de courant dirigé suivant U , d'intensité I et de longueur ds , tels qu'on ait

$$(A) \quad Ids = UdQ.$$

Comme dQ peut être la charge d'un élément de volume ou d'un élément de surface séparative, les courants I devront résulter du mouvement des volumes et des surfaces électrisés. Comme d'ailleurs on admet, depuis Maxwell, l'équivalence des courants de conduction et de polarisation au point de vue électromagnétique et électrodynamique et que, d'autre part, on passe des premiers aux seconds en remplaçant la distribution réelle (e, σ) par la distribution fictive (E, Σ) , il nous paraît vraisemblable d'admettre que la propriété d'équivalence (A) s'applique non seulement aux charges réelles, mais aussi aux charges fictives. Cette hypothèse a l'avantage de donner à certaines de nos formules une harmonie, que la seule introduction du courant de Rowland leur ferait perdre, en y faisant apparaître certains termes qu'*a priori* on ne s'expliquerait guère. En conséquence, nous appelons densité du courant de convection en un point d'un volume électrisé et relative aux axes $Oxyz$, le vecteur $(e + E)U$, et densité du courant de convection en un point d'une surface électrisée et relative aux mêmes axes, le vecteur $(\sigma + \Sigma)U$. En fait, par suite de la discontinuité de la vitesse à la traversée d'une surface séparative, ce dernier vecteur en donne deux attachés à chaque face de celle-ci. Mais, contrairement à ce qui avait lieu pour les courants de conduction et de polarisation, les courants de convection dépendent essentiellement des axes choisis; il en est donc de même du courant total, égal, par définition, à la somme des précédents.

La notion de courant étant ainsi nettement précisée, nous passons à la recherche du potentiel vecteur total qui intervient dans l'expression de la force électromotrice totale d'induction donnée par Helmholtz. Ce potentiel est la somme des potentiels vecteurs électrique et magnétique. Le second conserve seul la forme qu'il avait pour les milieux en repos, car le premier se complique du fait que le courant total, en

un point du champ d'intégration, y est relatif, non pas aux axes de référence $Oxyz$, mais aux axes principaux de dilatation au point (x, y, z) où l'on calcule ce potentiel. Il en résulte que ce courant dépend ici des variables d'intégration et de x, y, z ; de là des complications nouvelles. On reconnaît cependant que le potentiel vecteur électrique s'exprime au moyen de quatre potentiels directs, ce qui permet de le rattacher sans de trop grandes difficultés au potentiel électrique, ainsi que l'avait fait Helmholtz pour les milieux en repos.

La force électromotrice totale d'induction dans un circuit fermé apparaît alors, à un facteur constant près, comme la dérivée totale par rapport au temps et changée de signe, du flux d'un certain vecteur à travers la surface du circuit. En appelant ce vecteur induction magnétique, nous généralisons la définition relative aux milieux en repos. Nous retrouvons ainsi la loi fondamentale que Hertz avait admise comme un fait d'expérience et qui satisfait à ce que H. Poincaré appelle le principe de la conservation du magnétisme. Le champ magnétique s'en déduit sans difficulté.

Si maintenant on calcule le tourbillon du champ électrique, on retrouve le premier groupe des équations de Hertz. En procédant de même pour le champ magnétique, on obtient des équations qui satisfont au principe de la conservation de l'électricité et qui coïncident avec le second groupe de Hertz, en vertu de l'hypothèse de Faraday-Mossotti, si toutefois le mouvement du milieu s'effectue sans déformation. En ce cas seulement, les équations de Hertz satisfont au principe de la conservation de l'électricité, et cette circonstance tient à ce que l'électricité vraie de Hertz ne coïncide généralement pas avec l'électricité réelle.

Nos équations ne sont pas immédiatement comparables à celles aux moyennes de M. Lorentz, parce que le champ et l'induction n'ont pas la même signification dans les deux théories. Au lieu du champ électrique ou magnétique en un point matériel suivi dans son mouvement, nous devons, avec M. Lorentz, considérer le champ dans l'éther, assimilé à un solide lié à nos axes de coordonnées $Oxyz$, qui dès lors cessent d'être arbitraires. Nous retrouvons ainsi toutes les équations fondamentales de M. Lorentz, sauf celles du second groupe, donnant le tourbillon du champ magnétique, qui renferment ici un terme de plus. Il y aurait toutefois coïncidence complète, si le champ électrique dans l'éther se réduisait au champ électrostatique.

Enfin, l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques, traitée par la méthode d'Hugoniot, nous conduit au même résultat que la théorie de Hertz : les ondes sont totalement entraînées par le milieu en mouvement. On explique ainsi l'aberration astronomique aussi facilement que par la théorie de M. Lorentz, mais non l'expérience de Fizeau sur l'entraînement partiel des ondes lumineuses par la matière en mouvement. Par contre notre théorie, étant indépendante de tout repère privilégié, a l'avantage d'expliquer de soi-même le résultat négatif de l'expérience de M. Michelson, sans être obligé de bouleverser nos conceptions fondamentales.

Notre exposé, pour être moins incomplet, devrait comprendre le calcul des actions électromagnétiques et électrodynamiques. Pour y procéder suivant les méthodes sûres de l'Énergétique, il faudrait partir, comme nous l'avons fait d'après Helmholtz et Duhem pour les milieux en repos, de l'expression de l'énergie interne d'un système en mouvement parcouru par des courants quelconques. Or cette expression générale de l'énergie interne ne nous est pas connue avec certitude, l'expression donnée par Duhem supposant implicitement les courants indépendants des vitesses, ce qui n'a lieu que pour ceux de conduction. Il y a là une difficulté, qui nous empêche actuellement d'aller plus loin, mais qu'on pourra peut-être vaincre en adaptant à notre doctrine certaines considérations ingénieuses récemment exposées par M. Liénard (¹).

(¹) A. Liénard, *Équilibre et déformation de systèmes de conducteurs traversés par des courants et de corps magnétiques sans hystérésis*. (*Annales de Physique*, 9^e série, t. XX, 1923, p. 251.)

Le présent Mémoire a été résumé en quatre Notes insérées aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris :

1. *Les courants électriques dans les milieux continus en mouvement*, 19 mai 1924;
 2. *L'induction électrodynamique et électromagnétique dans les milieux continus en mouvement*, 16 juin 1924;
 3. *Les équations fondamentales de l'Électrodynamique des milieux continus en mouvement*, 30 juin 1924;
 4. *Les ondes électromagnétiques dans les milieux continus en mouvement*, 16 juillet 1924.
-

CHAPITRE PREMIER

Le courant électrique.

1. Préliminaires. — Considérons un système de corps continus en mouvement par rapport à un trièdre trirectangle $Oxyz$ entièrement arbitraire et soient, à l'instant t , a, b, c les composantes de la vitesse U d'un point matériel quelconque $M(x, y, z)$ du système. Les fonctions a, b, c seront supposées continues dans tout le milieu considéré, sauf, en général, sur chaque surface S séparative de deux corps continus 1 et 2 du système. Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les cosinus directeurs des deux demi-normales en un point de S menées respectivement vers l'intérieur des corps 1 et 2; si nous supposons que les deux corps ne puissent que glisser l'un sur l'autre sans cesser de demeurer en contact, nous aurons en chaque point de S

$$a_1 \alpha_1 + b_1 \beta_1 + c_1 \gamma_1 + a_2 \alpha_2 + b_2 \beta_2 + c_2 \gamma_2 = 0,$$

ce que nous écrirons pour abrégé

$$|a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2| = 0,$$

conformément à la notation dont nous avons fait un constant usage dans un travail antérieur⁽¹⁾.

Le changement de configuration éprouvé par le système entre les instants t et $t + dt$ est une déformation infiniment petite, dont les six composantes divisées par dt , c'est-à-dire rapportées à l'unité de temps, sont

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{\partial a}{\partial x}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial b}{\partial y}, \quad \lambda_3 = \frac{\partial c}{\partial z}, \\ g_1 = \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z}, \quad g_2 = \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial x}, \quad g_3 = \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}. \end{array} \right.$$

Soient

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ \omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right), \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ L. ROY, *loc. cit.*, p. 12 et suiv. Par exemple, nous représenterons par $\left| \frac{\partial A}{\partial x} \right|$ la divergence du vecteur (A, B, C) , par $\left| x \frac{\partial V}{\partial x} \right|$ la dérivée de V suivant la direction (α, β, γ) , etc...

la dilatation cubique et les composantes de la rotation moyenne correspondantes; on déduit de (1) et (2)

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{g_3}{2} - \omega_3, & \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{g_1}{2} - \omega_1, & \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{g_2}{2} - \omega_2, \\ \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{g_2}{2} + \omega_2, & \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{g_3}{2} + \omega_3, & \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{g_1}{2} + \omega_1; \end{cases}$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_2}{\partial y} - \frac{\partial g_3}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = -\frac{\partial \lambda_2}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = \frac{\partial \lambda_3}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_1}{\partial z}, \\ \dots \dots \dots \\ \Delta a = \frac{\partial}{\partial x} (2\lambda_1 - \theta) + \frac{\partial g_3}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial z}, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

2. Variations des cosinus directeurs d'un élément linéaire lié à la matière. —

Soient $\delta(x, \beta, \gamma)$ les variations, pendant le temps dt , des cosinus directeurs d'un élément linéaire lié à la matière⁽¹⁾; en désignant par

$$(5) \quad D = \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 + \lambda_3 \gamma^2 + g_1 \beta \gamma + g_2 \gamma \alpha + g_3 \alpha \beta$$

la dilatation linéaire par unité de temps en M dans la direction (α, β, γ) , on trouve aisément

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\delta \alpha}{dt} = (\lambda_1 - D) \alpha + \left(\frac{g_3}{2} - \omega_3 \right) \beta + \left(\frac{g_2}{2} + \omega_2 \right) \gamma, \\ \frac{\delta \beta}{dt} = \left(\frac{g_3}{2} + \omega_3 \right) \alpha + (\lambda_2 - D) \beta + \left(\frac{g_1}{2} - \omega_1 \right) \gamma, \\ \frac{\delta \gamma}{dt} = \left(\frac{g_2}{2} - \omega_2 \right) \alpha + \left(\frac{g_1}{2} + \omega_1 \right) \beta + (\lambda_3 - D) \gamma. \end{cases}$$

Dans le cas particulier où la direction (α, β, γ) considérée est principale, on sait qu'on a

$$(\lambda_1 - D) \alpha + \frac{g_3}{2} \beta + \frac{g_2}{2} \gamma = 0,$$

$$\frac{g_3}{2} \alpha + (\lambda_2 - D) \beta + \frac{g_1}{2} \gamma = 0,$$

$$\frac{g_2}{2} \alpha + \frac{g_1}{2} \beta + (\lambda_3 - D) \gamma = 0,$$

⁽¹⁾ Nous employons la caractéristique δ au lieu de d pour désigner ces variations, afin d'éviter la juxtaposition de deux lettres d quand il nous arrivera de prendre la variation de quantités infiniment petites.

de sorte que les formules (6) se réduisent à

$$(7) \quad \frac{\delta\alpha}{dt} = -\beta\omega_3 + \gamma\omega_2, \quad \frac{\delta\beta}{dt} = -\gamma\omega_1 + \alpha\omega_3, \quad \frac{\delta\gamma}{dt} = -\alpha\omega_2 + \beta\omega_1.$$

3. Variations des cosinus directeurs de la normale à un élément de surface lié à la matière. — Soient, à l'instant t ,

$$\alpha = mn' - nm', \quad \beta = n'l - ln', \quad \gamma = lm' - ml'$$

les cosinus directeurs de la normale à deux directions rectangulaires (l, m, n) , (l', m', n') tracées sur un élément de surface lié à la matière; δ désignant toujours une variation éprouvée pendant le temps dt , on a

$$\delta\alpha = n'\delta m + m\delta n' - m'\delta n - n\delta m', \dots;$$

en remplaçant dans ces formules $\delta l, \delta m, \dots$ par leurs valeurs déduites de (6) et en tenant compte de (3), il vient

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\delta\alpha}{dt} = -(\mathbf{D} + \mathbf{D}' - \lambda_2 - \lambda_3)\alpha - \frac{\partial b}{\partial x}\beta - \frac{\partial c}{\partial x}\gamma, \\ \frac{\delta\beta}{dt} = -\frac{\partial a}{\partial y}\alpha - (\mathbf{D} + \mathbf{D}' - \lambda_3 - \lambda_1)\beta - \frac{\partial c}{\partial y}\gamma, \\ \frac{\delta\gamma}{dt} = -\frac{\partial a}{\partial z}\alpha - \frac{\partial b}{\partial z}\beta - (\mathbf{D} + \mathbf{D}' - \lambda_1 - \lambda_2)\gamma, \end{cases}$$

où \mathbf{D} et \mathbf{D}' désignent les dilatations linéaires par unité de temps dans les directions (l, m, n) et (l', m', n') .

4. Dilatation superficielle. — Soit $dS = ds ds'$ l'aire d'un élément de surface normal à la direction (α, β, γ) , construit sur deux éléments linéaires rectangulaires ds et ds' issus de \mathbf{M} . La dilatation superficielle en \mathbf{M} relative à la direction (α, β, γ) , c'est-à-dire éprouvée par l'élément dS pendant le temps dt , et rapportée à l'unité de temps est

$$(9) \quad \mathcal{D} = \frac{\delta dS}{dt dS} = \frac{1}{dt} \left(\frac{\delta ds}{ds} + \frac{\delta ds'}{ds'} \right) = \mathbf{D} + \mathbf{D}',$$

\mathbf{D} et \mathbf{D}' étant les dilatations linéaires par unité de temps suivant les deux éléments. Mais si l'on ajoute à leur somme la dilatation linéaire suivant la normale (α, β, γ) , on obtient la dilatation cubique θ d'après la propriété d'invariance bien connue; d'où, d'après (5),

$$(10) \quad \mathcal{D} = \theta - \lambda_1 \alpha^2 - \lambda_2 \beta^2 - \lambda_3 \gamma^2 - g_1 \beta \gamma - g_2 \gamma \alpha - g_3 \alpha \beta.$$

5. **Équation indéfinie de continuité du courant de conduction.** — Soient, à l'instant t , dS un élément de surface lié à la matière et passant par un point $M(x, y, z)$, Mn une demi-normale à dS de cosinus directeurs α, β, γ . Rappelons que la densité du courant de conduction en M est, par définition, le vecteur (u, v, w) d'origine M dont le flux à travers dS et relatif à la direction Mn est égal à la quantité d'électricité par unité de temps $\frac{\partial Q}{\partial t}$, qui traverse dS dans le sens Mn , c'est-à-dire tel qu'on ait

$$(11) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = (u\alpha + v\beta + w\gamma) dS.$$

Il résulte de cette définition que la projection $|u\alpha|$ est invariante par rapport à tout système d'axes de coordonnées, quelle que soit la direction (α, β, γ) autour de M . Par suite, le vecteur (u, v, w) est indépendant des axes de référence choisis, en ce sens que si l'on définit par (11) le vecteur (u', v', w') au même point M , mais par rapport à d'autres axes $O'x'y'z'$, u, v, w et u', v', w' représentent les composantes d'un même vecteur. Nous verrons plus loin l'utilité de cette remarque.

Cela posé, soient, à l'instant t , S une surface fermée arbitraire liée à la matière, tracée à l'intérieur d'un des corps continus du système et enfermant un volume Ω ; α, β, γ les cosinus directeurs d'une demi-normale intérieure à S , $e(x, y, z, t)$ la densité cubique de l'électricité en $M(x, y, z)$. En écrivant de deux manières la variation pendant le temps dt de la quantité totale d'électricité contenue dans S , on a

$$(12) \quad dt \int |u\alpha| dS = \delta \int e d\Omega = \int \left(\delta e + e \frac{\delta d\Omega}{d\Omega} \right) d\Omega,$$

avec

$$\begin{aligned} \delta e &= \left(\frac{\partial e}{\partial t} + a \frac{\partial e}{\partial x} + b \frac{\partial e}{\partial y} + c \frac{\partial e}{\partial z} \right) dt^{(1)}, \\ \frac{\delta d\Omega}{d\Omega} &= \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right) dt = \theta dt; \end{aligned}$$

d'où, en substituant dans (12) et par une transformation bien connue,

$$(13) \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + \frac{\delta e}{dt} + e\theta = 0,$$

ou

$$(13') \quad \left| \frac{\partial(u + ea)}{\partial x} \right| + \frac{\delta e}{dt} = 0.$$

(1) Nous désignons donc par $\frac{\delta}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left| a \frac{\partial}{\partial x} \right|$ une dérivée totale par rapport au temps, calculée en suivant la matière dans son mouvement.

C'est l'équation indéfinie de continuité du courant de conduction, qui doit être vérifiée en chaque point d'un corps continu du système; on voit qu'elle garde la même forme que pour un milieu en repos, sauf à ajouter à la densité du courant de conduction (u, v, w) le vecteur $e(a, b, c)$, appelé densité du courant de convection en un point d'un volume électrisé et relative aux axes $Oxyz$.

6. Équation superficielle de continuité du courant de conduction. — De même, en écrivant de deux manières la variation, pendant le temps dt , de la quantité d'électricité qui recouvre un élément de surface S séparative de deux corps continus 1 et 2, on a

$$- dt |u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2| dS = \delta(\sigma dS),$$

$\sigma(x, y, z, t)$ étant la densité superficielle de l'électricité en un point de S .

Mais, les deux corps pouvant glisser l'un sur l'autre sans cesser d'être en contact, les vitesses sont généralement discontinues à travers S . Il en résulte que les déformations pendant le temps dt des deux éléments de surface dS_1 et dS_2 des corps 1 et 2, en coïncidence à l'instant t , ne sont généralement pas les mêmes; nous devons donc écrire

$$\delta(\sigma dS) = \left(\delta\sigma + \sigma_1 \frac{\delta dS_1}{dS_1} + \sigma_2 \frac{\delta dS_2}{dS_2} \right) dS,$$

avec $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Il vient ainsi, d'après (9),

$$(14) \quad |u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2| + \frac{\delta\sigma}{dt} + \sigma_1 \mathcal{D}_1 + \sigma_2 \mathcal{D}_2 = 0.$$

C'est l'équation superficielle de continuité du courant de conduction. Or on a, d'après (10), pour chacun des deux corps en contact

$$\frac{\delta\sigma}{dt} + \sigma \mathcal{D} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \left| a \frac{\partial\sigma}{\partial x} \right| + \sigma(\theta - \lambda_1 \alpha^2 - \lambda_2 \beta^2 - \dots - g_3 \alpha \beta),$$

soit encore

$$\frac{\delta\sigma}{dt} + \sigma \mathcal{D} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + N_1 \alpha^2 + N_2 \beta^2 + N_3 \gamma^2 + 2T_1 \beta \gamma + 2T_2 \gamma \alpha + 2T_3 \alpha \beta,$$

en posant

$$N_1 = \left| a \frac{\partial\sigma}{\partial x} \right| + \sigma(\lambda_2 + \lambda_3), \quad N_2 = \left| a \frac{\partial\sigma}{\partial x} \right| + \sigma(\lambda_3 + \lambda_1), \quad N_3 = \left| a \frac{\partial\sigma}{\partial x} \right| + \sigma(\lambda_1 + \lambda_2);$$

$$T_1 = -\frac{\sigma}{2} g_1, \quad T_2 = -\frac{\sigma}{2} g_2, \quad T_3 = -\frac{\sigma}{2} g_3.$$

L'équation (14) peut donc encore s'écrire

$$|(u_1 + u'_1) x_1 + (u_2 + u'_2) x_2| + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0,$$

en posant

$$u' = N_1 x + T_3 \beta + T_2 \gamma, \quad v' = T_3 x + N_2 \beta + T_1 \gamma, \quad w' = T_2 x + T_1 \beta + N_3 \gamma.$$

Nous voyons ainsi que l'équation superficielle de continuité du courant de conduction garde la même forme que pour un milieu en repos, sauf à ajouter à la densité du courant de conduction (u, v, w) le vecteur (u', v', w') .

Le courant de conduction est dit *uniforme* lorsque la quantité d'électricité portée par chaque particule matérielle et chaque élément de surface séparative ne varie pas, c'est-à-dire quand on a

$$\partial(ed\Omega) = 0, \quad \partial(\sigma dS) = 0;$$

ses équations de continuité (13) et (14) se réduisent alors à

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = 0, \quad |u_1 x_1 + u_2 x_2| = 0,$$

comme pour un milieu en repos.

7. Courant de polarisation. — Soient A, B, C les composantes de l'intensité de polarisation diélectrique J au point M(x, y, z); le *flux de polarisation* à travers un élément de surface dS et relatif à la demi-normale (α, β, γ) à cet élément est

$$\varphi = (A\alpha + B\beta + C\gamma) dS.$$

Supposons l'élément dS lié à la matière; pendant le temps dt, φ éprouve la variation

$$\partial\varphi = \partial |A\alpha| dS + |A\alpha| \partial dS,$$

c'est-à-dire, d'après (9),

$$\frac{\partial\varphi}{dt} = \left[\alpha \frac{\partial A}{dt} + A \frac{\partial \alpha}{dt} + |A\alpha| (D + D') \right] dS$$

et, d'après (8),

$$\frac{\partial\varphi}{dt} = \left[\left[\frac{\partial A}{dt} + A(\lambda_2 + \lambda_3) - B \frac{\partial a}{\partial y} - C \frac{\partial a}{\partial z} \right] \alpha \right] dS,$$

ce qui s'écrit encore

$$(15) \quad \frac{\delta \varphi}{dt} = (u\alpha + v\beta + w\gamma) dS,$$

c'est-à-dire pour une surface finie

$$(15') \quad \frac{\delta}{dt} \int |A\alpha| dS = \int |u\alpha| dS,$$

en posant

$$(16) \quad \begin{cases} u = \frac{\delta A}{dt} + A(\lambda_2 + \lambda_3) - B \frac{\partial a}{\partial y} - C \frac{\partial a}{\partial z}, \\ v = \frac{\delta B}{dt} + B(\lambda_3 + \lambda_1) - C \frac{\partial b}{\partial z} - A \frac{\partial b}{\partial x}, \\ w = \frac{\delta C}{dt} + C(\lambda_1 + \lambda_2) - A \frac{\partial c}{\partial x} - B \frac{\partial c}{\partial y}. \end{cases}$$

Le vecteur (u, v, w) d'origine $M(x, y, z)$ s'appelle la *densité du courant de polarisation* en ce point et la formule (15') en donne la signification physique. Cette densité est le vecteur dont le flux à travers une surface liée à la matière représente la variation par unité de temps du flux de polarisation à travers cette surface.

Les formules (16) s'écrivent encore

$$(16') \quad \begin{cases} u = \frac{\partial A}{\partial t} + a \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right| + \frac{\partial (Ab - Ba)}{\partial y} - \frac{\partial (Ca - Ac)}{\partial z}, \\ v = \frac{\partial B}{\partial t} + b \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right| + \frac{\partial (Bc - Cb)}{\partial z} - \frac{\partial (Ab - Ba)}{\partial x}, \\ w = \frac{\partial C}{\partial t} + c \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right| + \frac{\partial (Ca - Ac)}{\partial x} - \frac{\partial (Bc - Cb)}{\partial y}, \end{cases}$$

soit en notation vectorielle

$$C^t \text{ de pol.} = C^t \text{ au repos} + U \operatorname{div.} J + \operatorname{curl} [JU].$$

Le premier terme du second membre correspond au courant de déplacement de Maxwell, le second au courant de convection de Hertz, le troisième au courant de Röntgen.

L'invariance de la projection $|u\alpha|$, résultant de (15), donne lieu à la même remarque qu'au n° 5, en ce sens que u, v, w et u', v', w' , calculés par (16) dans un nouveau système d'axes $O'x'y'z'$, représentent les composantes d'un même vecteur.

Soient, d'autre part,

$$(17) \quad E = - \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right|, \quad \Sigma = - |Ax|,$$

les densités cubique et superficielle de la distribution fictive équivalente de la polarisation diélectrique de chaque corps continu du système; il résulte de (16') qu'on a, en chaque point d'un corps continu,

$$(18) \quad \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| + \frac{\partial E}{\partial t} + E\theta = 0,$$

ou

$$(18') \quad \left| \frac{\partial(v + Ea)}{\partial x} \right| + \frac{\partial E}{\partial t} = 0,$$

ce qui est l'équation indéfinie de continuité du courant de polarisation; et de (16), (8) et (9), en chaque point d'une surface séparative de deux corps continus 1 et 2,

$$(19) \quad |u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2| + \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \Sigma_1 \mathcal{Q}_1 + \Sigma_2 \mathcal{Q}_2 = 0,$$

où l'on a posé $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$. C'est l'équation superficielle de continuité. On déduit encore de (13), (18) et de (14), (19)

$$(20) \quad \left| \frac{\partial(u + v)}{\partial x} \right| + \frac{\partial(e + E)}{\partial t} + (e + E)\theta = 0,$$

$$(21) \quad |(u_1 + v_1) \alpha_1 + (u_2 + v_2) \alpha_2| + \frac{\partial(\sigma + \Sigma)}{\partial t} + (\sigma_1 + \Sigma_1) \mathcal{Q}_1 + (\sigma_2 + \Sigma_2) \mathcal{Q}_2 = 0.$$

En comparant (13) à (18) et (14) à (19), on voit que le courant de polarisation joue, par rapport à la distribution fictive équivalente (E, Σ) de la polarisation diélectrique, le même rôle que le courant de conduction par rapport à la distribution électrique réelle⁽¹⁾ (e, σ). D'ailleurs, la comparaison de (11) à (15) montre qu'on passe de la définition du courant de conduction à celle du courant de polarisation, en remplaçant simplement ∂Q par $\partial \varphi$, c'est-à-dire la quantité d'électricité Q ayant traversé l'élément de surface, depuis un instant initial quelconque jusqu'à l'instant t, par le flux de polarisation φ à travers l'élément à cet instant.

(¹) Nous disons réelle et non vraie, pour éviter toute confusion avec la terminologie de Hertz.

Le courant de polarisation est dit *uniforme*, lorsque la quantité d'électricité fictive portée par chaque particule matérielle et chaque élément de surface séparative ne varie pas, c'est-à-dire quand on a

$$\delta(Ed\sigma) = 0, \quad \delta(\Sigma dS) = 0;$$

ses équations de continuité (18) et (19) se réduisent alors à

$$\left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| = 0, \quad |v_1 x_1 + v_2 x_2| = 0.$$

8. Courant linéaire. — Considérons, pour fixer les idées, un courant de conduction et soit $\overline{OM} = s$ l'abscisse curviligne d'un point $M(x, y, z)$ du fil conducteur, comptée à partir d'une origine arbitraire. Par définition du courant linéaire, le vecteur (u, v, w) est tangent au fil et son produit par la section droite du fil en M est un autre vecteur ayant le sens du premier et appelé *intensité du courant linéaire* en ce point. Soit I la valeur algébrique de cette intensité dans le sens des s croissants. En écrivant de deux manières la variation pendant le temps dt de la quantité d'électricité contenue dans le tronçon $\overline{MM'} = ds$, on a

$$(22) \quad -\frac{\partial I}{\partial s} ds dt = \delta(\mu ds) = ds \delta\mu + \mu \delta ds,$$

μ étant la densité linéaire de l'électricité en M , fonction de s et de t ; d'où

$$\delta\mu = \frac{\partial\mu}{\partial s} \delta s + \frac{\partial\mu}{\partial t} dt.$$

On a, d'autre part,

$$\delta ds = \alpha \delta dx + \beta \delta dy + \gamma \delta dz,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la tangente en M dans le sens des s croissants.

Or

$$\delta x = a dt, \quad \text{d'où} \quad \delta dx = \frac{\partial a}{\partial s} ds dt;$$

par suite

$$\begin{aligned} \delta ds &= \left(\alpha \frac{\partial a}{\partial s} + \beta \frac{\partial b}{\partial s} + \gamma \frac{\partial c}{\partial s} \right) ds dt, \\ \delta s &= \int_0^s \delta ds = dt \int_0^s \left(\alpha \frac{\partial a}{\partial s} + \beta \frac{\partial b}{\partial s} + \gamma \frac{\partial c}{\partial s} \right) ds. \end{aligned}$$

L'équation (22) s'écrit ainsi

$$(23) \quad \frac{\partial I}{\partial s} + \frac{\partial \mu}{\partial s} \int_0^s \left| z \frac{\partial a}{\partial s} \right| ds + \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \left| z \frac{\partial a}{\partial s} \right| = 0;$$

c'est l'équation indéfinie de continuité. Si le fil est inextensible, ∂ds est nul, de sorte qu'elle se réduit à

$$\frac{\partial I}{\partial s} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0.$$

S'il existe, en un point déterminé du fil, une section séparative portant une charge Q et si l'on traverse la section dans le sens des s croissants en passant de la région 1 à la région 2, on aura de même

$$(24) \quad I_1 - I_2 = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

C'est l'équation superficielle de continuité. Le courant linéaire est dit *uniforme* lorsque la quantité d'électricité portée par chaque tronçon et chaque section séparative ne varie pas, c'est-à-dire si l'on a

$$\partial(\mu ds) = 0, \quad \partial Q = 0.$$

Les équations (23) et (24) se réduisent alors à

$$\frac{\partial I}{\partial s} = 0, \quad I_1 = I_2;$$

elles expriment que l'intensité est constante tout le long du fil.

Les mêmes formules sont évidemment valables pour un courant de polarisation, les quantités d'électricité μds et Q résultant alors de la distribution fictive équivalente.

9. Courant de convection et courant total. — Les expériences de Rowland nous conduisent à admettre qu'un élément dQ de charge électrique, qui se meut avec une vitesse U par rapport au trièdre de référence $Oxyz$, produit, en tout point lié à ce trièdre, les mêmes phénomènes électromagnétiques et électrodynamiques qu'un élément de courant dirigé suivant U , d'intensité I et de longueur ds , tels qu'on ait

$$(25) \quad I ds = U dQ.$$

Mais dQ est égal à $ed\Omega$ ou à cdS , suivant qu'il s'agit du déplacement d'un élément de volume ou d'un élément de surface séparative; les courants I résulteront

donc du mouvement des volumes et des surfaces électrisés. Comme d'ailleurs on admet, depuis Maxwell, l'équivalence des courants de conduction et de polarisation au point de vue électromagnétique et électrodynamique et que, d'autre part, on passe des premiers aux seconds, en remplaçant la distribution réelle (e, σ) de l'électricité répandue dans le système par la distribution fictive (E, Σ) résultant de la polarisation diélectrique, il est vraisemblable d'admettre que la propriété d'équivalence (25) s'applique non seulement au mouvement des charges réelles, mais aussi à celui des charges fictives. En conséquence, la *densité du courant de convection en un point d'un volume électrisé* et relative aux axes $Oxyz$ sera, par définition, le vecteur $(e + E)U$, et la *densité du courant de convection en un point d'une surface électrisée* et relative aux mêmes axes, le vecteur $(\sigma + \Sigma)U$. Par suite de la discontinuité de la vitesse à la traversée d'une surface séparative, il faut, en réalité, considérer sur chaque face de celle-ci les deux vecteurs $(\sigma_1 + \Sigma_1)U_1$ et $(\sigma_2 + \Sigma_2)U_2$. Contrairement à ce qui avait lieu pour les courants de conduction et de polarisation, les courants de convection dépendent donc essentiellement des axes choisis, puisque la vitesse intervient dans leur définition. Remarquons enfin que, des deux vecteurs $(e + E)U$ et $(\sigma + \Sigma)U$, le premier seul est homogène aux vecteurs (u, v, w) et (u, v, w) précédemment définis.

Nous appellerons *densité du courant total* relative aux axes $Oxyz$, en un point $M(x, y, z)$ d'un des corps continus du système, le vecteur

$$(26) \quad \begin{cases} \mathbf{u} = u + v + (e + E)a, \\ \mathbf{v} = v + v + (e + E)b, \\ \mathbf{w} = w + w + (e + E)c, \end{cases}$$

d'origine M . En ajoutant membre à membre (13') et (18'), il vient d'après (26)

$$\left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right| + \frac{\partial(e + E)}{\partial t} = 0,$$

c'est-à-dire la même équation indéfinie de continuité que pour un milieu en repos. Mais cette identité de forme ne subsiste plus pour l'équation superficielle de continuité.

CHAPITRE II

Les équations fondamentales de l'Électrodynamique.

10. Potentiel vecteur électrique. — Reprenons les calculs qui nous ont antérieurement conduits⁽¹⁾ aux composantes $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z$ de la force électromotrice d'induction électrodynamique au point $M(x, y, z)$ rapporté à des axes quelconques $Oxyz$, soit

$$(27) \quad \mathcal{E}_x = -\frac{\mathbf{A}^2}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + F \frac{\partial a}{\partial x} + G \frac{\partial b}{\partial x} + H \frac{\partial c}{\partial x} \right), \dots,$$

où $\frac{\mathbf{A}^2}{2}$ est la constante fondamentale des actions électrodynamiques, (F, G, H) le potentiel vecteur électrique au point M . Nous reconnaitrons sans peine, en cessant désormais de faire figurer dans nos calculs la constante de Helmholtz que nous avons reconnu être nulle⁽²⁾, qu'on a

$$(28) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_x(x, y, z, t) = & \int \left[f' + \left(f' \frac{x' - x}{r} + g' \frac{y' - y}{r} + h' \frac{z' - z}{r} \right) \frac{x' - x}{r} \right] \frac{d\Omega}{r} \\ & + \int \left[\mathbf{f}' + \left(\mathbf{f}' \frac{x' - x}{r} + \mathbf{g}' \frac{y' - y}{r} + \mathbf{h}' \frac{z' - z}{r} \right) \frac{x' - x}{r} \right] \frac{dS}{r}, \dots, \end{aligned}$$

où x', y', z' , coordonnées d'un point M' , sont les variables d'intégration, la première intégrale des seconds membres s'étendant aux volumes, la seconde aux surfaces séparatives; r la distance MM' ; f', g', h' les composantes suivant $Oxyz$ de la densité du courant total en M' relative aux axes principaux de dilatation $Mx_1y_1z_1$ en M ; $\mathbf{f}', \mathbf{g}', \mathbf{h}'$ les composantes suivant $Oxyz$ de la densité du courant de convection en un point M' d'une surface séparative et relative aux mêmes axes principaux $Mx_1y_1z_1$.

Simplifions tout d'abord les expressions (28), en y désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la direction $\overline{MM'}$, soit

$$(29) \quad (\alpha, \beta, \gamma) = \frac{(x' - x, y' - y, z' - z)}{r}, \quad \text{avec} \quad r^2 = |(x' - x)^2|;$$

il vient

$$(30) \quad \mathcal{E}_x(x, y, z, t) = \int (f' + |f'z| \alpha) \frac{d\Omega}{r} + \int (\mathbf{f}' + |\mathbf{f}'z| \alpha) \frac{dS}{r}, \dots$$

⁽¹⁾ L. ROY, *loc. cit.*, p. 34.

⁽²⁾ L. ROY, *loc. cit.*, p. 80.

Cela posé, soient $l, m, n; l', m', n'; l'', m'', n''$ les cosinus directeurs des axes Mx_1, My_1, Mz_1 par rapport au trièdre $Oxyz$; $\mathbf{u}'_1, \mathbf{v}'_1, \mathbf{w}'_1$ les composantes suivant Mx_1, y_1, z_1 de la densité du courant total en M' relative à ces axes; x_1, y_1, z_1 les coordonnées relatives de M' . Les composantes suivant Mx_1, y_1, z_1 de la densité du courant de convection en un point M' d'une surface séparative et relative à ces axes étant $(\sigma' + \Sigma')$ $\left(\frac{\delta x_1}{dt}, \frac{\delta y_1}{dt}, \frac{\delta z_1}{dt}\right)^{(*)}$, on a

$$(31) \quad f' = l\mathbf{u}'_1 + l'\mathbf{v}'_1 + l''\mathbf{w}'_1, \dots;$$

$$(32) \quad \mathbf{f}' = \left(l\frac{\delta x_1}{dt} + l'\frac{\delta y_1}{dt} + l''\frac{\delta z_1}{dt}\right)(\sigma' + \Sigma'), \dots,$$

avec, d'après (26),

$$\mathbf{u}'_1 = u'_1 + v'_1 + (e' + E')\frac{\delta x_1}{dt}, \dots,$$

$u'_1, v'_1, w'_1; u'_1, v'_1, w'_1$ étant les composantes suivant Mx_1, y_1, z_1 de la densité des courants de conduction et de polarisation en M' . Les formules (31) deviennent ainsi, par suite de la propriété d'invariance de ces courants rappelée aux nos 5 et 7,

$$(33) \quad f' = u' + v' + \left(l\frac{\delta x_1}{dt} + l'\frac{\delta y_1}{dt} + l''\frac{\delta z_1}{dt}\right)(e' + E'), \dots,$$

$u', v', w'; u', v', w'$ étant les composantes suivant $Oxyz$ de la densité des courants de conduction et de polarisation en M' , fonctions de x', y', z', t . D'ailleurs, pour éviter toute confusion, nous accentuons toutes les fonctions de point prises en M' , afin de les distinguer nettement de celles prises au point M .

Pour calculer les parenthèses figurant dans (32) et (33) et représentant les composantes suivant $Oxyz$ de la vitesse relative de M' , dérivons par rapport au temps les formules de changement de coordonnées

$$(34) \quad x' = x + lx_1 + l'y_1 + l''z_1, \dots;$$

il vient

$$a' = a + \left(l\frac{\delta x_1}{dt} + l'\frac{\delta y_1}{dt} + l''\frac{\delta z_1}{dt}\right) + x_1\frac{\delta l}{dt} + y_1\frac{\delta l'}{dt} + z_1\frac{\delta l''}{dt}, \dots,$$

(*) Nous écrivons $\frac{\delta x_1}{dt}, \dots$ au lieu de $\frac{dx_1}{dt}, \dots$ uniquement pour nous conformer à la notation adoptée dès le n° 2.

a', b', c' étant les composantes suivant $Oxyz$ de la vitesse de M' . Or, les axes $Mx_1y_1z_1$ étant principaux de dilatation, les variations des cosinus se calculent d'après (7), soit

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -m\omega_3 + n\omega_2, \quad \frac{\partial l'}{\partial t} = -m'\omega_3 + n'\omega_2, \quad \frac{\partial l''}{\partial t} = -m''\omega_3 + n''\omega_2, \dots;$$

d'où, en substituant et en tenant compte de (34),

$$a' = a + \left(l \frac{\partial x_1}{\partial t} + l' \frac{\partial y_1}{\partial t} + l'' \frac{\partial z_1}{\partial t} \right) - (y' - y)\omega_3 + (z' - z)\omega_2, \dots$$

Les composantes f', g', h' ; $\mathbf{f}', \mathbf{g}', \mathbf{h}'$ du courant total et de convection figurant dans l'expression (30) du potentiel vecteur électrique sont donc, d'après (26), (33) et (32),

$$(35) \quad \begin{cases} f' = \mathbf{u}' + [-a + (y' - y)\omega_3 - (z' - z)\omega_2](e' + E'), \\ g' = \mathbf{v}' + [-b + (z' - z)\omega_1 - (x' - x)\omega_3](e' + E'), \\ h' = \mathbf{w}' + [-c + (x' - x)\omega_2 - (y' - y)\omega_1](e' + E'); \end{cases}$$

$$(36) \quad \begin{cases} \mathbf{f}' = [a' - a + (y' - y)\omega_3 - (z' - z)\omega_2](\sigma' + \Sigma'), \\ \mathbf{g}' = [b' - b + (z' - z)\omega_1 - (x' - x)\omega_3](\sigma' + \Sigma'), \\ \mathbf{h}' = [c' - c + (x' - x)\omega_2 - (y' - y)\omega_1](\sigma' + \Sigma')^{(1)}. \end{cases}$$

Nous voyons ainsi que ces composantes, qui n'étaient fonctions que de t et des coordonnées x', y', z' de M' dans le cas d'un système en repos, dépendent en outre, dans le cas d'un système en mouvement, des coordonnées x, y, z de M , qui y figurent explicitement et dont dépendent la vitesse (a, b, c) et la rotation moyenne $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ en ce point. Cette circonstance, qui résulte uniquement de l'introduction des courants de convection, complique singulièrement le calcul de $\Delta(F, G, H)$ par rapport à ce qu'il était dans le cas du repos.

On déduit enfin de (35), (36) et (29)

$$(37) \quad |f'\alpha| = |[\mathbf{u}' - (e' + E')a]\alpha|, \quad |\mathbf{f}'\alpha| = (\sigma' + \Sigma')|(a' - a)\alpha|.$$

11. Propriétés du potentiel vecteur électrique. — Nous allons voir que le potentiel vecteur électrique (F, G, H) au point $M(x, y, z)$ s'exprime assez simplement au moyen des quatre potentiels directs

(1) En réalité, par suite de la discontinuité de la vitesse, il faudrait écrire

$$\mathbf{f}' = a'_1(\sigma'_1 + \Sigma'_1) + a'_2(\sigma'_2 + \Sigma'_2) + [-a + (y' - y)\omega_3 - (z' - z)\omega_2](\sigma' + \Sigma'), \dots;$$

nous ne le faisons pas dans le texte, afin de ne pas compliquer l'écriture.

$$(38) \quad \begin{cases} \mathbf{U}(x, y, z, t) = \int \mathbf{u}' r d\Omega + \int (\sigma' + \Sigma') a' r dS, \\ \mathbf{V}(x, y, z, t) = \int \mathbf{v}' r d\Omega + \int (\sigma' + \Sigma') b' r dS, \\ \mathbf{W}(x, y, z, t) = \int \mathbf{w}' r d\Omega + \int (\sigma' + \Sigma') c' r dS, \\ \mathbf{S}(x, y, z, t) = \int (e' + E') r d\Omega + \int (\sigma' + \Sigma') r dS. \end{cases}$$

On voit que les trois premiers sont les potentiels directs du courant total et du courant de convection superficiel⁽¹⁾, et que le dernier est le potentiel direct de la densité totale de l'électricité réelle et fictive; leurs propriétés fondamentales sont, comme on sait, résumées par les deux égalités

$$(39) \quad \frac{1}{2} \Delta \mathbf{U} = \int \frac{\mathbf{u}'}{r} d\Omega + \int \frac{(\sigma' + \Sigma') a'}{r} dS, \quad \Delta \Delta \mathbf{U} = -8\pi \mathbf{u},$$

vérifiées en tout point intérieur à l'un des corps continus du système. On déduit tout d'abord de (29)

$$(\alpha, \beta, \gamma) = -\frac{\partial r}{\partial(x, y, z)}, \quad \frac{\alpha^2}{r} = \frac{1}{r} - \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \quad \frac{\beta\alpha}{r} = -\frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\gamma\alpha}{r} = -\frac{\partial^2 r}{\partial z \partial x},$$

moyennant quoi la première (30), où l'on a remplacé $f', g', \dots, \mathbf{h}'$ par leurs valeurs (35), (36), s'écrit

$$\begin{aligned} 2\mathbf{F} = & \int \left\{ 2 \frac{\mathbf{u}' - (e' + E') a}{r} + \left(-\omega_3 \frac{\partial r}{\partial y} + \omega_2 \frac{\partial r}{\partial z} \right) (e' + E') \right. \\ & \left. - [\mathbf{u}' - (e' + E') a] \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - [\mathbf{v}' - (e' + E') b] \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} - [\mathbf{w}' - (e' + E') c] \frac{\partial^2 r}{\partial z \partial x} \right\} d\Omega \\ & + \int \left[2 \frac{a' - a}{r} - \omega_3 \frac{\partial r}{\partial y} + \omega_2 \frac{\partial r}{\partial z} \right. \\ & \left. - (a' - a) \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - (b' - b) \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} - (c' - c) \frac{\partial^2 r}{\partial z \partial x} \right] (\sigma' + \Sigma') dS; \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Même remarque que la précédente pour les trois premiers potentiels de surface; en réalité il faudrait écrire

$$(\sigma'_1 + \Sigma'_1) a'_1 + (\sigma'_2 + \Sigma'_2) a'_2, \dots$$

La même remarque s'appliquera dans la suite aux intégrales de surface analogues.

d'où, d'après (38) et (39), la première des égalités

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2F(x, y, z, t) = \Delta U - \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \\ \quad - a \Delta S + a \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} + c \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial x} - \omega_3 \frac{\partial S}{\partial y} + \omega_2 \frac{\partial S}{\partial z}, \\ 2G(x, y, z, t) = \Delta V - \frac{\partial}{\partial y} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \\ \quad - b \Delta S + a \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial y} - \omega_1 \frac{\partial S}{\partial z} + \omega_3 \frac{\partial S}{\partial x}, \\ 2H(x, y, z, t) = \Delta W - \frac{\partial}{\partial z} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \\ \quad - c \Delta S + a \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} + b \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} + c \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \omega_2 \frac{\partial S}{\partial x} + \omega_1 \frac{\partial S}{\partial y}. \end{array} \right.$$

On en déduit, d'après (1), (2), (3) et en tenant compte de ce que

$$(41) \quad \Delta S = 2V,$$

$$(42) \quad V(x, y, z, t) = \int \frac{e' + E'}{r} d\omega + \int \frac{\sigma' + \Sigma'}{r} dS$$

étant le potentiel électrique au point M,

$$(43) \quad 2 \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| = -2\theta V \\ + \partial_1 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \partial_2 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \partial_3 \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + g_1 \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} + g_2 \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial x} + g_3 \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \\ + \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right) \frac{\partial S}{\partial x} + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} - \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \right) \frac{\partial S}{\partial y} + \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right) \frac{\partial S}{\partial z}.$$

On voit, d'après (4), que cette expression est nulle si le mouvement du système s'effectue sans déformation. On a d'autre part, d'après (39) et (40),

$$(44) \quad \Delta F = -4\pi u - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{\partial \Delta U}{\partial x} \right| \\ + \frac{1}{2} \Delta \left(-a \Delta S + a \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} + c \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial x} - \omega_3 \frac{\partial S}{\partial y} + \omega_2 \frac{\partial S}{\partial z} \right).$$

Le second terme du second membre se rattache simplement au potentiel électrique. On a en effet, d'après (39) et en tenant compte de ce que $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r}$,

$$(45) \quad \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \Delta \mathbf{U}}{\partial x} \right| = - \int \left| \mathbf{u}' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} \right| d\omega - \int (\sigma' + \Sigma') \left| a' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} \right| dS.$$

Calculons maintenant $\frac{\partial V}{\partial t}$; il vient, d'après (42) et en tenant compte de ce que le champ d'intégration se déforme pendant le temps dt ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} = & \int \left[\frac{\partial(e' + \mathbf{E}')}{\partial t} + (e' + \mathbf{E}') \theta' \right] \frac{d\omega}{r} + \int (e' + \mathbf{E}') \left| a' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} \right| d\omega \\ & + \int \left[\frac{\partial(\sigma' + \Sigma')}{\partial t} + (\sigma'_1 + \Sigma'_1) \mathcal{D}'_1 + (\sigma'_2 + \Sigma'_2) \mathcal{D}'_2 \right] \frac{dS}{r} + \int (\sigma' + \Sigma') \left| a' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} \right| dS, \end{aligned}$$

d'où, d'après (20) et (21),

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} = & - \int \left| \frac{\partial(u' + v')}{\partial x'} \frac{1}{r} \right| d\omega - \int |(u'_1 + v'_1) \alpha_1 + (u'_2 + v'_2) \alpha_2| \frac{dS}{r} \\ & + \int (e' + \mathbf{E}') \left| a' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} \right| d\omega + \int (\sigma' + \Sigma') \left| a' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} \right| dS \end{aligned}$$

et, par une intégration par parties et d'après (26),

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} = & - \int \left| \frac{\partial}{\partial x'} \frac{u' + v'}{r} \right| d\omega - \int |(u'_1 + v'_1) \alpha_1 + (u'_2 + v'_2) \alpha_2| \frac{dS}{r} \\ & + \int \left| \mathbf{u}' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} \right| d\omega + \int (\sigma' + \Sigma') \left| a' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} \right| dS. \end{aligned}$$

Mais les deux premières intégrales se détruisent d'après la formule d'Ostrogradsky, de sorte qu'on a d'après (45)

$$(46) \quad \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \Delta \mathbf{U}}{\partial x} \right| = - \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Développons enfin la seconde ligne de (44); il vient finalement, en tenant compte de (26), (46), (41) et (42),

$$\begin{aligned}
 (47) \quad \Delta F = & -4\pi(u+v) + \frac{\partial V'}{\partial t} + \left| a \frac{\partial V'}{\partial x} \right| - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \\
 & - \left(2\lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{g_3}{2} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{g_2}{2} \frac{\partial V}{\partial z} \right) - V\Delta a \\
 & + \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial \mathbf{S}'}{\partial x} \Delta a \right| - \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \Delta \omega_3 + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial z} \Delta \omega_2 \right) \\
 & + \lambda_1 \frac{\partial^2 \mathbf{S}'}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \mathbf{S}'}{\partial y^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 \mathbf{S}'}{\partial z^2} + g_1 \frac{\partial^2 \mathbf{S}'}{\partial y \partial z} + g_2 \frac{\partial^2 \mathbf{S}'}{\partial z \partial x} + g_3 \frac{\partial^2 \mathbf{S}'}{\partial x \partial y} \\
 & - \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial y^2} - \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial z \partial y} \\
 & + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial z^2},
 \end{aligned}$$

les accents indiquant des dérivées par rapport à x , afin d'abrégier l'écriture. On en déduit, d'après (43),

$$\begin{aligned}
 (48) \quad \Delta F - \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| = & -4\pi(u+v) \\
 & + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} + a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} + c \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} + \mathcal{L},
 \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned}
 (49) \quad \mathcal{L} = & - \left(2\lambda_1 + \frac{g_3}{2} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{g_2}{2} \frac{\partial V}{\partial z} \right) - V\Delta a \\
 & + \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial \mathbf{S}'}{\partial x} \Delta a \right| - \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \Delta \omega_3 + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial z} \Delta \omega_2 \right) \\
 & + \lambda_1 \frac{\partial^2 \mathbf{S}'}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \mathbf{S}'}{\partial y^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 \mathbf{S}'}{\partial z^2} + g_1 \frac{\partial^2 \mathbf{S}'}{\partial y \partial z} + g_2 \frac{\partial^2 \mathbf{S}'}{\partial z \partial x} + g_3 \frac{\partial^2 \mathbf{S}'}{\partial x \partial y} \\
 & - \lambda_1' \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x^2} - \lambda_2' \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial y^2} - \lambda_3' \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial z^2} - g_1' \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial y \partial z} - g_2' \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial z \partial x} - g_3' \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x \partial y} \\
 & - \frac{\partial \omega_3}{\partial x} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial y^2} - \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial z \partial y} \\
 & + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial z^2} \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\theta V - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} \right],
 \end{aligned}$$

chaque accent indiquant toujours une dérivée par rapport à x . En formant les deux autres expressions analogues à (48) relatives aux fonctions G et H, on définirait de même deux autres fonctions \mathfrak{A} et \mathfrak{B} . Il résulte alors de (4) et de (49) que ces fonctions \mathfrak{L} , \mathfrak{A} , \mathfrak{B} sont nulles si le mouvement du système s'effectue sans déformation.

Enfin, d'après (40), les fonctions F, G, H sont discontinues à la traversée des surfaces séparatives par suite de la discontinuité de la vitesse. Cette circonstance tient à ce que nous avons introduit le courant de convection comme constituant du courant total, sans quoi la fonction \mathbf{S} ne figurerait pas dans les expressions de F, G, H et les fonctions \mathbf{U} , \mathbf{V} , \mathbf{W} se réduiraient à leurs intégrales de volume. Les fonctions F, G, H seraient alors continues dans tout l'espace ainsi que leurs dérivées premières, comme dans le cas des milieux en repos.

12. Potentiel vecteur magnétique. — Nous avons antérieurement obtenu les composantes Φ , Ψ , Ω du potentiel vecteur magnétique, en utilisant une égalité qui supposait le système en repos⁽¹⁾. Nous allons reprendre la recherche de ce potentiel en nous affranchissant de cette restriction.

Les conditions d'équivalence des feuillets magnétiques et des courants uniformes conduisent à énoncer le postulat suivant :

Toute particule magnétique engendre la même force électromotrice d'induction que le courant uniforme équivalent au feuillet magnétique de même volume et de même intensité d'aimantation que la particule considérée.

Soit alors $d\Omega$ le volume d'une particule magnétique du système au point $M'(x', y', z')$ où l'intensité d'aimantation est \mathfrak{J}' ; l'intensité I' du courant uniforme équivalent au feuillet de puissance \mathfrak{F}' est donnée par la condition d'équivalence

$$\frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} I' = \sqrt{\varepsilon'} \mathfrak{F}',$$

où ε' est la constante fondamentale des actions magnétiques. Or, dS étant la surface du feuillet et l son épaisseur, on a $\mathfrak{F}' = l\mathfrak{J}'$, $d\Omega = ldS$; d'où

$$\frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} I' dS = \sqrt{\varepsilon'} \mathfrak{J}' d\Omega.$$

Nous sommes ainsi ramenés à calculer le potentiel vecteur électrique (F, G, H) en $M(x, y, z)$ du courant I' , qui parcourt le petit circuit fermé \mathcal{C} bordant l'élément dS . Soit alors $d\mathcal{C}' = \omega ds'$ un tronçon de \mathcal{C} de longueur ds' et de section ω

⁽¹⁾ L. Roy, *loc. cit.* Il s'agit de l'emploi qui a été fait (p. 44) de la formule (103) pour parvenir aux égalités (109).

au point M' ; comme $\omega \mathbf{u}' = I' \frac{dx'}{ds'}$, on a $\mathbf{u}' d\Omega' = I' dx'$. D'autre part, puisqu'on peut toujours supposer le courant I' de conduction, les fonctions cherchées F, G, H ne dépendent que de $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ et celles-ci se réduisent à leurs intégrales de volume. Il vient donc, en remarquant que I' est constant tout le long de \mathcal{C} par suite de son uniformité (n° 8),

$$\mathbf{U} = I' \int r dx',$$

l'intégrale curviligne étant prise le long de \mathcal{C} ; d'où

$$\left| \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right| = -I' \int \left| \frac{\partial r}{\partial x'} dx' \right| = -I' \int dr = 0$$

et par suite, d'après (39) et (40),

$$(F, G, H) = I' \int \frac{(dx', dy', dz')}{r}.$$

Ce sont les expressions que nous avons antérieurement obtenues par une méthode moins générale; le calcul s'achève alors comme nous l'avons indiqué⁽¹⁾, de sorte qu'il nous suffira de rappeler le résultat : si l'on pose

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(x, y, z, t) = \int \left(\mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} - \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) d\Omega, \\ \Psi(x, y, z, t) = \int \left(\mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} - \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} \right) d\Omega, \\ \Omega(x, y, z, t) = \int \left(\mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} - \mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} \right) d\Omega, \end{array} \right.$$

($\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$) étant l'intensité d'aimantation en M' , les fonctions F, G, H dues à l'aimantation du système entier sont respectivement

$$(51) \quad \frac{\sqrt{\varepsilon'}}{\mathbf{A}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi, \Psi, \Omega).$$

⁽¹⁾ L. Roy, *loc. cit.*, p. 44.

Le vecteur (Φ, Ψ, Ω) est le *potentiel vecteur magnétique* au point $M(x, y, z)$; ses propriétés étant les mêmes que pour un système en repos, il nous suffira de rappeler qu'on a, en tout point d'un des corps continus du système,

$$(52) \quad \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| = 0,$$

$$(53) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} - 4\pi\mathfrak{A}, \dots;$$

$$(54) \quad \Delta \Phi = 4\pi \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} \right), \dots,$$

\mathcal{V} étant le potentiel magnétique du système.

Les composantes de la force électromotrice d'induction électromagnétique sont alors données par (27), où l'on a remplacé F, G, H par les fonctions (51).

13. Potentiel vecteur total et force électromotrice totale d'induction. — Soit

$$(55) \quad (\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}) = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}}(F, G, H) + \sqrt{\epsilon'}(\Phi, \Psi, \Omega)$$

le *potentiel vecteur total* au point $M(x, y, z)$; si l'on pose pour abrégier

$$\mathfrak{z} = \left| \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \right|,$$

on a, d'après (43) et (52),

$$(56) \quad \mathfrak{z} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left\{ -\theta V + \frac{1}{2} \left[\partial_1 \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x^2} + \partial_2 \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial y^2} + \partial_3 \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial z^2} \right. \right. \\ \left. \left. + g_1 \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial y \partial z} + g_2 \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial z \partial x} + g_3 \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} \right] \right\},$$

ce qui montre tout d'abord, d'après (4), que la divergence du potentiel vecteur total est nulle si le mouvement du système s'effectue sans déformation. D'autre part, les composantes de la force électromotrice totale d'induction, tant électrodynamique qu'électromagnétique, sont d'après (27)

$$(57) \quad \mathcal{E}_x = -\frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathcal{F} \frac{\partial a}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial b}{\partial x} + \mathcal{H} \frac{\partial c}{\partial x} \right), \dots$$

Soit

$$\tilde{\mathcal{C}}_e = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} (\mathcal{F} dx + \mathcal{G} dy + \mathcal{H} dz)$$

le travail élémentaire du vecteur $\frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$; si l'on regarde l'élément linéaire (dx, dy, dz) comme un élément matériel, la variation de $\tilde{\mathcal{C}}_e$ pendant le temps dt est

$$\delta \tilde{\mathcal{C}}_e = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left| \delta \mathcal{F} dx + \mathcal{F} \delta dx \right|$$

et comme

$$\delta dx = \left(\frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy + \frac{\partial a}{\partial z} dz \right) dt,$$

il vient d'après (57)

$$\frac{\delta \tilde{\mathcal{C}}_e}{dt} = -(\mathcal{E}_x dx + \mathcal{E}_y dy + \mathcal{E}_z dz).$$

Cette interprétation mécanique de la force électromotrice d'induction a été donnée par Helmholtz⁽¹⁾.

Les expressions (57) peuvent se transformer. Posons

$$(58) \quad \begin{cases} \mathcal{B}_x = -\sqrt{\varepsilon'} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \right), \\ \mathcal{B}_y = -\sqrt{\varepsilon'} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right), \\ \mathcal{B}_z = -\sqrt{\varepsilon'} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \right), \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(59) \quad \left| \frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial x} \right| = 0;$$

on peut encore écrire

$$(60) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_x = -\frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \frac{\partial |a\mathcal{F}|}{\partial x} - \frac{\mathcal{B}_y c - \mathcal{B}_z b}{\sqrt{\varepsilon'}} \right), \\ \mathcal{E}_y = -\frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial |a\mathcal{F}|}{\partial y} - \frac{\mathcal{B}_z a - \mathcal{B}_x c}{\sqrt{\varepsilon'}} \right), \\ \mathcal{E}_z = -\frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial |a\mathcal{F}|}{\partial z} - \frac{\mathcal{B}_x b - \mathcal{B}_y a}{\sqrt{\varepsilon'}} \right). \end{cases}$$

(1) HELMHOLTZ, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. III, p. 492.

On en déduit, d'après (58),

$$(61) \quad \left| \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} \right| = -\frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + |\mathfrak{F} \Delta a| + 2\lambda_1 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + 2\lambda_2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + 2\lambda_3 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} + g_1 \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \right) + g_2 \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right) + g_3 \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} \right) \right],$$

ce qui montre, d'après (4) et (56), que la divergence de la force électromotrice totale induite est également nulle, si le mouvement du système s'effectue sans déformation.

D'autre part, la force électromotrice totale induite dans un circuit fermé est

$$\mathcal{E} = \int \mathcal{E}_x dx + \mathcal{E}_y dy + \mathcal{E}_z dz,$$

l'intégrale étant prise le long du circuit; elle devient, par application de la formule de Stokes, d'après (57), (58), (59) et en désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale positive à la surface S du circuit⁽¹⁾,

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathbf{A}}{\sqrt{\epsilon'}} \int \left[\left[\frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial t} + a \left| \frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial x} \right| + \frac{\partial (\mathcal{B}_x b - \mathcal{B}_y a)}{\partial y} - \frac{\partial (\mathcal{B}_z a - \mathcal{B}_x c)}{\partial z} \right] \alpha \right] dS,$$

ce qui s'écrit encore, par analogie avec (15') et (16'),

$$(62) \quad \mathcal{E} = -\frac{\mathbf{A}}{\sqrt{\epsilon'}} \frac{\delta}{dt} \int (\mathcal{B}_x \alpha + \mathcal{B}_y \beta + \mathcal{B}_z \gamma) dS.$$

14. Induction et champ magnétiques. — Le vecteur $(\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y, \mathcal{B}_z)$ d'origine $M(x, y, z)$ défini par (58) s'appelle l'*induction magnétique* en ce point et le vecteur $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ de même origine défini par les égalités

$$(63) \quad (\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y, \mathcal{B}_z) = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) + 4\pi\epsilon' (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}),$$

(¹) Les axes $Oxyz$ ayant la disposition habituelle, c'est-à-dire telle qu'un observateur placé suivant Oz , les pieds en O , voie s'effectuer de sa gauche vers sa droite la plus petite rotation amenant Ox sur Oy .

le *champ magnétique* au même point. Remplaçons alors, dans (63), l'induction par sa valeur (58) et tenons compte de (53) et (55); il vient

$$(64) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = -\varepsilon' \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x} - \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial z} \right), \\ \mathfrak{B} = -\varepsilon' \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial y} - \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} \right), \\ \mathfrak{C} = -\varepsilon' \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial z} - \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \left(\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} \right). \end{cases}$$

Nous voyons ainsi que les expressions (64) et (58) du champ et de l'induction magnétiques ont la même forme dans un milieu en repos ou en mouvement. Si le milieu est parfaitement doux et isotrope, on *admet* qu'on a, comme pour un milieu en repos,

$$(65) \quad (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \kappa (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}),$$

κ étant le coefficient d'aimantation au point considéré. Les égalités (63) donnent alors comme pour les milieux en repos $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$, \mathfrak{H} étant le champ magnétique⁽¹⁾ et $\mu = 1 + 4\pi\varepsilon'\kappa$ la perméabilité magnétique, et les égalités (58) deviennent

$$(66) \quad \mu \mathfrak{X} = -\sqrt{\varepsilon'} \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial z} \right), \dots$$

Si le circuit fermé auquel on applique la formule (62) se réduit à un point, \mathfrak{E} est nul et \mathfrak{S} devient une surface fermée. Cette formule exprime alors que le flux d'induction magnétique à travers une surface fermée arbitraire liée à la matière est constant. Notre définition de l'induction satisfait donc à ce que H. Poincaré appelle le principe de la conservation du magnétisme⁽²⁾. On sait que la formule (62), qui nous apparaît comme une conséquence de la loi élémentaire d'induction électrodynamique de Helmholtz, a été admise par Hertz comme un fait d'expérience.

Dans le cas des milieux en repos, après avoir démontré que l'intensité d'aimantation est proportionnelle au coefficient d'aimantation dans un milieu parfaitement doux, nous avons défini le champ magnétique par (65) et nous en avons déduit pour les composantes de ce champ les expressions (64). L'induction magnétique

⁽¹⁾ Nous désignons ici l'induction par la lettre \mathfrak{B} , déjà employée pour désigner la composante suivant Oy de l'intensité d'aimantation; mais aucune confusion n'est possible.

⁽²⁾ H. POINCARÉ, *Électricité et Optique*, 2^e édition, p. 385.

étant ensuite définie par les mêmes équations (63) que dans la théorie du Magnétisme, nous en avons déduit (58), puis l'égalité

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathbf{A}}{\sqrt{\epsilon'}} \frac{\partial}{\partial t} \int |\mathcal{B}_x \alpha| dS.$$

à laquelle se réduit (62) dans le cas du repos.

Au contraire, dans le cas d'un milieu en mouvement, nous définissons l'induction magnétique par (58), d'où l'on déduit (62); puis le champ magnétique par (63), d'où l'on déduit (64) pour admettre ensuite (65).

Ce changement de méthode nous était en quelque sorte imposé, afin de parvenir aux formules (64) sans partir de l'expression de l'énergie interne du système, ainsi que nous l'avions fait dans le cas du repos. En effet, cette expression ne nous est pas connue avec certitude dans le cas d'un système en mouvement parcouru par des courants quelconques, l'expression donnée par Duhem⁽¹⁾ supposant implicitement les courants indépendants des vitesses, ce qui n'a lieu que pour ceux de conduction. Il y a là une lacune, qui nous empêche actuellement d'aborder le calcul des actions électromagnétiques et électrodynamiques, mais qui sera peut-être comblée dans un avenir prochain, en adaptant à notre doctrine certaines idées ingénieuses de M. Liénard⁽²⁾.

15. Champ et induction électriques. — Soient ρ la résistivité au point $M(x, y, z)$, $(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$ la force électromotrice hydro-électrique au même point, $\Theta(x, y, z)$ la fonction dépendant de l'état de la matière en M , qui intervient dans la théorie des différences de potentiel de contact et des phénomènes thermo-électriques, ϵ la constante fondamentale des actions électrostatiques. Rappelons que la force électromotrice d'induction $(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z)$ en M a été définie par la condition d'avoir d'une manière générale

$$\rho u = -\frac{\partial(\epsilon V + \Theta)}{\partial x} + \varphi_x + \mathcal{E}_x, \dots,$$

c'est-à-dire de rendre la loi d'Ohm vraie en régime quelconque, et que, dans le cas d'un système en repos, le *champ électrique* (X, Y, Z) a été défini par les égalités

$$(67) \quad (X, Y, Z) = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial(x, y, z)} + (\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z).$$

⁽¹⁾ L. ROY, *loc. cit.*, p. 50.

⁽²⁾ Voir la note de la page 202.

Si nous convenons de conserver cette définition du champ électrique dans le cas d'un milieu en mouvement, nous aurons d'après (60) et (67)

$$(68) \quad \begin{cases} X = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \frac{\partial |a\mathcal{F}|}{\partial x} - \frac{\mathcal{B}_y c - \mathcal{B}_z b}{\sqrt{\varepsilon'}} \right), \\ Y = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial |a\mathcal{F}|}{\partial y} - \frac{\mathcal{B}_z a - \mathcal{B}_x c}{\sqrt{\varepsilon'}} \right), \\ Z = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial |a\mathcal{F}|}{\partial z} - \frac{\mathcal{B}_x b - \mathcal{B}_y a}{\sqrt{\varepsilon'}} \right) \end{cases}$$

et la loi d'Ohm s'écrira en régime quelconque

$$(69) \quad \rho u = X - \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \varphi_x, \dots,$$

comme pour un système en repos. Continuons, d'autre part, d'appeler *induction électrique* le vecteur

$$(70) \quad (\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y, \mathbf{B}_z) = (X, Y, Z) + 4\pi\varepsilon(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C});$$

on a, d'après (67) et (17),

$$\left| \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} \right| = -\varepsilon \Delta V + \left| \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} \right| - 4\pi\varepsilon \mathbf{E}$$

et comme, d'après (42),

$$(71) \quad \Delta V = -4\pi(e + \mathbf{E}),$$

il vient

$$(72) \quad \left| \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} \right| = 4\pi\varepsilon e + \left| \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} \right|.$$

Lorsque le milieu est parfaitement doux et isotrope, nous continuerons d'admettre qu'on a comme pour les milieux en repos

$$(73) \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = k(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}),$$

k étant le coefficient de polarisation diélectrique au point considéré; les égalités (70) donnent alors, comme pour les milieux en repos, $\mathbf{B} = \mathbf{K}\mathbf{H}$, \mathbf{H} étant le champ électrique et $\mathbf{K} = \mathbf{1} + 4\pi\varepsilon k$ le pouvoir inducteur spécifique.

L'égalité (71) devient ainsi, d'après (73) et (67),

$$K\Delta V = -4\pi \left(e - k \left| \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} \right| \right),$$

c'est-à-dire d'après (61)

$$(74) \quad K\Delta V + 4\pi e + 4\pi k \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + |\mathfrak{F} \Delta a| + 2\partial_1 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + 2\partial_4 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + 2\partial_3 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} + g_1 \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \right) + g_2 \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right) + g_3 \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} \right) \right] = 0.$$

16. Comparaison avec les équations de Hertz. — On déduit aisément de (68) et (58) les trois équations

$$(75) \quad \sqrt{\varepsilon'} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial (\mathfrak{B}_x b - \mathfrak{B}_y a)}{\partial y} - \frac{\partial (\mathfrak{B}_z a - \mathfrak{B}_x c)}{\partial z} \right], \dots$$

Ces équations coïncident avec le premier groupe des équations de Hertz. On déduit de même de (64) les trois équations

$$(76) \quad \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \left(\Delta F - \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \right), \dots;$$

d'où, en remplaçant les seconds membres par leurs valeurs données par (48) et en tenant compte de (16'),

$$(77) \quad \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \left\{ -4\pi \left[u + \frac{\partial A}{\partial t} + a \left| \frac{\partial A}{\partial x} \right| + \frac{\partial (Ab - Ba)}{\partial y} - \frac{\partial (Ca - Ac)}{\partial z} \right] + \mathcal{Q} + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} + a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} + c \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right\}, \dots,$$

équations qui correspondent au second groupe de Hertz.

Cela posé, remarquons que la deuxième ligne de chaque second membre est négligeable vis-à-vis de la première. En effet, la première ligne du second membre écrit comprend le terme

$$-4\pi \left(\frac{\partial A}{\partial t} + a \frac{\partial A}{\partial x} + b \frac{\partial A}{\partial y} + c \frac{\partial A}{\partial z} - B \frac{\partial a}{\partial y} - C \frac{\partial a}{\partial z} \right),$$

qui, dans l'hypothèse d'isotropie et d'après (73) et (68), se compose de deux parties, dont la première, constituée au moyen du potentiel électrique, est

$$4\pi\epsilon k \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} + a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} + c \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right).$$

La deuxième ligne du second membre écrit de (77) est donc négligeable vis-à-vis de l'expression ci-dessus, puisque, d'après l'hypothèse de Faraday-Mossotti⁽¹⁾, $4\pi\epsilon k$ est un nombre très grand par rapport à l'unité.

Remarquons, en outre, que les fonctions \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} définies par (49) et deux autres formules analogues s'annulent en même temps que la déformation du milieu considéré. Si donc nous considérons un système qui se meut sans déformation, les équations (77) se réduisent très sensiblement à

$$(78) \quad \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} = -4\pi \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\epsilon'} \left[u + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + a \left| \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} \right| + \frac{\partial (\mathfrak{A}b - \mathfrak{B}a)}{\partial y} - \frac{\partial (\mathfrak{C}a - \mathfrak{A}c)}{\partial z} \right], \dots$$

Mais, d'après l'hypothèse de Faraday-Massotti, (70) et (73), on a très sensiblement

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \frac{(\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z)}{4\pi\epsilon},$$

de sorte qu'en posant

$$(79) \quad e_v = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left| \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} \right|,$$

quantité que Hertz a appelée *densité de l'électricité vraie*, les équations (78) s'écrivent

$$(80) \quad \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} = -4\pi \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\epsilon'} \left\{ u + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial t} + ae_v + \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{\partial (\mathfrak{B}_x b - \mathfrak{B}_y a)}{\partial y} - \frac{\partial (\mathfrak{B}_z a - \mathfrak{B}_x c)}{\partial z} \right] \right\}, \dots$$

C'est précisément le second groupe des équations de Hertz. En résumé, nos équations coïncident dans tous les cas avec le premier groupe de Hertz et très sensiblement avec le second groupe, pour les milieux isotropes dont le mouvement s'effectue sans déformation.

⁽¹⁾ L. ROY, *loc. cit.*, p. 79.

Revenons aux équations générales (76). Si on les dérive respectivement par rapport à x, y, z et qu'on les ajoute membre à membre, on est manifestement conduit à une identité; il en est donc de même des équations (77), qui en sont la conséquence immédiate. Autrement dit, le flux du tourbillon du champ magnétique à travers une surface fermée arbitraire tracée à l'intérieur d'un des corps continus du système est nul, de sorte que nos équations satisfont à ce que H. Poincaré appelle le principe de la conservation de l'électricité⁽¹⁾.

Effectuons maintenant la même opération sur les équations (80) de Hertz; il vient d'après (79)

$$\left| \frac{\partial(u + ae_r)}{\partial x} \right| + \frac{\partial e_r}{\partial t} = 0,$$

d'où, en retranchant de (13'),

$$(81) \quad \left| \frac{\partial(e - e_r)a}{\partial x} \right| + \frac{\partial(e - e_r)}{\partial t} = 0.$$

Nous n'aboutissons donc plus à une identité, car la densité de l'électricité vraie e_r ne coïncide généralement pas avec la densité réelle de l'électricité e ⁽²⁾; on a en effet, d'après (72) et (79),

$$e_r = e + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left| \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right|,$$

de sorte que (81) ne sera une identité que si la divergence de (ξ_x, ξ_y, ξ_z) est identiquement nulle, c'est-à-dire, d'après (61), que si le milieu se meut sans déformation. Nous retrouvons ainsi les conditions de validité du second groupe de Hertz. C'est seulement dans le cas des mouvements sans déformation que les équations de Hertz satisfont au principe de la conservation de l'électricité.

17. Comparaison avec les équations de M. Lorentz. — Les équations auxquelles nous sommes parvenus ne sont pas immédiatement comparables aux équations aux moyennes de M. Lorentz, parce que le champ et l'induction électriques et magnétiques n'ont pas la même signification dans les deux théories. Nous allons donc rechercher à quelles équations nous serions conduits, si nous adoptons pour les grandeurs ci-dessus les définitions de M. Lorentz.

(1) H. POINCARÉ, *Électricité et Optique*, 2^e édition, p. 387.

(2) Cette circonstance nous paraît avoir échappé à H. Poincaré, qui a cru pouvoir conclure d'un calcul équivalent au nôtre que les équations de Hertz satisfont au principe de la conservation de l'électricité.

On sait qu'aux relations (63) entre le champ et l'induction magnétiques, M. Lorentz substitue les suivantes

$$(82) \quad \mathcal{B}'_x = \mathcal{X}_0 + 4\pi\varepsilon' \mathcal{A}, \dots$$

($\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0, \mathcal{Z}_0$) étant le champ magnétique dans l'éther, assimilé à un solide lié aux axes de coordonnées $Oxyz$, qui dès lors cessent d'être arbitraires. Nous devons donc calculer ce champ, non plus par (64), mais par les formules

$$(83) \quad \mathcal{X}_0 = -\varepsilon' \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} - \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial z} \right), \dots,$$

$\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_0$ étant ce que deviennent les fonctions (40) quand on y annule a, b, c et leurs dérivées, c'est-à-dire les secondes lignes; d'où il résulte que

$$(84) \quad \left| \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial x} \right| = 0.$$

Si l'on tient compte de ce que

$$\Delta \mathcal{V} = 4\pi \left| \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \right|,$$

on voit qu'on a

$$\left| \frac{\partial \mathcal{B}'_x}{\partial x} \right| = 0,$$

ce qui est l'une des équations fondamentales de M. Lorentz, analogue d'ailleurs à (59). Soit alors

$$(85) \quad \mathcal{F}_0 = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \mathcal{F}_0 + \sqrt{\varepsilon'} \Phi, \dots$$

le potentiel vecteur total en un point de l'éther; de (82), (83), (85) et (53), on déduit les formules

$$(86) \quad \mathcal{B}'_x = -\sqrt{\varepsilon'} \left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial z} \right), \dots,$$

analogues à (58).

De même, M. Lorentz définit l'induction électrique par les égalités

$$(87) \quad \mathcal{B}'_x = \mathcal{X}_0 + 4\pi\varepsilon \mathcal{A}, \dots,$$

(X_0, Y_0, Z_0) étant le champ électrique dans l'éther, c'est-à-dire donné par

$$(88) \quad X_0 = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial t}, \dots$$

Mais on a, d'après (84), (52) et (85),

$$\left| \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial x} \right| = 0,$$

par suite

$$\left| \frac{\partial X_0}{\partial x} \right| = -\varepsilon \Delta V.$$

On a donc, d'après (87) et (71),

$$\left| \frac{\partial B'_x}{\partial x} \right| = 4\pi\varepsilon e,$$

autre équation fondamentale de M. Lorentz. Les équations (88) nous donnent ensuite, d'après (86), les trois équations

$$\sqrt{\varepsilon'} \left(\frac{\partial Z_0}{\partial y} - \frac{\partial Y_0}{\partial z} \right) = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \frac{\partial B'_x}{\partial t}, \dots,$$

c'est-à-dire le premier groupe des équations de M. Lorentz.

Jusqu'ici la concordance est complète; mais nous allons voir qu'elle ne se poursuit pas en ce qui concerne le second groupe correspondant à nos équations (77). Nous avons en effet, d'après (83) et (84), les trois équations

$$(89) \quad \frac{\partial \tilde{z}_0}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{J}_0}{\partial z} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \Delta F_0, \dots$$

et, d'après (44), (46) et (26),

$$\Delta F_0 = -4\pi[u + v + (e + E)a] + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x},$$

soit, en remplaçant v par sa valeur (16'),

$$\Delta F_0 = -4\pi \left[u + \frac{\partial A}{\partial t} + ea + \frac{\partial(Ab - Ba)}{\partial y} - \frac{\partial(Ca - Ac)}{\partial z} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} \right].$$

Mais, d'après (87) et (88), on a

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \left(B'_x + \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial t} \right),$$

de sorte que les équations (89) s'écrivent finalement

$$\frac{\partial \mathcal{X}_0}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{Y}_0}{\partial z} = -4\pi \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \left[u + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial B'_x}{\partial t} + ea + \frac{\partial(Ab - Ba)}{\partial y} - \frac{\partial(Ca - Ac)}{\partial z} + \frac{\mathbf{A}}{4\pi\varepsilon\sqrt{2}} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial t^2} \right], \dots$$

Ces équations coïncideraient avec le second groupe de M. Lorentz, si les derniers termes des crochets n'existaient pas; on voit, d'après (88), que ces termes seraient nuls, si le champ dans l'éther se réduisait au champ électrostatique.

18. Problème général de l'Électrodynamique. — Nous avons vu⁽¹⁾ que, dans le cas d'un système en repos, le problème général de l'Électrodynamique se ramène à la détermination du potentiel vecteur total. Le problème étant incomparablement plus complexe dans le cas actuel d'un système en mouvement, nous nous contenterons d'un simple aperçu, en nous bornant à former autant d'équations indéfinies que de fonctions inconnues et en laissant de côté la recherche des conditions aux limites.

On a tout d'abord, d'après (54), (55), (64), (65) et en supposant le milieu parfaitement doux, homogène et isotrope,

$$\mu \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \Delta F = \Delta \mathcal{F} + 4\pi\varepsilon' x \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x};$$

d'où, en substituant dans (47), la première des trois équations

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{F} + 4\pi\varepsilon' x \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = \mu \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left[-4\pi(u + v) + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} + a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} + c \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} + \dots \right], \\ \Delta \mathcal{G} + 4\pi\varepsilon' x \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} = \mu \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left[-4\pi(v + w) + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial y} + a \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} + \dots \right], \\ \Delta \mathcal{H} + 4\pi\varepsilon' x \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = \mu \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left[-4\pi(w + w) + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial z} + a \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + b \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + c \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \dots \right], \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ L. Roy, *loc. cit.*, p. 73.

les termes non écrits dans chaque crochet ne contenant que V et \mathbf{S} comme fonctions inconnues, ces fonctions n'y intervenant pas par des dérivées d'ordre supérieur à un pour V , à trois pour \mathbf{S} .

D'ailleurs u, v, w ; v, v, w sont des fonctions connues de $V, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ par l'intermédiaire des égalités (69), (68), (58), (16'), (73), de sorte que, le mouvement du système étant supposé donné, les équations (90) ne contiennent comme fonctions inconnues que $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, V, \mathbf{S}$, mais sont d'une extrême complication. On a, en outre, l'équation de continuité (13'), l'équation (41) entre V et \mathbf{S} et l'équation (74) entre $V, e, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$, soit un total de six équations indéfinies distinctes entre les six fonctions inconnues

$$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, V, \mathbf{S}, e.$$

Celles-ci étant supposées déterminées, toutes les autres grandeurs électriques et magnétiques s'en déduisent aisément.

CHAPITRE III

Les ondes électromagnétiques.

19. Préliminaires. — Supposons que le milieu soit le siège d'une onde électromagnétique persistante du second ordre en $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, V$, les vitesses et leurs dérivées restant continues. Cette onde sera du quatrième ordre en \mathbf{S} d'après (41), du premier ordre par rapport aux champs électrique et magnétique d'après (68) et (66), d'ordre zéro par rapport au courant de polarisation d'après (16') et (73), tandis que le courant de conduction restera continu d'après (69), ainsi que les dérivées partielles du premier ordre de \mathfrak{z} d'après (56).

Soient S et S' les positions de l'onde aux instants infiniment voisins t et $t + dt$, dt étant supposé positif; $\overline{MM'}$ = dn le segment intercepté par S et S' sur une demi-normale à S , de cosinus directeurs α, β, γ dirigée vers S' et issue d'un point $M(x, y, z)$ de S . On sait que la vitesse de propagation de l'onde au point M est par définition

$$\mathcal{V} = \frac{dn}{dt} \quad (4)$$

et que les discontinuités des dérivées secondes des fonctions $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, V$ sont caractérisées par quatre paramètres $\lambda, \mu, \nu, \varphi$ tels qu'on ait

$$(91) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} = \lambda \alpha^2, \quad \delta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2} = \lambda \beta^2, \quad \delta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z^2} = \lambda \gamma^2, \\ \delta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y \partial z} = \lambda \beta \gamma, \quad \delta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z \partial x} = \lambda \gamma \alpha, \quad \delta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial y} = \lambda \alpha \beta; \\ \delta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t \partial(x, y, z)} = -\lambda(\alpha, \beta, \gamma) \mathcal{V}, \quad \delta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2} = \lambda \mathcal{V}^2; \\ \dots\dots\dots, \quad \delta \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \varphi \mathcal{V}^2, \end{array} \right.$$

δ désignant la variation éprouvée par chaque quantité à la traversée de l'onde.

On déduit immédiatement de (91)

$$(92) \quad \delta \Delta \mathcal{F} = \lambda, \dots, \quad \delta \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial(x, y, z)} = (\alpha, \beta, \gamma) |\lambda z|.$$

(4) La lettre \mathcal{V} a été employée précédemment pour désigner le potentiel magnétique du système; mais, ce potentiel n'ayant plus à intervenir, aucune confusion n'est possible.

20. Application des équations générales. — Appliquons maintenant les équations (90); les termes non écrits restant continus à la traversée de l'onde d'après ce que nous avons dit de leur composition, il vient

$$(93) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \Delta \mathcal{F} &= \mu \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left[-4\pi \delta v + \delta \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} + a \delta \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + b \delta \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} + c \delta \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \right], \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

puisque l'on a, d'après (56),

$$\delta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (x, y, z)} = 0.$$

Cette dernière donne tout d'abord, d'après (92),

$$(94) \quad |\lambda \alpha| = 0,$$

ce qui exprime que la discontinuité (λ, μ, ν) est transversale. Calculons $\delta(v, v, w)$ et, pour cela, partons des formules (16), d'après lesquelles la discontinuité ne porte que sur les premiers termes des seconds membres; on a d'après (73)

$$(95) \quad \delta v = k \left(\delta \frac{\partial X}{\partial t} + a \delta \frac{\partial X}{\partial x} + b \delta \frac{\partial X}{\partial y} + c \delta \frac{\partial X}{\partial z} \right), \dots$$

Ceci nous ramène à calculer les discontinuités relatives au champ électrique et, d'après (68), celles relatives à l'induction ou au champ magnétiques. Les formules (58) et (91) nous donnent tout d'abord

$$(96) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial (x, y, z, t)} &= -\sqrt{\varepsilon'} (\beta \nu - \gamma \mu) (\alpha, \beta, \gamma, -\mathcal{U}), \\ \delta \frac{\partial \mathcal{B}_y}{\partial (x, y, z, t)} &= -\sqrt{\varepsilon'} (\gamma \lambda - \alpha \nu) (\alpha, \beta, \gamma, -\mathcal{U}), \\ \delta \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial (x, y, z, t)} &= -\sqrt{\varepsilon'} (\alpha \mu - \beta \lambda) (\alpha, \beta, \gamma, -\mathcal{U}). \end{aligned} \right.$$

Comme, d'autre part, on a d'après (68)

$$\delta \frac{\partial X}{\partial t} = -\varepsilon \delta \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} - \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \left(\delta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2} + \left| a \delta \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial t} \right| - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon'}} \delta \frac{\partial \mathcal{B}_y}{\partial t} + \frac{b}{\sqrt{\varepsilon'}} \delta \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial t} \right), \dots$$

il vient d'après (91)

$$(97) \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial(x, y, z, t)} = \left[-\varepsilon\varphi\alpha + \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}}(\mathcal{V} - |ax|)\lambda \right] (x, \beta, \gamma, -\mathcal{V}), \\ \frac{\partial Y}{\partial(x, y, z, t)} = \left[-\varepsilon\varphi\beta + \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}}(\mathcal{V} - |ax|)\mu \right] (x, \beta, \gamma, -\mathcal{V}), \\ \frac{\partial Z}{\partial(x, y, z, t)} = \left[-\varepsilon\varphi\gamma + \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}}(\mathcal{V} - |ax|)\nu \right] (x, \beta, \gamma, -\mathcal{V}). \end{cases}$$

Les égalités (58), (66), (96) et (97) montrent que la discontinuité du champ magnétique est caractérisée par le vecteur

$$(98) \quad \lambda' = \beta\nu - \gamma\mu, \quad \mu' = \gamma\lambda - \alpha\nu, \quad \nu' = \alpha\mu - \beta\lambda$$

et celle du champ électrique par le vecteur

$$(99) \quad (\lambda'', \mu'', \nu'') = -\varepsilon\varphi(x, \beta, \gamma) + \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}}(\mathcal{V} - |ax|)(\lambda, \mu, \nu),$$

d'où il résulte, d'après (94), que

$$(100) \quad |\lambda'x| = 0, \quad |\lambda\lambda'| = 0, \quad |\lambda''x| = -\varepsilon\varphi.$$

La discontinuité du champ magnétique est donc toujours transversale et normale à celle (λ, μ, ν) du potentiel vecteur total. Les vecteurs (λ, μ, ν) , (λ', μ', ν') forment ainsi avec la normale à l'onde un trièdre trirectangle. De plus, si la discontinuité $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ du champ électrique est transversale, elle est dirigée suivant celle (λ, μ, ν) du potentiel vecteur.

La première (95) devient alors

$$\delta u = -k \left[-\varepsilon\varphi\alpha + \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}}(\mathcal{V} - |ax|)\lambda \right] (\mathcal{V} - |ax|),$$

d'où, en remplaçant dans la première (93),

$$\frac{\lambda}{\mu \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}}} = 4\pi k \left[-\varepsilon\varphi\alpha + \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}}(\mathcal{V} - |ax|)\lambda \right] (\mathcal{V} - |ax|) - (\mathcal{V} - |ax|)\varphi\alpha.$$

Simplifions et remplaçons $4\pi\epsilon k$ par K en vertu de l'hypothèse de Faraday-Mossotti, nous obtenons la première des égalités

$$(101) \quad \left[\frac{\mathbf{A}}{\epsilon\sqrt{2}} (\mathcal{V} - |ax|)^2 - \frac{1}{K\mu\frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}}} \right] (\lambda, \mu, \nu) + (\mathcal{V} - |ax|) \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

d'où, en les multipliant respectivement par α, β, γ , en les ajoutant membre à membre et d'après (94),

$$(102) \quad (\mathcal{V} - |ax|) \varphi = 0.$$

21. Discussion. — L'égalité (102) nous montre qu'il existe deux solutions.

A. On vérifie (102) en faisant $\mathcal{V} = |ax|$, c'est-à-dire en supposant l'onde liée à la matière; les discontinuités (λ, μ, ν) , (λ', μ', ν') sont alors nulles d'après (101) et (98) et φ reste arbitraire. D'après (99), la discontinuité $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ du champ électrique est longitudinale. Ce cas correspond à celui des ondes stationnaires dans les milieux en repos.

B. On vérifie encore (102) en faisant $\varphi = 0$, c'est-à-dire en supposant la discontinuité du potentiel électrique d'un ordre supérieur à 2, de sorte que, d'après (99), le champ électrique est transversal. Dans ces conditions, pour que le vecteur (λ, μ, ν) ne soit pas nul, ce qui entraînerait la nullité des deux autres, il faut, d'après (101), que la quantité entre crochets soit nulle, c'est-à-dire qu'on ait

$$(103) \quad \mathcal{V} = |ax| \pm T,$$

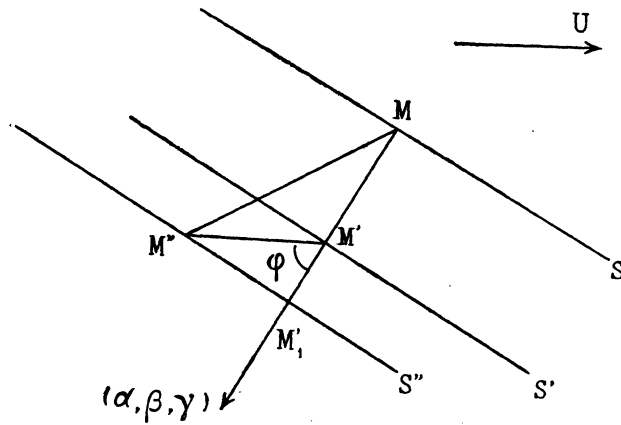
$$(104) \quad T = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\frac{\mathbf{A}^2}{2} K\mu}}$$

désignant la vitesse de propagation des ondes dans le milieu supposé en repos. La formule (103) exprime que les ondes électromagnétiques sont totalement entraînées par le milieu en mouvement.

22. Aberration de la lumière. — L'entraînement total des ondes électromagnétiques par le milieu en mouvement dans lequel s'effectue leur propagation, transporté dans le domaine de l'Optique, permet d'expliquer le phénomène de l'aberration astronomique aussi facilement que par la théorie de M. Lorentz.

Supposons tout d'abord les axes $Oxyz$ liés à l'éther et soient S, S' les positions d'une onde lumineuse émanée d'une étoile aux instants t et $t + dt$; le segment de

normale aux ondes $MM' = Tdt$ est la direction du rayon lumineux pour un observateur lié aux axes (figure).



Supposons maintenant les axes $Oxyz$ animés d'une vitesse de translation U par rapport à l'éther. Par rapport à ces axes, l'éther est animé d'une vitesse de translation égale et opposée à U et, comme les ondes sont complètement entraînées par le milieu dans lequel elles se propagent, l'onde qui était en S à l'instant t est en S'' à l'instant $t + dt$, S'' se déduisant de S' par la translation $-Udt$; de sorte que M' se trouve reporté en M'' , tel que $M''M' = Udt$. Le rayon lumineux prend ainsi, pour notre observateur lié aux axes, la direction MM'' , sa vitesse de propagation devenant $\frac{MM''}{dt}$, tandis que la vitesse \mathcal{V} de propagation de l'onde devient

$$\mathcal{V} = \frac{MM''}{dt} = T + U \cos \varphi,$$

ce qui est précisément la formule (103).

L'aberration de la lumière se trouve donc expliquée, mais il n'en est pas de même de l'expérience de Fizeau sur l'entraînement partiel des ondes lumineuses par la matière en mouvement, qui est incompatible avec la formule (103). Ce désaccord, auquel aboutissait déjà la théorie de Hertz, était à prévoir, puisque l'éther ne joue aucun rôle spécial dans la théorie que nous avons développée. Par contre, cette théorie, étant indépendante de tout repère privilégié, a l'avantage d'expliquer de soi-même le résultat négatif de l'expérience de M. Michelson, sans être obligé de modifier la notion de temps.

TABLE DU MÉMOIRE

	Pages
INTRODUCTION.....	199
CHAPITRE I. — Le courant électrique.	
1. Préliminaires.....	203
2. Variations des cosinus directeurs d'un élément linéaire lié à la matière.....	204
3. Variations des cosinus directeurs de la normale à un élément de surface lié à la matière.....	205
4. Dilatation superficielle.....	205
5. Équation indéfinie de continuité du courant de conduction.....	206
6. Équation superficielle de continuité du courant de conduction.....	207
7. Courant de polarisation.....	208
8. Courant linéaire.....	211
9. Courant de convection et courant total.....	212
CHAPITRE II. — Les équations fondamentales de l'Électrodynamique.	
10. Potentiel vecteur électrique.....	214
11. Propriétés du potentiel vecteur électrique.....	216
12. Potentiel vecteur magnétique.....	221
13. Potentiel vecteur total et force électromotrice totale d'induction.....	223
14. Induction et champ magnétiques.....	225
15. Champ et induction électriques.....	227
16. Comparaison avec les équations de Hertz.....	229
17. Comparaison avec les équations de M. Lorentz.....	231
18. Problème général de l'Électrodynamique.....	234
CHAPITRE III. — Les ondes électromagnétiques.	
19. Préliminaires.....	236
20. Application des équations générales.....	237
21. Discussion.....	239
22. Aberration de la lumière.....	239