ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

TONG VAN DUC

Forme canonique sur le dual du fibré transverse

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 7, nº 2 (1985), p. 169-177
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1985_5_7_2_169_0>

Annales Faculté des Sciences Toulouse
Vol VII, 1985, P 169 à 177

FORME CANONIQUE SUR LE DUAL DU FIBRE TRANSVERSE

Tong Van Duc (1)

(1) Laboratoire de Mathématiques, Université de Grenoble I, Institut Fourier B.P. 74 38402 St Martin d'Hères Cédex.

Résumé : On se propose d'étudier l'algèbre de Lie des champs de vecteurs qui laissent invariante la forme canonique sur le dual du fibré transverse d'un feuilletage. Dans le cas où le feuilletage est défini par une submersion, on montre que cette algèbre de Lie est complète et que son premier espace de cohomologie de Chevalley a pour dimension un.

Summary : We study the Lie algebra of vector fields which leaves the canonical form on the dual of the transverse bundle invariant. If the foliation is defined by a submersion, we prove that this Lie algebra is complete and that the dimension of its first space of Chevalley cohomology is one.

Soit M une variété différentiable connexe, paracompacte, de dimension n et de classe C^∞. Tous les éléments considérés sont supposés de classe C^∞. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de *codimension* q défini par un atlas $\mathcal{A}=\{U, x^u, x^a\}$ ($u,v,... = 1,...,n-q$; $a,b,... = 1,...,q$) dont les fonctions de transition vérifient $\dfrac{\partial x^a}{\partial x^u} = 0$. Si $x \in U$, domaine d'une carte locale, la plaque de x, dans U est la composante connexe de x dans la trace sur U de la feuille passant par x. On dira qu'un ouvert U de M est simple si le feuilletage $\mathcal{F}_U$ induit sur U par $\mathcal{F}$ est simple, i.e. si $\mathcal{F}_U$ est défini par une submersion $\Gamma : U \to V$ à fibres connexes. Lorsqu'il s'agit de l'expression locale d'un élément quelconque, on utilisera toujours les coordonnées locales dans des cartes adaptées au feuilletage.

Soient Q le fibré transverse et L l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents aux feuilles de $\mathcal{F}$. Si X est un champ de vecteurs sur M, on notera $\overline{X}$ la section de Q définie par X. On adopte le vocabulaire suivant relatif au feuilletage $\mathcal{F}$. Une forme ω sur M est dite transverse si $i_X\omega = 0 \quad \forall X \in L$; ω est basique si $i_X\omega = i_X d\omega = 0 \quad \forall X \in L$. Un champ de vecteurs X sur M est dit feuilleté si Xf est basique pour toute fonction basique f sur M. Soient $L_{\mathcal{F}}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs feuilletés et $\ell_{\mathcal{F}} = L_{\mathcal{F}}/L$. Comme L est un idéal de $L_{\mathcal{F}}$, $\ell_{\mathcal{F}}$ est une algèbre de Lie dont les éléments sont appelés champs transverses.

Un champ feuilleté X a pour expression locale :

$$X = X^u(x^u,x^a)\frac{\partial}{\partial x^u} + X^a(x^a)\frac{\partial}{\partial x^a} \tag{1}$$

celle du champ transverse associé $\overline{X}$ est :

$$\overline{X} = X^a(x^a)\frac{\overline{\partial}}{\partial x^a} \tag{2}$$

où $\left(\dfrac{\overline{\partial}}{\partial x^a}\right)$ est une base locale de Q.

Soit (Q^*,p,M) le dual du fibré transverse. Le module des sections de Q^* peut être identifié à celui des 1-formes transverses. Dans une carte adaptée (U,x^u,x^a), un élément de Q^* a pour expression locale $\omega = z_a dx^a$. On prendra (x^u,x^a,z_a) comme coordonnées locales dans $p^{-1}(U)$ et on obtient ainsi sur Q^* un atlas dont les fonctions de transition sont de la forme :

$$x^{u'} = x^{u'}(x^u,x^a)\ ,\quad x^{a'} = x^{a'}(x^a)\ ,\quad z_{a'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}\, z_a\,.$$

PROPOSITION. Q^* *est muni d'un feuilletage* $\mathcal{F}^*$ *dont les feuilles sont des revêtements des feuilles de* $\mathcal{F}$.

Preuve. Les feuilles de $\mathcal{F}^*$ sont localement définies par $x^a = c^{te}$, $z^a = c^{te}$. Soit U le domaine d'une carte locale qui est simple pour le feuiletage $\mathcal{F}$. Alors $p^{-1}(U)$ est simple pour $\mathcal{F}^*$. Soit F^* une feuille de $\mathcal{F}^*$ et $F = p(F^*)$ sa projection sur M. Comme $F^* \cap p^{-1}(U)$ est une réunion de plaques, $F \cap U$ est une réunion de plaques. Donc F est une feuille de $\mathcal{F}$. Si F_U est une plaque de $F \cap U$, $p^{-1}(F_U)$ est une réunion de plaques dont chacune est difféomorphe à F_U. Donc (F^*,p,F) est un revêtement.

Soit X un champ de vecteurs feuilleté et φ_t son groupe local à un paramètre. Comme chaque φ_t est un automorphisme de feuilletage, $(\varphi_t)_*$ induit un automorphisme $(\overline{\varphi}_t)_*$ de Q et ${}^t(\overline{\varphi}_t)_*^{-1}$ est un automorphisme de Q^*. Soit $\widetilde{X}$ le champ de vecteurs associé au groupe local à un paramètre ${}^t(\overline{\varphi}_t)_*^{-1}$. $\widetilde{X}$ a pour expression locale

$$\widetilde{X} = X^u(x^u,x^a)\frac{\partial}{\partial x^u} + X^a(x^a)\frac{\partial}{\partial x^a} - \frac{\partial X^b}{\partial x^a}\, z_b\, \frac{\partial}{\partial z_a}\,. \tag{3}$$

Ainsi $\tilde{X}$ est un champ feuilleté pour le feuilletage $\mathcal{F}^*$. Soit $\tilde{L}_{\mathcal{F}}$ l'algèbre de Lie des relèvements des éléments de $L_{\mathcal{F}}$.

On remarque que si un champ de vecteurs est tangent aux feuilles de $\mathcal{F}$, son relèvement est tangent aux feuilles de $\mathcal{F}^*$. Par suite, le champ transverse $\bar{\tilde{X}} \in \ell_{\mathcal{F}^*}$ défini par le relèvement $\tilde{X}$ de X ne dépend que du champ transverse $\bar{X}$. On notera $\tilde{\bar{X}}$ le champ transverse $\bar{\tilde{X}}$ et $\tilde{\ell}_{\mathcal{F}}$ l'algèbre de Lie obtenue à partir de $\ell_{\mathcal{F}}$.

Sur Q* il existe une 1-forme θ qu'on appellera forme canonique et qui est définie par

$$\theta_{\omega}(A) = \omega(\overline{p_* A}) \qquad \forall\, \omega \in Q^* \quad \text{et} \quad \forall\, A \in T_{\omega}Q^*.$$

θ a pour expression locale

$$\theta = z_a dx^a.$$

Soit C le champ canonique sur Q*, son expression locale est $C = z_a \dfrac{\partial}{\partial z_a}$. On a

$$\text{(4)} \qquad i_C d\theta = \theta \;, \quad L_C\theta = \theta \;, \quad L_C d\theta = d\theta.$$

De l'expression locale de θ, on déduit la :

PROPOSITION. *Un champ de vecteurs* A *sur* Q* *est tangent aux feuilles de* $\mathcal{F}^*$ *si et seulement si*

$$i_A\theta = i_A d\theta = 0.$$

Soit L_θ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur Q* qui laissent invariante θ. Le fait qu'un champ de vecteurs

$$A = A^u \frac{\partial}{\partial x^u} + A^a \frac{\partial}{\partial x^a} + A^{a^*} \frac{\partial}{\partial z^a}$$

($a^*, b^*, \ldots = 1,\ldots,q$) appartient à L_θ se traduit par :

$$\frac{\partial A^a}{\partial x^u} z_a = 0 \;, \quad \frac{\partial A^a}{\partial z^b} z_a = 0 \;, \quad A^{a^*} = -\frac{\partial A^b}{\partial x^a} z_b \,.$$

Il en résulte qu'un tel champ A a pour expression locale :

$$\text{(5)} \qquad A = A^u(x^u, x^a, z_a) \frac{\partial}{\partial x^u} + A^a(x^a) \frac{\partial}{\partial x^a} - \frac{\partial A^b}{\partial x^a} z_b \frac{\partial}{\partial z_a}$$

et que

$$\text{(6)} \qquad \tilde{L}_{\mathcal{F}} \subset L_\theta \subset L_{\mathcal{F}^*}.$$

D'autre part, $L_\theta \cap \operatorname{Ker} \theta = L_*$, algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents aux feuilles de $\mathscr{F}$ *. On vérifie facilement que L_* est un idéal de L_θ . Par ailleurs, on remarque que $L_\theta/L_* \subset \widetilde{\mathfrak{L}}_{\mathscr{F}}$ et que l'application $P : L_\theta \to \widetilde{\mathfrak{L}}_{\mathscr{F}}$ ainsi définie est surjective d'après (6). D'où le

THEOREME 1. *La suite* $0 \to L_* \to L_\theta \to \widetilde{\mathfrak{L}}_{\mathscr{F}} \to 0$ *est exacte.*

On remarque que, d'après (4), l'application $A \to [C,A]$ de L_θ dans elle-même est une dérivation qui n'est pas intérieure.

THEOREME 2. *Toute dérivation de* L_θ *est de la forme* $A \to [B,A]$ *où* $B \in L_{\mathscr{F}^*}$ *. Par suite, toute dérivation de* L_θ *est locale.*

Preuve. Soit D une dérivation de L_θ et soir $A \in L_*$. On peut écrire

$$A = \Sigma\, [A',A'']$$

avec $A', A'' \in L_*$ puisque $L_* = [L_*,L_*]$ d'après [3] . Par suite,

$$DA = \Sigma\, [DA,A'] + \Sigma\, [A',DA] \in L_* .$$

Donc $D_{|L_*}$ est une dérivation de L_* et d'après [3] , il existe $B \in L_{\mathscr{F}^*}$ tel que $D_{|L_*}$ est l'application : $A' \to [B,A']$, $\forall\, A' \in L_*$. Soient $A \in L_\theta$ et $A' \in L_*$, on a :

$$D[A,A'] = [DA,A'] + [A,L_BA'] = L_B[A,A']$$

$$= [L_BA,A'] = [L_BA,A'] + [A,L_BA'] .$$

Donc

$$[(D - L_B)A,A'] = 0, \qquad \forall\, A' \in L_* .$$

Il en résulte que $DA = L_BA$.

Dans la suite, on suppose que le feuilletage $\mathscr{F}$ est défini par une submersion $\pi : M \to N$. Alors $\theta = (\widetilde{\pi})^*(\theta_N)$ où $\widetilde{\pi}$ est l'application de Q dans T*N induite par π et θ_N est la forme canonique sur T*N.

D'autre part, tout élément de L_θ est projetable sur N et on a la suite exacte :

$$0 \to L_* \to L_\theta \to \widetilde{\chi(N)} \to 0 \tag{7}$$

où $\widetilde{\chi(N)}$ désigne le relèvement sur T*N du module $\chi(N)$ des champs de vecteurs sur N.

THEOREME 3. $L_\theta = [L_\theta, L_\theta]$.

Preuve. $\ell_{\mathcal{F}}$ peut être identifié à $\chi(N)$ qui est égale à son algèbre de Lie dérivée. Par suite, $\widetilde{\ell}_{\mathcal{F}} = [\widetilde{\ell}_{\mathcal{F}}, \widetilde{\ell}_{\mathcal{F}}]$. Soit $A \in L_\theta$. On a :

$$P(A) = \Sigma\,[\widetilde{\widetilde{X}}, \widetilde{\widetilde{Y}}] = \Sigma\,[\overline{\widetilde{X}}, \overline{\widetilde{Y}}] = \Sigma\,\overline{[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]}$$

où $X, Y \in L_{\mathcal{F}}$. Donc :

$$A = \Sigma\,[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] + \Sigma\,[A', A'']$$

avec $A', A'' \in L_*$.

Soit U le domaine d'une carte locale adaptée au feuilletage. On choisira U de la forme W X V où V est le domaine d'une carte locale de la variété différentiable N. Soit $L_\theta(U)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $p^{-1}(U)$ qui laissent invariante la restriction de θ à $p^{-1}(U)$.

Soit $B \in L_\theta(U)$ et $X = (\pi \circ p)^*(B)$. On posera $X = X^a \dfrac{\partial}{\partial x^a}$ et $B = (A, \widetilde{X})$ où $A \in L_*$ et $\widetilde{X} = X^a \dfrac{\partial}{\partial x^a} - \dfrac{\partial X^a}{\partial x^b} z_b \dfrac{\partial}{\partial z_a}$.

Si $B_1 = (A_1, \widetilde{X}_1)$ et $B_2 = (A_2, \widetilde{X}_2)$ sont deux éléments de $L_\theta(U)$, on a :

$$[B_1, B_2] = ([A_1, A_2] + [\widetilde{X}_1, A_2] + [A_1, \widetilde{X}_2],\ [\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2]). \tag{8}$$

THEOREME 4. *Soit* D *une dérivation de* $L_\theta(U)$. *Il existe un élément unique* B_0 *et une constante unique* k *tels que* $D(B) = [B_0 + kC, B]$, $\forall\, B \in L_\theta(U)$.

Preuve. D induit des applications linéaires P,Q,R,S telles que :

$$D(A, \widetilde{X}) = (P(A) + Q(\widetilde{X}),\ R(A) + S(\widetilde{X})).$$

Le fait que D est une dérivation implique, d'après (8) que P,Q,R,S vérifient les équations suivantes :

$$P[A_1, A_2] = [P(A_1), A_2] + [A_1, P(A_2)] + [R(A_1), A_2] + [A_1, R(A_2)]$$

$$Q[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2] = [Q(\widetilde{X}_1), \widetilde{X}_2] + [\widetilde{X}_1, Q(\widetilde{X}_2)]$$

$$R[A_1, A_2] = 0$$

$$S[\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2] = [S(\widetilde{X}_1), \widetilde{X}_2] + [\widetilde{X}_1, S(\widetilde{X}_2)]$$

$$P[\widetilde{X}_1, A_2] = [Q(\widetilde{X}_1), A_2] + [S(\widetilde{X}_1), A_2] + [\widetilde{X}_1, P(A_2)]$$

$$R[\widetilde{X}_1, A_2] = [\widetilde{X}_1, R(A_2)].$$

Puisque L_* est égale à son algèbre de Lie dérivée, on a R = 0. Les équations précédentes deviennent :

a) $P[A_1,A_2] = [P(A_1),A_2] + [A_1,P(A_2)]$

b) $S[\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2] = [S(\widetilde{X}_1),X_2] + [\widetilde{X}_1,S(\widetilde{X}_2)]$

c) $P[\widetilde{X},A] \;\; = [S(\widetilde{X}),A] + [\widetilde{X},P(A)] + [Q(\widetilde{X}),A]$

d) $Q[\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2] = [Q(\widetilde{X}_1),\widetilde{X}_2] + [X_1,Q(\widetilde{X}_2)]$.

Les équations a) et b) montrent que P et S sont respectivement des dérivations de L_* et de $\widetilde{\chi(N)}$. D'après [3] et [4] , il existe un élément unique A_0 de $L_{\mathscr{F}*}$ et un élément unique X_0 de $\chi(N)$ tels que :

$$P(A) = [A_0,A] \qquad \forall\, A \in L_*$$

et

$$S(\widetilde{X}) = [\widetilde{X}_0,\widetilde{X}] \qquad \forall\, X \in \chi(N).$$

L'équation c) devient :

$$[A_0,[\widetilde{X},A]] = [[\widetilde{X}_0,\widetilde{X}],A] + [\widetilde{X},[A_0,A]] + [Q(\widetilde{X}),A].$$

Il en résulte que :

$$[Q(\widetilde{X}),A] = [[A_0 - X_0 ,\widetilde{X}],A] \qquad \forall\, A \in L_*.$$

Par suite

$$Q(\widetilde{X}) = [A_0 - \widetilde{X}_0,\widetilde{X}].$$

On va chercher une relation entre A_0 et $\widetilde{X}_0$ en tenant compte du fait que Q est à valeurs dans L_* .

On pose :

$$A_0 = A_0^v(x^u,x^a,z_a)\,\frac{\partial}{\partial x^v} + A_0^b(x^a,z_a)\,\frac{\partial}{\partial x^b} + A_0^{b*}(x^a,z_a)\,\frac{\partial}{\partial z_b}$$

$$X_0 = X_0^b(x^a)\,\frac{\partial}{\partial x^b},\quad \widetilde{X}_0 = X_0^b\,\frac{\partial}{\partial x^b} - \frac{\partial X_0^b}{\partial x^a}\,z_b\,\frac{\partial}{\partial z_a}$$

• pour $X = \dfrac{\partial}{\partial x^a}$, $\widetilde{X} = \dfrac{\partial}{\partial x^a}$, on trouve $\dfrac{\partial(A_0^b - X_0^b)}{\partial x^a} = 0 \quad \dfrac{\partial\left(A_0^{b*} + \dfrac{\partial X^a}{\partial x^b} z_a\right)}{\partial x^a} = 0.$

Par suite, $A_0^b = X_0^b + C^b(z_a)$, $A_0^{b*} = -\dfrac{\partial X^a}{\partial x^b} z_a + K^b(z_a).$

• Pour $X = x^b \dfrac{\partial}{\partial x^a}$, $\widetilde{X} = x^b \dfrac{\partial}{\partial x^a} - z_a \dfrac{\partial}{\partial z_b}$, on trouve :

$$C^b = 0\,, \quad \frac{\partial K^c}{\partial z^b} = 0 \quad \text{si } c \neq b, \quad K^a = \frac{\partial K^b}{\partial z_b} z_a\,.$$

On en déduit que $K^a = kz_a$ où k est une constante. Ainsi, on a :

$$A_0 = \widetilde{X}_0 + kC + A'_0 \quad \text{où} \quad A'_0 \in L_*$$

$$Q(\widetilde{X}) = [kC + A'_0\,,\widetilde{X}] = [A'_0,\widetilde{X}] \quad \text{car} \quad [C,\widetilde{X}] = 0,$$

$$P(A) = [\widetilde{X}_0 + kC + A'_0,A]\,.$$

Enfin,

$$D(A,\widetilde{X}) = ([A'_0,A] + [\widetilde{X}_0,A] + [A'_0,\widetilde{X}] + [kC,A]\,, [\widetilde{X}_0,X]\,).$$

Si l'on pose $B_0 = [A'_0,\widetilde{X}_0]$, on obtient :

$$D(B) = [B_0 + kC,B]\,.$$

On rappelle que si L est une algèbre de Lie, la cohomologie de Chevalley de L est définie de la façon suivante :

- les k-cochaînes sont des applications k-linéaires et alternées de L^k dans L ;
- le cobord δc d'une k-cochaîne c est défini par :

$$\delta c(X_0,\dots,X_k) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k} (-1)^i\, c(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_k)$$
$$+ \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant k} (-1)^{i+j}\, c([X_i,X_j],\widetilde{X}_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k).$$

Les 0-cochaînes sont des éléments de L et les 1-cochycles sont des dérivations de L.

THEOREME 5. *Toute dérivation de* L_θ *est de la forme :* $A \to [B+kC,A]$ *où* $B_0 \in L_\theta$ *et* k *est une constante. Le premier espace de cohomologie de Chevalley* $H^1(L_\theta\ ;\ L_\theta)$ *de* L_θ *a pour dimension* un.

Preuve. Soit D une dérivation de L_θ . Pour tout domaine U d'une carte locale adaptée, D induit une dérivation D_U de $L_\theta(U)$ de la façon suivante :

si $A \in L_\theta(U)$ et $\omega \in p^{-1}(U)$, $D_U(A)(\omega) = D(A')(\omega)$ où A' est un champ de vecteurs sur Q* qui coïncide avec A dans un voisinage de ω. D_U est bien défini d'après le théorème 3. En vertu du théorème 4, il existe $B_U \in L_\theta(U)$ et une constante k_U tels que $D_U(A) = [B_U+kC_U,A]$, $\forall\ A \in L_\theta(U)$. Soit U' le domaine d'une autre carte locale adaptée tel que $U \cap U' \neq \phi$. Comme D_U et $D_{U'}$ coïncident sur $p^{-1}(U \cap U')$, il en est de même de B_U et $B_{U'}$, et $k_U = k_{U'}$. Il existe donc sur Q* un champ de vecteurs B tel que $B_{|U} = B_U$ et une constante k telle que $k_{|U} = k_U$. Comme pour tout $A \in L_\theta$, $D(A)_{|U} = D_U(A_{|U})$, on a $D(A) = [B+kC,A]$.

REFERENCES

[1] TONG VAN DUC. *«Structure presque-transverse».* J. Diff. Geometry, 14 (1979), 215-219.

[2] A. LICHNEROWICZ. *«Sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs».* Comment. Math. Helvetici 39 (51), 343-368.

[3] A. LICHNEROWICZ. *«Algèbres de Lie attachées à un feuilletage».* Ann. Fac. Sc. Toulouse, 1 (1979), 45-76.

[4] F. TAKENS. *«Dérivations of vector fields».* Comp. Math. 26 (1973), 95-99.

(Manuscrit reçu le 3 mai 1985)