

DÉSIRÉ RAZAFY ANDRIAMAMPIANINA

**Le p-pliage de papier**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5<sup>e</sup> série*, tome 10,  
n° 3 (1989), p. 401-414

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1989\\_5\\_10\\_3\\_401\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1989_5_10_3_401_0)

© Université Paul Sabatier, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Le $p$ -pliage de papier

DÉSIRÉ RAZAFY ANDRIAMAMPIANINA<sup>(1)</sup>

**RÉSUMÉ.** — Soit  $p$  un entier  $\geq 2$ . Le  $p$ -pliage est un procédé mécanique qui engendre des suites infinies sur un alphabet fini  $A$ , appelées suites de  $p$ -pliage.

Dans cet article, nous généralisons les propriétés déjà connues pour  $p = 2$ . Nous décrivons aussi la relation entre les suites de  $p$ -pliage et d'autres suites arithmétiques.

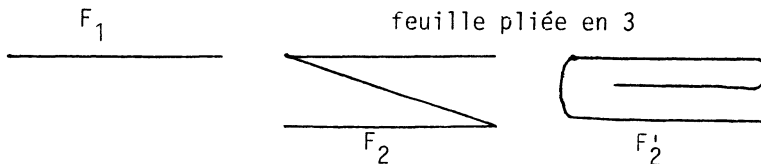
**ABSTRACT.** — Let  $p$  be an integer  $\geq 2$ . The  $p$ -paperfolding is a mechanical procedure which generates infinite  $p$ -paperfolding sequences on a finite set of symbols  $A$ .

In this paper we generalize the properties previously known for  $p = 2$ . We also describe the connection between the  $p$ -paperfolding sequences and other arithmetic sequences.

### I. Introduction

Soit  $p$  un entier  $\geq 2$ . Le  $p$ -pliage de papier est un procédé mécanique qui engendre des suites infinies sur un alphabet fini  $A$ ; ces suites sont appelées suites de  $p$ -pliage.

Commençons par décrire le 3-pliage, le 2-pliage ayant été étudié dans plusieurs papiers, notamment dans [11], [16], [17]. Soit  $F_1$  l'état initial de la feuille de papier. On a deux façons de faire le 3-pliage suivant le dessin :

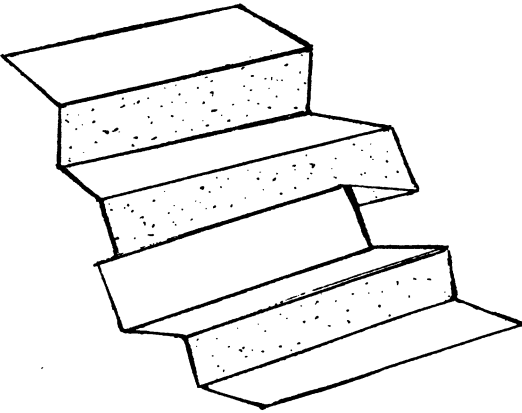


Pour fixer les idées, considérons par exemple la 1<sup>ère</sup> façon. Soit  $F_2$  l'état

<sup>(1)</sup> Etablissement d'Enseignement Supérieur des Sciences, Service des Mathématiques, B.P. 906 Antananarivo 101, Madagascar.

de la feuille après la première étape;  $F_2$  a pour longueur le tiers de celle de  $F_1$ ; on peut recommencer l'opération avec  $F_2$ , et ainsi de suite. Si on déplie la feuille, on observe des plis rentrants et sortants. Si on note 0 un pli rentrant et 1 un pli sortant, voici les observations faites si on déplie après chaque étape.

<i>étapes</i>	<i>observations</i>
1	10
2	10110010
3	10110010110110010010110010



*feuille dépliée après 2 étapes*

Si on suppose la feuille de papier indéfiniment pliable, on obtient alors une suite infinie de 0 et de 1, qui est une suite de 3-pliage.

Faisons maintenant quelques rappels.

Soit  $A$  un alphabet fini. On désigne par  $A^n$  l'ensemble des mots de longueur  $n$  construits sur  $A$  pour  $n$  entier  $> 0$ ; par convention  $A^0 = \{V\}$  où  $V$  désigne le mot vide. On note  $A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$  et  $A^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des mots de longueur infinie. Soit  $\sigma$  une involution de  $A$  différente de l'identité :

$$\begin{aligned} \sigma : A &\rightarrow A \\ a &\mapsto \sigma(a) = \bar{a}. \end{aligned}$$

Si  $u = u(1)u(2)\dots u(n) \in A^n$ , on pose :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \overline{u(1)}\overline{u(2)}\dots\overline{u(n)} \text{ et} \\ u &= u(n)u(n-1)\dots u(1) \text{ (transposé de } u\text{)}. \end{aligned}$$

Soit  $u \in A^*$ ; on note  $|u|$  la longueur de  $u$ ; le mot  $u_k$ , formé par les  $k$  premières lettres de  $u$  ( $k \leq |u|$ ) est appelé facteur gauche de  $u$ ; par convention  $u_0 = V$ .

De la manière habituelle on définit une distance  $\delta$  sur  $A^*$  en posant  $\delta(u, u') = (\max\{k + 1; u_k = u'_k\})^{-1}$ , pour  $u, u' \in A^*$ . Le complété de  $A^*$  pour la topologie définie par cette distance est  $A^* \cup A^{\mathbb{N}}$ .

Dans cet article, l'alphabet  $A$  sera choisi à 2 ou  $(2p - 2)$  éléments suivant le contexte. Ainsi :

dans le paragraphe II, on établit l'automaticité d'une suite de  $p$ -pliage avec l'alphabet  $\{0, 1\}$ ; dans le paragraphe III, on étudie les propriétés analytiques avec l'alphabet  $\{-1, 1\}$ ; le paragraphe IV est consacré à l'étude de la multiplicativité et des relations avec d'autres suites, l'alphabet étant  $\{1, \dots, p - 1, \dots, 2p - 1\}$ .

## II. Le $p$ -pliage suivant une instruction

Dans ce paragraphe, l'alphabet est  $\{0, 1\}$  et l'involution définie par :  $\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$ . Autrement dit  $\bar{x} = 1 - x$ .

### 1. — Définitions générales

**DÉFINITION .** — Soit  $p$  un entier  $\geq 2$  et  $\varepsilon = \varepsilon(1)\varepsilon(2)\dots\varepsilon(p - 1)$  un élément de  $A^{p-1}$ . On définit l'opérateur  $p_\varepsilon$  sur  $A^*$  en posant :  $p_\varepsilon(V) = \varepsilon$ , et pour tout mot  $u$  de  $A^*$  tel que  $u = u(1)u(2)\dots u(n)$ ,  $p_\varepsilon(u) = \varepsilon u(1)^t \bar{\varepsilon} u(2) \dots u(n) \varepsilon'$

$$\text{où } \varepsilon' = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } n \text{ est pair} \\ \bar{\varepsilon} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

L'opérateur  $P_\varepsilon$  s'appelle le  $p$ -pliage suivant l'instruction  $\varepsilon$ .

**Remarque.** — Soit  $P_\varepsilon^n$  la puissance  $n^{\text{ième}}$  de l'opérateur  $P_\varepsilon$ . La suite  $\{P_\varepsilon^n(V)\}_{n \geq 1}$  converge vers un mot infini noté  $\{u(n)\}_{n \geq 1}$ .

**DÉFINITION .** — La suite  $\{u(n)\}_{n \geq 1}$  s'appelle la suite de  $p$ -pliage suivant l'instruction  $\varepsilon$ .

### 2. — Le $p$ -pliage et les suites $p$ -automatiques

Pour ce qui concerne les  $p$ -automates finis et les  $p$ -substitutions, ainsi que la démonstration du théorème qui va suivre, on pourra consulter [1], [8], [9].

THÉORÈME .— Pour une suite  $\{u(n)\}_{n \geq 1}$ , à valeurs dans  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) Elle est  $p$ -automatique (engendrée par un  $p$ -automate fini)
- 2) Elle est l'image d'un point fixe d'une  $p$ -substitution.
- 3) Les sous-suites de la forme  $n \rightarrow u(p^k n + a)$ ,  $k \geq 0$ ,  $0 \leq a \leq p^k - 1$  sont en nombre fini.

Si  $p$  est premier, ces conditions sont équivalentes à

- 4) La série formelle  $f(X) = \sum_{n>0} u(n)X^n$  est algébrique sur le corps  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(X)$  des fractions rationnelles modulo  $p$ .

PROPOSITION .— La suite de  $p$ -pliage  $\{u(n)\}_{n \geq 1}$  est caractérisée par les relations :

$$\begin{aligned} u(2pn + r) &= u(r), 1 \leq r \leq p - 1, n \geq 0 \\ u(2pn + p + r) &= 1 - u(p - r) \\ u(p^n) &= u(n) \end{aligned}$$

Elle est  $p$ -automatique.

*Preuve.*— La caractérisation de la suite est claire d'après les définitions; pour la  $p$ -automaticité, on pourra par exemple utiliser la condition (3) du théorème; les détails sont laissés au lecteur.

### 3. — Equation fonctionnelle.

On va donner l'équation vérifiée par la série formelle  $f(X) = \sum_{n>0} u(n)X^n$ .

Les relations qui définissent la suite  $\{u(n)\}_{n \geq 1}$  permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{r=1}^{p-1} \left( \sum_{n \geq 0} u(2pn + r)X^{2pn+r} + \sum_{n \geq 0} u(2pn + p + r)X^{pn+p+r} \right) \\ &\quad + \sum_{n>0} u(n)X^{pn} \\ &= \sum_{r=1}^{p-1} \left( u(r)X^r \sum_{n \geq 0} (X^{2p})^n + (1 - u(p - r))X^{p+r} \sum_{n \geq 0} (X^{2p})^n \right) \\ &\quad + \sum_{n>0} u(n)(X^p)^n \end{aligned}$$

On obtient alors l'équation (E) :

$$(1(X^{2p})f(X^p) - (1 - X^{2p})f(X) + \sum_{r=1}^{p-1} (u(r)X^r + (1 - u(p - r))X^{p+r}) = 0.$$

*Remarques.* —

(1) L'équation (E) permet de démontrer comme dans le cas  $p = 2$  que si  $\alpha$  est un nombre algébrique avec  $0 < |\alpha| < 1$ , alors le nombre  $\sum_{n=1}^{\infty} u(n)\alpha^n$  est transcendant; ce résultat subsiste même si  $\{u(n)\}_{n \geq 1}$  est une suite de  $p$ -pliage du paragraphe III.

(2) Dans le cas où  $p$  est premier, l'équation (E) s'écrit

$$(1 - X^{2p})f^p(X) - (1 - X^{2p})f(X) + \sum_{r=1}^{p-1} (u(r)X^r + (1 - u(p-r))X^{p+r}) = 0$$

et dont les solutions sont :  $j + f(X), 0 \leq j \leq p - 1$ .

### III. Propriétés analytiques

L'alphabet est  $\{-1, 1\}$  et l'involution définie par :  $\bar{1} = -1, -\bar{1} = 1$ .

#### 1. — Définition et conséquences immédiates

DÉFINITION . — Soit  $\{\varepsilon^{(n)}\}_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de  $A^{p-1}$  ( $p$  entier  $\geq 2$ ).

Une suite de  $p$ -pliage suivant l'instruction  $\{\varepsilon^{(n)}\}_{n \geq 1}$  est un mot infini adhérent (au sens de la topologie définie sur  $A^* \cup A^{\mathbb{N}}$ ) à la suite de mots

$\left\{ \prod_{j=1}^n p_{\varepsilon^{(j)}}(V) \right\}_{n \geq 1}$ , où  $V$  désigne la mot vide et

$\prod_{j=1}^n p_{\varepsilon^{(j)}} = p_{\varepsilon^{(n)}} \circ p_{\varepsilon^{(n-1)}} \circ \dots \circ p_{\varepsilon^{(1)}}$ ,  $\circ$  étant la composition des applications; une suite de  $p$ -pliage ainsi définie sera encore notée  $u = \{u(n)\}_{n \geq 1}$ .

*Remarques.* — Soit  $T$  l'opérateur de  $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$  dans lui-même tel que si  $u = \{u(n)\}_n \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$  alors  $Tu = \{u(pn)\}_n$ .

Si  $u$  est une suite de  $p$ -pliage alors :

(1) elle est caractérisée par les deux conditions

$$u(pn + r) = u(r)(-u(r) \cdot u(p - r))^n \text{ pour } 1 \leq r \leq p - 1, n \geq 0$$

et  $Tu$  est encore une suite de  $p$ -pliage.

(2) elle est déterminée par ses  $(p-1)$ -sous-suites  $\{u(p^n r)\}_{n \geq 0}$ ,  $1 \leq r \leq p-1$ .

PROPOSITION . — Une suite de  $p$ -pliage n'est pas ultimement périodique.

*Preuve.* — Supposons que  $\{u(n)\}_n$  soit ultimement périodique; sa période serait de la forme  $p^a \cdot (pb + r)$  avec  $a, b \in \mathbf{N}$  et  $r$  un nombre entier tel que  $1 \leq r \leq p-1$ . Il existe donc un entier  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $u(n + p^a(pb + r)) = u(n)$ . En particulier si  $n$  est de la forme  $n = p^{a+1} \cdot m$  :

$$u(p^a \cdot (p(m + b) + r)) = u(p^{a+1} \cdot m) \quad \text{pour } m \geq m_0.$$

Mais la suite  $n \rightarrow T^a u(n) = u(p^a \cdot n)$  est aussi une suite de  $p$ -pliage, donc :

$$u(p^a \cdot r)(-u(p^a \cdot r) \cdot u(p^a \cdot (p - r)))^{m+b} = u(p^{a+1} \cdot m).$$

On distingue deux cas :

(1) si  $-u(p^a \cdot r) \cdot u(p^a \cdot (p - r)) = 1$ ,

la suite  $m \rightarrow u(p^{a+1} \cdot m)$  est constante, d'où une contradiction (car c'est un pliage).

(2) si  $-u(p^a \cdot r) \cdot u(p^a \cdot r) = -1$ , alors  $u(p^{a+1} \cdot m) = (-1)^{m+b} \cdot u(p^a \cdot r)$ .

En considérant successivement  $p$  pair, puis  $p$  impair, on arrive à la même contradiction, ce qui achève la preuve.

## 2. — Analyse harmonique des suites de $p$ -pliage

Une suite  $u = \{u(n)\}_n$  appartient à l'espace de Marcinkiewicz si la quantité  $\|u\| = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left( \sum_{n < N} |u(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$  (on l'appelle alors la norme de  $u$ ).

Les coefficients de Fourier de  $u$  sont définis par :

$$\widehat{u}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} u(n) \exp(-2i\pi nx), \quad x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}, \text{ pourvu que la limite existe.}$$

Le spectre de  $u$  est l'ensemble au plus dénombrable  $Sp(u) = \{x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}; \widehat{u}(x) \neq 0\}$ .

La série de Fourier de  $u$  est

$$\sum_{x \in Sp(u)} \widehat{u}(x) \exp(2i\pi nx).$$

La suite  $u$  est presque périodique au sens de Besicovitch si

$$\|u\|^2 = \sum_{x \in Sp(u)} |\hat{u}(x)|^2 \quad (\text{relation de Parseval}).$$

PROPOSITION . — Si  $u = \{u(n)\}_{n \geq 1}$  est une suite de  $p$ -pliage, alors :

(1) le spectre de  $u$  est l'ensemble

$$Sp(u) = \{x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z} ; x = \frac{a}{2 \cdot p^{\nu+1}}, a \in \mathbf{Z}, \nu \geq 0\}$$

et tel que  $(\frac{a}{2}, p) = 1$  si  $a$  pair et  $(a, p) = 1$  si  $a$  impair}

(2)  $u$  est presque-périodique au sens de Besicovitch.

Preuve. — : On pose :

$$\begin{aligned} S_N^u(x) &= \sum_{n \leq N} u(n) \exp(-2i\pi nx) \\ &= \sum_{r=1}^{p-1} \sum_{n \leq N/p} u(pn+r) \exp(-2i\pi(pn+r)x) \\ &\quad + \sum_{n \leq N/p} u(pn) \exp(-2i\pi pn x) + 0(1) \\ &= \sum_{r=1}^{p-1} u(r) \sum_{n \leq N/p} (-u(r) \cdot u(p-r))^n \exp(-2i\pi(pn+r)x) \\ &\quad + \sum_{n \leq N/p} T u(n) \exp(-2i\pi pn x) + 0(1) \end{aligned}$$

Pour tout  $\ell \in \mathbf{N}$ , on pose :

$$\begin{aligned} I_\ell &= \{r; 1 \leq r \leq p-1 \text{ et } u(p^\ell \cdot r) \cdot u(p^\ell \cdot (p-r)) = -1\} \\ \text{et } I_\ell^c &= \{r; 1 \leq r \leq p-1 \text{ et } u(p^\ell \cdot r) \cdot u(p^\ell \cdot (p-r)) = 1\}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} S_N^u(x) &= \left( \sum_{r \in I_0} u(r) \exp(-2i\pi r x) \right) \left( \sum_{n \leq N/p} \exp(-2i\pi pn x) \right) \\ &\quad + \left( \sum_{r \in I_0^c} u(r) \exp(-2i\pi r x) \right) \left( \sum_{n \leq N/p} (-1)^n \exp(-2i\pi pn x) \right) \\ &\quad + S_{N/p}^{Tu}(px) + 0(1) \end{aligned}$$



Soit  $\chi$  et  $\chi'$  définies par :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } px \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } \chi'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } px + \frac{1}{2} \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} S_N^u(x) &= \left( \sum_{r \in I_0} u(r) \exp(-2i\pi r x) \right) \frac{N}{p} \chi(x) \\ &+ \left( \sum_{r \in I_0^c} u(r) \exp(-2i\pi r x) \right) \frac{N}{p} \chi'(x) \\ &+ S_{N/p}^{T_u}(px) + 0(1) \end{aligned}$$

Après  $k$  itérations, on obtient :

$$\begin{aligned} S_N^u(x) &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \left( \sum_{r \in I_\ell} u(p^\ell \cdot r) \exp(-2i\pi r p^\ell \cdot x) \frac{N}{p^{\ell+1}} \chi(p^\ell \cdot x) \right. \\ &+ \left. \sum_{r \in I_\ell^c} u(p^\ell \cdot r) \exp(-2i\pi r p^\ell \cdot x) \frac{N}{p^{\ell+1}} \chi'(p^\ell \cdot x) \right) \\ &+ S_{N/p^k}^{T_u^k}(p^k \cdot x) + 0(k). \end{aligned}$$

On choisit  $k = [\log N]$  (partie entière de  $\log N$ ); maintenant si on divise par  $N$  et qu'ensuite on fasse tendre  $N$  vers l'infini, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} S_N^u(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \sum_{r \in I_\ell} u(p^\ell \cdot r) \exp(-2i\pi r p^\ell \cdot x) \frac{\chi(p^\ell \cdot x)}{p^{\ell+1}} \right. \\ &+ \left. \sum_{r \in I_\ell^c} u(p^\ell \cdot r) \exp(-2i\pi r p^\ell \cdot x) \frac{\chi'(p^\ell \cdot x)}{p^{\ell+1}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \chi(p^\ell \cdot x) = \begin{cases} 1 & \text{si } p^{\ell+1} \cdot x = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{p^{\ell+1}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \chi'(p^\ell \cdot x) = \begin{cases} 1 & \text{si } p^{\ell+1} \cdot x + \frac{1}{2} = a \Leftrightarrow x = \frac{2a-1}{2 \cdot p^{\ell+1}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{donc } \hat{u}(x) = \begin{cases} \frac{1}{p^{\nu+1}} \sum_{r \in I_\nu} u(p^\nu \cdot r) \exp(-2i\pi r \frac{a}{p}) \\ \text{pour } x = \frac{a}{p^{\nu+1}} \text{ et } (a, p) = 1 \\ \frac{1}{p^{\nu+1}} \sum_{r \in I_\nu^c} u(p^\nu \cdot r) \exp\left(-2i\pi r \left(\frac{2a-1}{2p}\right)\right) \\ \text{pour } x = \frac{2a-1}{2 \cdot p^{\nu+1}}, (2a-1, p) = 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Ceci achève la preuve de la 1<sup>ère</sup> partie de la proposition.

Maintenant, d'une part  $\|u\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} |u(n)|^2 = 1$ ;

d'autre part

$$\begin{aligned}
 \sum_{x \in Sp(u)} |\hat{u}(x)|^2 &= \sum_{\{x; x = \frac{a}{p^{\nu+1}}\}} |\hat{u}(x)|^2 + \sum_{\{x; x = \frac{2a-1}{2 \cdot p^{\nu+1}}\}} |\hat{u}(x)|^2 \\
 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p^{2\nu+2}} \left( \sum_{a=0}^{p^{\nu+1}-1} \left( \left| \sum_{r \in I_{\nu}} u(p^{\nu} \cdot r) \cdot \exp(-2i\pi r \frac{a}{p}) \right|^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left| \sum_{r \in I_{\nu}^c} u(p^{\nu} \cdot r) \exp\left(-2i\pi r \left(\frac{2a-1}{2p}\right)\right) \right|^2 \right) \right) \\
 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p^{2\nu+2}} \left( \sum_{r, s \in I_{\nu}} u(p^{\nu} \cdot r) \cdot u(p^{\nu} \cdot s) \sum_{a=0}^{p^{\nu+1}-1} \right. \\
 &\quad \left. \exp(-2i\pi(r-s)\frac{a}{p}) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{r, s \in I_{\nu}^c} u(p^{\nu} \cdot r) u(p^{\nu} \cdot s) \sum_{a=0}^{p^{\nu+1}-1} \right. \\
 &\quad \left. \exp(-2i\pi(r-s)\left(\frac{2a-1}{2p}\right)) \right) \\
 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p^{2\nu+2}} \left( \sum_{r \in I_{\nu}} (u(p^{\nu} \cdot r))^2 + \sum_{r \in I_{\nu}^c} (u(p^{\nu} \cdot r))^2 \right) \\
 &\quad \cdot p^{\nu+1} = 1,
 \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la proposition.

PROPOSITION . — *Il existe un réarrangement de la série de Fourier de  $u$  qui converge simplement vers  $u$ .*

*Preuve.* — on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{x \in Sp(u)} \hat{u}(x) \exp(2i\pi n x) &= \sum_{\{x; x = \frac{a}{p^{\nu+1}}\}} \hat{u}(x) \exp(2i\pi n x) \\
 &\quad + \sum_{\{x; x = \frac{(2a-1)}{2 \cdot p^{\nu+1}}\}} \hat{u}(x) \exp(2i\pi n x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p^{\nu+1}} \left( \sum_{a=0}^{p^{\nu+1}-1} \left( \sum_{r \in I_{\nu}} u(p^{\nu} \cdot r) \exp(-2i\pi r \frac{a}{p}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \exp(2i\pi n \frac{a}{p^{\nu+1}}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{r \in I_{\nu}^c} u(p^{\nu} \cdot r) \exp(-2i\pi r \left( \frac{2a-1}{2p} \right)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \exp(2i\pi n \left( \frac{2a-1}{2 \cdot p^{\nu+1}} \right)) \right) \right)
 \end{aligned}$$

Considérons le réarrangement :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \sum_{r \in I_{\nu}} u(p^{\nu} r) \left( \frac{1}{p^{\nu+1}} \sum_{a=0}^{p^{\nu+1}-1} \exp(-2i\pi \left( \frac{r}{p} - \frac{n}{p^{\nu+1}} \right) a) \right) \right) \\
 &+ \exp(-i\pi \frac{n}{p^{\nu+1}}) \sum_{r \in I_{\nu}^c} u(p^{\nu} \cdot r) \exp(i\pi \frac{r}{p}) \left( \sum_{a=0}^{p^{\nu+1}-1} \exp(-2i\pi \left( \frac{r}{p} - \frac{n}{p^{\nu+1}} \right)) \right).
 \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{1}{p^{\nu+1}} \sum_{a=0}^{p^{\nu+1}-1} \exp(-2i\pi \left( \frac{r}{p} - \frac{n}{p^{\nu+1}} \right) a) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{r}{p} - \frac{n}{p^{\nu+1}} \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Mais  $\frac{r}{p} - \frac{n}{p^{\nu+1}} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \frac{r}{p} - \frac{n}{p^{\nu+1}} = b \Leftrightarrow r = \frac{n}{p^{\nu}} + b \cdot p$  et cela correspond à la valeur  $\nu = \nu_p(n)$  (le nombre de fois où  $p$  divise  $n$ ), à une seule valeur de  $r$  et une seule valeur de  $b$ .

Donc si

$$(1) \quad r \in I_{\nu_p(n)}$$

la valeur du réarrangement est

$$u(p^{\nu_p(n)} \cdot r) = u(p^{\nu_p(n)} \cdot \left( \frac{n}{p^{\nu_p(n)}} + b \cdot p \right)) = u(n + b \cdot p^{\nu_p(n)+1}) = u(n),$$

$$(2) \quad \text{si } r \in I_{\nu_p(n)}^c$$

elle est égale à

$$\exp(-i\pi \frac{n}{p^{\nu_p(n)+1}}) \cdot u(p^{\nu_p(n)} \cdot r) \exp(i\pi \frac{r}{p}) = (-1)^b \cdot u(n + b \cdot p^{\nu_p(n)+1}) = u(n),$$

ce qui achève la preuve.

#### IV Relations avec certaines suites

Dans ce paragraphe on revient au  $p$ -pliage à une seule instruction  $\varepsilon$ . On considère l'alphabet  $A = \{1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1\}$  considéré comme

sous-ensemble du groupe additif  $(\frac{\mathbb{Z}}{2p\mathbb{Z}}, +)$ . L'explication de cette nouvelle introduction est simple : si on plie une feuille de papier en " $p$ ", et si on la déplie, on observe exactement  $p - 1$  plis. On les numérote dans l'ordre  $1, 2, \dots, (p - 1)$ , sans se soucier qu'ils soient rentrants ou sortants. L'instruction est alors d'une manière naturelle le mot  $\varepsilon = 1, 2, \dots, (p - 1)$ .

On désigne toujours par  $u = \{u(n)\}_{n \geq 1}$  la suite de  $p$ -pliage. Les expressions suivantes sont alors claires.

$$u(2pn + r) = r \text{ pour } r = 1, 2, \dots, p - 1, p + 1, \dots, 2p - 1 \text{ et } n \geq 0$$

$$u(pn) = u(n) \text{ pour } n \geq 1.$$

### 1. — Multiplicativité

PROPOSITION . — Soit  $n \geq 1$  et  $\nu_p(n)$  le nombre de fois où  $p$  divise  $n$ ; alors

$$(1) \quad u(n) = \frac{n}{p^{\nu_p(n)}} \pmod{2p}$$

(2) Si  $p$  est premier, la suite  $u$  est complètement multiplicative :

$$u(m \cdot n) = u(m) \cdot u(n), \text{ pour } m \text{ et } n \text{ entiers } \geq 1.$$

Preuve. — Si on pose  $u'(n) = \frac{n}{p^{\nu_p(n)}} \pmod{2p}$ , alors :

$$\begin{aligned} u'(2pn + r) &= \frac{2pn + r}{p^{\nu_p(2pn+r)}} \pmod{2p} \text{ pour } r = 1, \dots, p - 1, p + 1, \dots, 2p - 1 \\ &= 2pn + r \pmod{2p} \\ &= r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } u'(pn) &= \frac{pn}{p^{\nu_p(pn)}} \pmod{2p} \\ &= \frac{n}{p^{\nu_p(n)}} \pmod{2p} = u'(n) \end{aligned}$$

Les deux suites  $u$  et  $u'$  vérifient les mêmes relations de récurrence donc elles sont égales.

Pour montrer (2), il suffit de remarquer que si  $p$  est premier  $\nu_p(m \cdot n) = \nu_p(m) + \nu_p(n)$ .

**2. — Suites de p-pliage et suite de Kakutani**

On pose  $\omega_p(n) = \frac{n}{p^{\nu_p(n)}} \pmod{p}$ ,  $r \geq 1$ , et soit  $\varphi$  l'application  $\{1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, p-1\}$  telle que  $\varphi(j) = \varphi(2p-j) = j$  pour  $1 \leq j \leq p-1$ .

PROPOSITION . — *La suite  $\{\omega_p(n)\}_{n \geq 1}$  est l'image de la suite de p-pliage  $\{u(n)\}_{n \geq 1}$  par l'application  $\varphi$ .*

*Preuve.* — Il suffit de remarquer que la suite  $\{\omega_p(n)\}_{n \geq 1}$  est définie par  $\omega_p(pn+r) = r$  pour  $r = 1, \dots, p-1, n \geq 0$  et  $\omega_p(pn) = \omega_p(n)$  pour  $n \geq 1$ .

*Remarque.* — Dans [12], Kakutani définit une suite  $\lambda$  en posant  $\lambda(n) = \omega_p(n!)$ .

Ce qui précède permet d'écrire que  $\lambda(n) = \psi(u(n!))$  pour  $n \geq 0$ .

**3. — Suite de p-pliage et transduction**

Contentons nous d'énoncer la proposition suivante; une preuve détaillée se trouve dans [2]; en ce qui concerne la notion de transduction on peut aussi consulter [6].

PROPOSITION . — *Soit  $X$  un alphabet fini; on suppose que sur  $X$  est définie une loi associative notée  $\cdot$ ; soit  $x = \{x(n)\}$  une suite sur  $X$ . On définit la suite  $y = \{y(n)\}$  par :*

$$\begin{aligned} y(1) &= x(0) \\ y(2) &= x(1) \cdot x(0) \\ &\dots\dots\dots \\ y(n) &= x(n-1) \dots x(0) \end{aligned}$$

*Si la suite  $x$  est q-automatique, la suite  $y$  est q-automatique.*

Les exemples suivants donnent une idée sur la nature spectrale de la suite  $y$  en terme de la suite  $x$ .

*Exemple.* — 1 Dans [10], les auteurs introduisent la suite  $\xi$  de la façon suivante : soit  $p$  un nombre premier  $\geq 3$ ; soit  $L$  une fonction logarithme de  $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, x)$  sur  $(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}, +)$ ; la suite  $\xi$  est définie par

$$\xi(n) = \exp\left(\frac{2i\pi}{p-1} L\omega_p(n!)\right) \text{ pour tout } n; \text{ ils montrent que } \xi \text{ est pseudo-aléatoire à mesure spectrale singulière.}$$

## Le $p$ -pliage de papier

D'autre part, si  $u$  est une suite de  $p$ -pliage, une application directe de la proposition précédente montre que la suite  $n \rightarrow u(n!)$  est  $p$ -automatique.

La suite  $\xi$  est l'image de  $u$  par transduction.

*Exemple.* — 2 [11]

Dans cet exemple on considère le 2-pliage alterné sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ ; on obtient exactement deux suites de pliage automatiques, l'une d'elles est par exemple :

01100011011100100110001001110...

On pose  $S(0) = 0$  et  $S(n) = S(n-1) + u(n)$ , la loi  $+$  étant définie par la table suivante :

$+$	0	1	2	3
0	3	1	2	3
1	0	2	3	0
2	1	3	0	1
3	2	0	1	2

Les premiers termes de la suite 2-automatique  $S$  sont :

030103230301210103010323212303...

Si on projette par  $\psi$  définie par  $\psi(0) = \psi(3) = 0$ ,  $\psi(1) = \psi(2) = 1$ , on obtient la suite de Rubin-Shapiro sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  :

000100100001110100010010111000...

Cette suite est pseudo-aléatoire et sa mesure spectrale est la mesure de Lebesgue [18].

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALLOUCHE (J.P.). — *Automates finis en théorie des nombres*, Expo. Math. **5**, 1987, p. 239-266.
- [2] ALLOUCHE (J.P.) and MENDES FRANCE (M.). — *Quasicrystal Ising Chain and Automata Theory*, *Journal of Stat. Physics*, vol. **42**, n°5/6, 1986.
- [3] ALLOUCHE (J.P.) and MENDES FRANCE (M.). — *Finite Automata and zero temperature quasicrystal Ising Chain*, *Journal de Physique*, Colloque **3**, supplément au n°7, tome **47**, Juillet 1986.

- [4] BASS (J.). — Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, *Bull. Soc. Math. France*, t. **87**, 1959, p. 1-69.
- [5] BASS (J.). — Espaces de Besicovitch, fonctions presque-périodiques, fonctions pseudo-aléatoires, *Bull. Soc. Math. France*, **91**, 1963, p. 39 à 61.
- [6] BERSTEL (J.). — *Transductions and context-free languages*, B.G. Teubner Stuttgart, 1979.
- [7] BERTRANDIAS (J.P.). — Espaces des fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre  $p$ , *Bull. Soc. Math. France*, Mémoire **5**, 1966, p. 3-106.
- [8] CHRISTOL (G.), KAMAE (T.), MENDES FRANCE (M.), RAUZY (G.). — Suites algébriques automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. France*, **108**, 1980, p. 401-419.
- [9] COBHAM (A.). — Uniform tag sequences, *Mathem. Syst. Theory* **6**, 1972, p. 164-192.
- [10] COQUET (J.), KAMAE (T.), MENDES FRANCE (M.). — Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France*, **105**, 1977, p. 369-384.
- [11] DAVIS (C.) and KNUTH (D.). — *Number representations and dragon curves I, II*, *J. recreational Math.*, vol. **3**, 1970, p. 61-81 et 133-149.
- [12] DEKKING (F.M.), MENDES FRANCE (M.) and VAN DER POORTEN (A.J.). — Folds! *Math. Intelligencer*, **4**, **3**, 1982, p. 130-138, **4**, **4**, 1982, p. 173-181 et 190-195.
- [13] KAKUTANI (S.). — Ergodic theory of shift transformations, "Proceeding of the 5th Berkeley symposium on mathematical statistics probability [1965-Berkeley]", vol. **2**, part. **2**, p. 405-414, Berkeley, University of California Press, 1967.
- [14] KAMAE (T.). — *Spectral properties of automaton - generating sequences*, non publié.
- [15] LOXTON (J.H.) and VAN DER POORTEN (A.J.). — Arithmetic properties of certain functions in several variables III, *Bull. Austr. Math. Soc.* **16**, 1977, p. 15-47.
- [16] MENDES FRANCE (M.). — "Principe de la symétrie perturbée", *Séminaire de Théorie des nombres*, Paris 1979-80, p. 77-98, (Séminaire Delange - Pisot - Poitou).
- [17] MENDES FRANCE (M.) and VAN DER POORTEN (A.J.). — Arithmetic and analytic properties of paper-folding sequences (dedicated to Mahler), *Bull. Austr. Math. Soc.* **24**, 1981, p. 123-131.
- [18] MENDES FRANCE (M.) et TENENBAUM (G.). — Dimension des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro, *Bull. Soc. Math. France* **109**, 1981, p. 207-217.
- [19] QUEFFLEC (M.). — Une nouvelle propriété des suites de Rudin-Shapiro, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble **37**, **2**, 1987, p. 115-138.

(Manuscrit reçu le 19 septembre 1988)

ptihp doc -x=0.5in -y=0.6in -R -m=1200 -ou=prn -s=14;