ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

REJEB HADIJI

Solutions positives de l’équation $-\Delta u = u^p + \mu u^q$ dans un domaine à trou

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome 11, nº 3 (1990), p. 55-71

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1990_5_11_3_55_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XI, n° 3, 1990

Solutions positives de l'équation $-\Delta u = u^p + \mu u^q$ dans un domaine à trou

REJEB HADIJI[(1)]

RÉSUMÉ. — Soient Ω un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\mu \in \mathbb{R}$, $1 \leq q < p = (N+2)/(N-2)$. Nous montrons que si Ω possède un petit trou alors le problème $-\Delta u = u^p + \mu u^q$ dans Ω, $u > 0$ dans Ω, $u = 0$ sur $\partial\Omega$, admet au moins une solution.

ABSTRACT. — This paper is concerned with the following non linear elliptic equation $-\Delta u = u^p + \mu u^q$ on Ω, $u > 0$ on Ω, $u = 0$ on $\partial\Omega$, where Ω is a domain in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ with a little hole, $\mu \in \mathbb{R}$, $1 \leq q < p = (N+2)/(N-2)$. We show that this problem has at least one solution.

1. Introduction

Soit Ω un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. On s'intéresse au problème d'existence d'une fonction u vérifiant l'équation elliptique non linéaire :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \mu u^q & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $\mu \in \mathbb{R}$; $1 \leq q < p$ et $p = (N+2)/(N-2)$, c'est-à-dire $p+1$ est l'exposant critique pour l'injection de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{p+1}(\Omega)$.

On rappelle que :

1) L'identité de Pohozaev (cf. [12]) appliquée à une solution de (1) donne

$$\mu\left(1 - \frac{N}{2} + \frac{N}{q+1}\right)\int_\Omega u^{q+1} = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x \cdot n)\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 .$$

(1) Laboratoire d'analyse numérique, Université Pierre et Marie Curie, Tour 55- 65, 5e étage, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05 (France)

Il en résulte que si Ω est strictement étoilé, alors pour tout $\mu \leq 0$ l'équation (1) n'a pas de solution.

2) Si Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $N > 3$, alors pour tout $\mu > 0$, l'équation (1) possède une solution; (cf. [4]).

3) Dans [6], J.M. Coron a montré que si $\mu = 0$ et si Ω est un domaine avec un petit trou alors l'équation (1) possède une solution.

4) Dans [8], R. Lewandowski a montré que si $\mu = 0$, et Ω est un ouvert borné régulier étoilé de $\mathbb{R}^N$, $N > 4$, contenant 0, et si u_ϵ est la solution de (1) (mise en évidence dans [6]) dans $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus B(0,\epsilon)$ alors, $|\nabla u_\epsilon|^2 \rightarrow S^{N/2}\delta_0$, où δ_0 est la mesure de Dirac au point 0, $B(0,\epsilon)$ et S seront définies dans la section 2.

5) Dans [13], O. Rey a montré que si $\mu = 0$ et Ω est un ouvert borné régulier privé de k boules centrées en x_i, $1 \leq i \leq k$, et de rayon d, alors pour tout i, $1 \leq i \leq k$, il existe pour tout d assez petit, une solution u de (1) qui se concentre autour de x_i, i.e. $|\nabla u_\epsilon|^2 \rightarrow S^{N/2}\delta_{x_i}$ au sens des mesures sur Ω.

6) Dans [1], A. Bahri et J.M. Coron ont montré que, dans le cas où $\mu = 0$ et Ω est ouvert tel que le groupe d'homologie $H_k(\Omega\,,\, {}^{Z}/_{2Z}) \neq 0$ pour au moins un entier k non nul, l'équation (1) possède une solution.

7) Dans [11], G. Mancini et R. Musina ont étudié le problème suivant : Trouver que $u \in K$ tel que $\int \nabla u\, \nabla(v-u) \geq \int u^p(v-u)$, $\forall\, v \in K$, K est l'ensemble des fonctions $u \in H_0^1(\Omega)$ telles que $u \geq 0$ presque partout dans Ω et $u \leq \psi$ dans C où C est un sous-ensemble fermé régulier de Ω. Dans ce travail on va s'inspirer de la technique utilisée dans [11].

8) Dans [4], H. Brezis et L. Nirenberg ont montré le théorème suivant. Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$. On distingue deux cas :
(i) si $3 < q < 5$, alors pour tout $\mu > 0$, l'équation (1) possède une solution;
(ii) si $1 < q \leq 3$, alors pour tout $\mu > 0$ assez grand, l'équation (1) possède une solution.
De plus si Ω est strictement étoilé alors, pour $\mu > 0$ assez petit, l'équation (1) n'a pas de solution.

Le résultat principal de notre travail est le suivant.

THÉORÈME 1. — *Il existe $\lambda > 1$ tel que si Ω vérifie la condition suivante : $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^N$, $\exists\, R_1 > 0$, $\exists\, R_2 > 0$, tels que :*

$$R_2 > \lambda R_1 \tag{2}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid R_1 \le |x - x_0| \le R_2\} \subset \Omega \tag{3}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_0| < R_1\} \not\subset \Omega \tag{4}$$

alors pour tout réel μ, l'équation (1) a au moins une solution.

2. Rappels et notations

Soit $B(a,d)$ (respectivement $\overline{B}(a,d)$) la boule ouverte (respectivement la boule fermée) de $\mathbb{R}^N$ de centre a et de rayon d.

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni de la norme $\|\nabla u\|_2$ et $|u|_r$ désigne la norme usuelle dans $L^r(\Omega)$, pour $r > 0$.

Considérons

$$S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int |\nabla u|^2}{\left(\int |u|^{p+1}\right)^{2/(p+1)}}$$

On sait (cf. [4]) que :

- S est la meilleure constante pour l'injection de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{p+1}(\Omega)$.
- S est indépendante du domaine Ω, S n'est jamais atteinte quand Ω est borné. En revanche S est atteinte sur $\mathbb{R}^N$ par la famille de fonctions définies par

$$u_{a,\epsilon}(x) = c_N \left[\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + |x-a|^2}\right]^{\frac{N-2}{2}} \tag{5}$$

  où c_N est une constante choisie afin que les fonctions $u_{a,\epsilon}$ soient solutions de

$$-\Delta u = u^p \quad \text{sur } \mathbb{R}^N .$$

On sait que $u_{a,\epsilon}$ se concentre autour de a quand ϵ tend vers 0, et on a :

$$\int |\nabla u_{a,\epsilon}|^2 = \int |u_{a,\epsilon}|^{p+1} = S^{N/2} .$$

L'outil essentiel est une variante du théorème d'Ambrosetti-Rabinowitz (voir par exemple [3]), dont l'énoncé est le suivant.

THÉORÈME A. — *Soit F une fonction de classe C^1 définie sur un espace de Banach X, et soit K un espace métrique compact. On note K^* un sous-ensemble de K non vide, différent de K, et fermé. On fixe $p^* \in C(K^*;X)$. On pose :*

$$P = \{p \in C(K;X) \mid p = p^* \text{ sur } K^*\}$$
$$c = \inf_{p \in P} \sup_{t \in K} F(p(t)) .$$

On suppose que pour tout p de P on a

$$\max_{t \in K} F(p(t)) > \max_{t \in K^*} F(p^*(t)) .$$

Alors il existe une suite $(u_n) \subset X$ telle que $F(u_n) \to c$ et $F'(u_n) \to 0$.

On considère la fonctionnelle

$$E(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \frac{1}{6}\int (u^+)^6 - \frac{\mu}{q-1}\int (u^+)^{q+1}$$

définie sur $H_0^1(\Omega)$.

Rappelons que l'on dit que E satisfait $(PS)_c$ sur $H_0^1(\Omega)$ si pour toute suite (u_n) d'éléments de $H_0^1(\Omega)$ avec $E(u_n) \to c$ et $E'(u_n) \to 0$, alors on peut extraire de la suite (u_n) une sous-suite convergente. On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME B. — *Soit (u_n) une suite sur $H_0^1(\Omega)$ vérifiant $E(u_n) \to c$ et $E'(u_n) \to 0$, alors quitte à extraire une sous-suite notée aussi (u_n), (u_n) est faiblement convergente vers une limite u dans $H_0^1(\Omega)$ et on a $E(u_n) = E(u) + ({}^k/_N)S^{N/2} + \mathrm{o}(1)$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.*

La preuve de ce théorème est contenue dans [14]; (voir aussi [5] et [2]).

Remarques

(a) On note que les points critiques non nuls de E correspondent aux solutions de l'équation (1).

(b) Dans ce qui suit on va supposer que $u = 0$ est la seule solution de (1) dans l'ensemble $\{u \in H_0^1(\Omega) \mid E(u) < ({}^1/_N)S^{N/2}\}$, et on va montrer que E possède une valeur critique dans $]({}^1/_N)S^{N/2}, ({}^2/_N)S^{N/2}[$; sous cette condition et d'après le théorème B on déduit que E vérifie la condition de $(PS)_c$ pour tout $c \in]({}^1/_N)S^{N/2}, ({}^2/_N)S^{N/2}[$.

3. Démonstration du théorème 1

Rappelons que le résultat est connu si $\mu > 0$ et $N > 3$ (cf. [4]). Nous distinguerons alors deux cas :

3.1 le cas $N = 3$ et $\mu \geq 0$,

3.2 le cas $N \geq 3$ et $\mu < 0$,

3.1. Le cas $N = 3$ et $\mu \geq 0$

Soit B la boule unité de $H_0^1(\Omega)$. On sait que B est métrisable pour la topologie faible. Soit (f_n) un sous-ensemble dense dans B. On pose $[\,u-v\,] = \sum({}^1/2^n)\langle f_n \mid u-v\rangle$; $[\,\cdot\,]$ est une métrique qui définit la topologie faible sur B. On note $E_\epsilon = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\| \leq 1 \text{ et } [\,u\,] \leq \epsilon\}$.

On a besoin des fonctions suivantes :

$$\Gamma : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \Gamma(u) = \int |\nabla u|^2 - \int (u^+)^6 - \mu \int (u^+)^{q+1}$$

$$F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}^3, \quad F(u) = S^{-3/2} \int x |\nabla u|^2 \, dx .$$

On a alors, en conséquence du lemme de concentration de P.L. Lions (cf. [9], [10]), le lemme suivant.

LEMME 1.— *Pour tout voisinage V de $\overline{\Omega}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$\textit{si } u \neq 0,\ \Gamma(u) = 0,\ u \in E_{2\epsilon},\quad E(u) \leq \frac{1}{3} S^{3/2} + 2\epsilon \quad \textit{alors } F(u) \in V .$$

Preuve.— On raisonne par l'absurde; supposons qu'il existe un voisinage V de Ω tel que, pout tout n, il existe $u_n \not\equiv 0$ vérifant $\Gamma(u_n) = 0$, $E(u_n) = ({}^1/3)S^{3/2} + o(1)$, $u_n \in E_{2/n}$ et $F(u_n) \notin V$. Le fait que u_n converge faiblement vers 0 dans $H_0^1(\Omega)$ entraîne que u_n tend vers 0 dans $L^{q+1}(\Omega)$. Posons

$$E^*(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{6} \int (u^+)^6 .$$

On a alors

$$E^*(u_n) = \frac{1}{3} S^{3/2} + o(1) .$$

On applique le théorème 2 de [6], on obtient, quitte à extraire une sous-suite, il existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ telle que

$$|\nabla u_n|^2 \to S^{3/2}\,\delta_{x_0} \quad (n \to \infty)\,,$$

où la convergence est la convergence vague des mesures sur $\overline{\Omega}$ et δ_{x_0} est la mesure de Dirac en x_0. Par conséquent $F(u_n) \to x_0 \notin V$, d'où une contradiction.

Soit $\varphi \in C^\infty\big(\mathbb{R}^3; [\,0\,,\,1\,]\big)$ telle que

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0 & \text{si } |x| \le \dfrac{1}{4} \text{ ou si } |x| \ge 2, \\ \varphi(x) = 1 & \text{si } \dfrac{1}{2} \le |x| \le \dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

et soit, pour tout $k \ge 1$, $\varphi_k \in C^\infty\big(\mathbb{R}^3; [\,0\,,\,1\,]\big)$ définie par :

$$\begin{cases} \varphi_k(x) = \varphi(kx) & \text{si } |x| < \dfrac{1}{4k} \\ \varphi_k(x) = \varphi\Big(\dfrac{x}{k}\Big) & \text{si } |x| \ge k, \\ \varphi(x) = 1 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On remarque que φ_k vérifie :

$$\begin{cases} \varphi_k(x) = 0 & \text{si } |x| \le \dfrac{1}{4k} \\ & \quad \text{et si } |x| \ge 2k, \\ \varphi_k(x) = 1 & \text{si } \dfrac{1}{2k} \le |x| \le \dfrac{3k}{2}\,. \end{cases}$$

On va paramétrer la famille de fonctions définie dans (5) par (t, σ) avec $t \in [\,0\,,\,1\,[$ et $\sigma \in \Sigma$, où Σ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

Posons alors

$$u_t^\sigma(x) = \left[\frac{1-t}{(1-t)^2 + |x - t\sigma|^2}\right]^{\frac{3}{2}}\,,$$

On voit facilement que $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_t^\sigma|^2$ et $\int_{\mathbb{R}^3} |u_t^\sigma|^6$ sont indépendants de $t \in [\,0\,,\,1\,[$ et $\sigma \in \Sigma$; de plus u_t^σ se concentre autour de σ quand σ tend vers 1. On a en outre (cf. [6]) :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_t^\sigma|^2 = S\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u_t^\sigma|^6\right)^{\frac{1}{3}}\,.$$

On va supposer que $R_1 \leq {}^1/4k_0$, $R_2 \geq 4k_0$, pour un certain k_0 qu'on fixera ultérieurement. On note alors que $\varphi_k u_t^\sigma \in H_0^1(\Omega)$. Posons

$$v_{t,k}^\sigma(x) = \frac{\left\|\varphi_k u_t^\sigma\right\|^{1/2}}{\left|\varphi_k u_t^\sigma\right|_6^{3/2}} (\varphi_k u_t^\sigma)(x) .$$

On a

$$v_{t,k}^\sigma \in H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \Gamma^*(v) = \int \left|\nabla v_{t,k}^\sigma\right|^2 - \int \left(v_{t,k}^\sigma\right)^6 = 0 .$$

Pour $r > 0$, soit

$$g(r) = E\left(r v_{t,k}^\sigma\right) = \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6}\right) \int \left|\nabla v_{t,k}^\sigma\right|^2 - \mu \frac{r^{q+1}}{q+1} \int \left(v_{t,k}^\sigma\right)^{q+1} .$$

On a :

$$r g'(r) = \Gamma\left(r v_{t,k}^\sigma\right) , \quad g(r) \to \infty \text{ quand } r \to -\infty ,$$
$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g(r) > 0 \quad \text{pour } r > 0 \text{ petit} , \quad g(1) < 0 .$$

On en déduit que g atteint son maximum en $r_{t,k}^\sigma$ noté r qui vérifie $\Gamma\left(r v_{t,k}^\sigma\right) = 0$ et $0 < r < 1$. On pose alors

$$w_{t,k}^\sigma = r v_{t,k}^\sigma .$$

LEMME 2.— *Les deux énoncés suivants sont vérifiés :*
(a) $\forall\, \delta > 0$, $\exists\, k_0 \geq 1$ *tel que* $(k \geq k_0) \Rightarrow$

$$\left(\forall\, \sigma \in \Sigma ,\ \ E\left(w_{t,k}^\sigma\right) \leq \frac{1}{3} S^{3/2} + \delta\right) \ ;$$

(b) $\forall\, \alpha > 0$, $\exists\, \eta > 0$ *tel que* $(\eta < t < 1) \Rightarrow$

$$\left(\forall\, k \geq 1 \text{ et } \sigma \in \Sigma ,\ \ E\left(w_{t,k}^\sigma\right) \leq \frac{1}{3} S^{3/2} + \alpha \text{ et } \left|F\left(w_{t,k}^\sigma\right) - \sigma\right| \leq \alpha\right) .$$

Preuve.— On a :

$$E\left(w_{t,k}^\sigma\right) = \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6}\right) \int \left|\nabla v_{t,k}^\sigma\right|^2 - \frac{\mu}{q+1} \int \left(w_{t,k}^\sigma\right)^{q+1} ,$$

et comme $0 < r < 1$, on déduit :

$$E\left(w_{t,k}^{\sigma}\right) \leq \frac{1}{3} \int \left|\nabla v_{t,k}^{\sigma}\right|^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\left\|\varphi_k u_t^{\sigma}\right\|^2}{\left|\varphi_k u_t^{\sigma}\right|_6^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

quantité qui tend vers $(1/3)S^{3/2}$ quand $k \to \infty$, uniformément par rapport à t dans $[\,0\,,\,1\,[$, d'où (a). D'autre part, quand $t \to 1$,

$$\int \left|\nabla v_{t,k}^{\sigma}\right|^2 = K_1 + \mathrm{O}(1-t)\,, \quad \text{avec } K_1 = \left|\nabla U\right|_2^2$$

$$\text{et } U(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\int \left(\varphi_k v_t^{\sigma}\right)^6\right)^{\frac{1}{3}} = K_2 + \mathrm{O}(1-t)\,, \quad \text{avec } K_2 = \left|U\right|_6^2.$$

D'où

$$E\left(w_{t,k}^{\sigma}\right) \leq \frac{1}{3}\, S^{3/2} + \mathrm{O}(1-t) \leq \frac{1}{3}\, S^{3/2} + \alpha$$

dès que t sera assez grand < 1.

Conséquences. — On peut supposer $x_0 = 0$. Fixons V un voisinage compact de $\overline{\Omega}$ ne contenant pas 0. Soit $\epsilon > 0$ correspondant à V comme dans le lemme 1, vérifiant $\sigma + \xi \neq 0$ pour $|\sigma| = 1$ et $|\xi| \leq \epsilon$. D'après le lemme 2, il existe $k_0 \geq 1$ et $t_0 \in]\,\eta\,,\,1\,[$ tels que :

$$E\left(v_{t,k_0}^{\sigma}\right) \leq \frac{2}{3}\, S^{3/2} - \epsilon\,, \quad \forall\, \sigma \in \Sigma\,,\ \forall\, t \in [\,0\,,\,1\,[\,,$$

$$E\left(v_{t,k_0}^{\sigma}\right) \leq \frac{1}{3}\, S^{3/2} + \epsilon \quad \text{et} \quad \left|F\left(w_{t_0,k_0}^{\sigma}\right) - \sigma\right| < \epsilon\,, \quad \forall\, \sigma \in \Sigma\,.$$

Notons $v_{t,k_0}^{\sigma} = w_t^{\sigma}$.

On fixe $\lambda > 1$, assez grand tel que l'on ait $E(\lambda w_t^{\sigma}) < 0$, $\forall\, \sigma \in \Sigma$, $\forall\, t \in [\,0\,,\,1\,[$. En vue d'appliquer le théorème A, on définit les ensembles K, K^* et la fonction p^* par :

$$\begin{aligned}
&K = [\,0\,,\,1\,] \times \overline{B}(0,1)\,,\\
&K^* = \partial K = [\,0\,,\,1\,] \times \partial\overline{B}(0,1) \cup \{0,1\} \times \overline{B}(0,1)\,;\\
&p^* : K \to H_0^1(\Omega)\\
&p^*(s, t\sigma) = \lambda s w_{t,t_0}^{\sigma}\,.
\end{aligned}$$

Pour conclure il reste à montrer le lemme suivant.

LEMME 3.— *On a :*

$$\sup_K E(p) \le \frac{1}{3} S^{3/2} + 2\epsilon , \quad \forall\, p \in P .$$

Admettons un instant la conclusion du lemme 3. On a alors

$$\max_{r>0} E\big(rw_t^\sigma\big) = E\big(w_t^\sigma\big) \le \frac{2}{3} S^{3/2} - \epsilon , \quad \forall\, \sigma \in \Sigma , \forall\, t \in [\,0\,,1\,[\,,$$
$$\max_{r>0} E\big(rw_{t_0}^\sigma\big) = E\big(w_{t_0}^\sigma\big) \le \frac{1}{3} S^{3/2} + \epsilon , \quad \forall\, \sigma \in \Sigma ,$$

$$\max_{\partial K} E(p^*) \ge \frac{1}{3} S^{3/2} + \epsilon \quad \text{et} \quad \sup_K E(p^*) < \frac{2}{3} S^{3/2} .$$

D'après le lemme 3 on a

$$\sup_K E(p) \ge \frac{1}{3} S^{3/2} + 2\epsilon > \frac{1}{3} S^{3/2} + \epsilon \ge \sup_{\partial K} E(p^*)$$

et

$$c = \inf_P \sup_K E(p) \in \Big]\frac{1}{3} S^{3/2} , \frac{2}{3} S^{3/2}\Big[.$$

On applique alors les théorèmes A et B, on obtient le théorème 1.

Revenons à la démonstration du lemme 3. En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe $p \in C(K; H_0^1)$ avec $p = p^*$ sur ∂K, et

$$E\big(p(s,\xi)\big) \le \frac{1}{3} S^{3/2} + 2\epsilon , \quad \forall\, (s,\xi) \in K .$$

Considérons l'application $G : K \to \mathbb{R}^4$, définie par

$$G(s,\xi) = \big(s\,,\ F\big(p(s,\xi)\big)\big) .$$

On va montrer :

$$\deg\Big(G\,,\ K\,,\ \big(\lambda^{-1}, a\big)\Big) = 1 . \tag{6}$$

où deg désigne le degré topologique.

L'application $H : [\,0\,,\,1\,] \times K \to \mathbb{R}^4$, définie par

$$H(t,s,\xi) = tG(s,\xi) + (1-t)(s,\xi) = \big(s\,,\ tF\big(p(s,\xi)\big) + (1-t)\xi\big)$$

est une homotopie entre G et Id_K. Il suffit de vérifier que $(\lambda^{-1}, a) \notin H(t, \partial K)$. Sinon il existe $(s, \xi) \in \partial K$ tel que $H(t, s, \xi) = (\lambda^{-1}, a)$, donc $s = \lambda^{-1}$ et $a = tF(p(\lambda^{-1}, \xi)) + (1-t)\xi = t(F(w_{t_0}^\sigma) - \xi) + \xi$. On en déduit que $\xi \in \Sigma$. Or $tF(p(\lambda^{-1}, \xi)) + (1-t)\xi = t(F(w) - \xi) + \xi \neq a$ car $|F(w_{t_0}^\sigma) - \sigma| < \epsilon$, d'où une contradiction.

Considérons les ensembles :

$$\begin{aligned}
K_1 &= \{(s,\xi) \in K \mid p(s,\xi) \in E_\epsilon\} \\
K^+ &= \{(s,\xi) \in K_1 \mid \Gamma(p(s,\xi)) > 0\} \cup \{(0,\xi)\} \\
K^- &= \{(s,\xi) \in K_1 \mid \Gamma(p(s,\xi)) < 0\} \\
K^0 &= \{(s,\xi) \in K_1 \mid \Gamma(p(s,\xi)) = 0\} .
\end{aligned}$$

On vérifie alors facilement

$$\text{si } (s,\xi) \in \partial K \text{ et si } 0 \le s \le \lambda^{-1}, \text{ alors } (s,\xi) \in K^+ \tag{7}$$

$$\text{si } (s,\xi) \in \partial K \text{ et si } \lambda^{-1} < s \le 1, \text{ alors } (s,\xi) \in K^- \tag{8}$$

$$(\lambda^{-1}, \sigma) \in K^0, \quad \forall\, \sigma \in \Sigma . \tag{9}$$

Pour $(s,\xi) \in K^0$, on a

$$\Gamma(p(s,\xi)) = 0, \quad p(s,\xi) \in E_{2\epsilon}, \quad p(s,\xi) \neq 0$$

et
$$E(p(s,\xi)) \le \frac{1}{3} S^{3/2} + 2\epsilon .$$

D'après le lemme 1, on déduit que :

$$F(p(s,\xi)) \in V .$$

Par conséquent

$$\forall\, (s,\xi) \in K^0, \quad F(p(s,\xi)) \neq a ,$$

d'où

$$(\lambda^{-1}, a) \notin G(K^0) = G\left(K_1 \setminus (K^+ \cup K^-)\right) ,$$

donc

$$\deg(G, K^+, (\lambda^{-1}, a)) + \deg(G, K^-, (\lambda^{-1}, a)) = \deg(G, K_1, (\lambda^{-1}, a)) . \tag{10}$$

On a alors :

$$\forall\, (s,\xi) \in K, \quad F(p(s,\xi)) = a \quad \Rightarrow \quad p(s,\xi) \in E_\epsilon . \tag{11}$$

En effet, sinon $a = F\big(p(s,\xi)\big)$ et $p(s,\xi) \notin E_\epsilon$, donc

$$|a| = \left|F\big(p(s,\xi)\big)\right| = S^{-3/2}\left\|p(s,\xi)\right\|^2 \int x \,\mathrm{d}\mu\,,$$

avec $\mathrm{d}\mu = \left|\nabla p(s,\xi)\right|^2/\left\|p(s,\xi)\right\|^2 \mathrm{d}x$. D'après le lemme 2, on a $\int x\,\mathrm{d}\mu \in \Omega$. On en déduit

$$|a| \geq c\epsilon^2 \left|\int x\,\mathrm{d}\mu\right| \geq c\epsilon^2 \inf_{y\in\Omega} |y|\,,$$

d'où une contradiction pour $|a|$ assez petit.

Ceci prouve que $(\lambda^{-1}, a) \notin G(K \setminus K_1)$ et par conséquent

$$\deg\big(G\,,\,K_1\,,\,(\lambda^{-1},a)\big) = \deg\big(G\,,\,K\,,\,(\lambda^{-1},a)\big) = 1\,. \tag{12}$$

On va montrer que :

$$\deg\big(G\,,\,K^+\,,\,(\lambda^{-1},a)\big) = 0\,, \tag{13}$$

$$\deg\big(G\,,\,K^-\,,\,(\lambda^{-1},a)\big) = 0\,. \tag{14}$$

Preuve de (13) et (14)

On fixe $R > \lambda^{-1}$; $y \in \mathbb{R}^4$, $|y| \geq R \Rightarrow y \notin G(K_1)$.

On définit le chemin $r(t)$ par $r(t) = \big(tR+(1-t)\lambda^{-1}\,,\,a\big)$, pour $t \in [\,0\,,\,1\,]$. On va montrer que $r(t) \notin G(\partial K^+)$. Sinon $\exists\ (s,\xi) \in \partial K^+$ avec

$$\big(Rt + (1-t)\lambda^{-1}\,,\,a\big) = \big(s\,,\,F\big(p(s,\xi)\big)\big)\,.$$

D'où

$$s = tR + (1-t)\lambda^{-1} \geq \lambda^{-1} \quad \text{et} \quad a = F\big(p(s,\xi)\big)\,.$$

Or $\forall\ (s,\xi) \in K^0$, on a $F\big(p(s,\xi)\big) \neq a$, on en déduit $(s,\xi) \notin K^0$. Donc d'après (7) on a $(s,\xi) \in \partial K \cap K^+$, ce qui entraîne que $s < \lambda^{-1}$ et ceci contredit $s \geq \lambda^{-1}$; d'où $r(t) \notin G(\partial K^+)$, donc $\deg\big(G\,,\,K^+\,,\,r(t)\big)$ est bien défini et ne dépend pas de t. Comme $(R,a) \notin G(K_1)$ on a :

$$\deg\big(G\,,\,K^+\,,\,(\lambda^{-1},a)\big) = \deg\big(G\,,\,K^+\,,\,(R,a)\big) = 0\,.$$

L'égalité (14) se démontre de la même façon en utilisant le chemin $q(t) = \big(-tR\,,\,(1-t)\lambda^{-1}\big)$ pour $t \in [\,0\,,\,1\,]$. On a $\deg\Big(G\,,\,K\,,\,\big(\lambda^{-1},q(t)\big)\Big)$ ne dépend pas de t, comme $(-R,a) \notin G(K_1)$ on conclut que :

$$\deg\big(G\,,\,K^-\,,\,(\lambda^{-1},a)\big) = \deg\big(G\,,\,K^-\,,\,(-R,a)\big) = 0\,.$$

De (7), (12), (13) et (14), on obtient une contradiction. D'où le lemme 3.

3.2. Le cas $N \geq 3$ et $\mu < 0$

Sans perdre de généralité on va supposer que $x_0 = 0$ et $R_2 = 1$. On pose $s = R_1$. On considère la fonction définie par

$$\psi(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}\int |u|^{p+1} - \frac{\mu}{q+1}\int |u|^{q+1} \tag{15}$$

pour $u \in H_0^1(\Omega)$, et on pose

$$H_0^1(\Omega)^+ = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u \geq 0 \text{ p.p.}\}.$$

On va utiliser un argument de [1] pour vérifier que $H_0^1(\Omega)^+$ est invariant par le flot associé à $-\psi$. Il en résulte que les points critiques de $\psi|_{H_0^1(\Omega)^+}$, correspondent aux solutions de (1).

Le flot associé à $-\psi$ est solution de l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = -\psi'(u) = \Delta u + |u|^{p-1}u + \mu|u|^{q-1}u \\ u(0) = u_0\,. \end{cases} \tag{16}$$

Si $u_0 \in H_0^1(\Omega)^+$ alors il existe une solution maximale u sur $[0\,,T[$ de l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \Delta u + (u^+)^p + \mu(u^+)^q \\ u(0) = u_0\,. \end{cases} \tag{17}$$

Si on montre que $u > 0$, alors u est une solution de (16) et notre assertion est prouvée. Montrons que $u > 0$; soit $s < T$, on multiplie (17) par u^- et on intègre, on en déduit que

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int (u^-)^2 = \int |\nabla u^-|^2,$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int (u^-)^2 \leq 0$$

et par conséquent

$$\int |u^-(s,u_0)|^2 = 0,$$

d'où le résultat.

Soit φ_s une fonction de "*cut-off*" définie comme dans [7] par

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[\min\left(2s\,,\ \frac{1+s}{2}\,,\ \frac{3+s}{4}\right)\right] \\ 0 & \text{si } t < 0 \text{ et si } t \geq 1\ . \end{cases}$$

On pose

$$v_{a,\epsilon,s}(x) = c\varphi_s\big(|x|\big)u_{a,\epsilon}(x)$$
$$v_{a,\epsilon}(x) = c\varphi_0\big(|x|\big)u_{a,\epsilon}(x)\,,$$

où

$$c = \frac{\big\|\nabla\varphi_s u_{a,\epsilon}\big\|^{(N-2)/2}}{\big|\varphi_s u_{a,\epsilon}\big|_{p+1}^{N/2}}\,.$$

On remarque alors que

$$\psi(v_{a,\epsilon,s}) = \frac{1}{N}\left[\frac{\int\big|\nabla\varphi_s u_{a,\epsilon}\big|^2}{\big(\int\big|\varphi_s u_{a,\epsilon}\big|^{p+1}\big)^{2/(p+1)}}\right]^{\frac{N}{2}} - \mu\int(v_{a,\epsilon,s})^{q+1}\,.$$

Il est facile de prouver les deux lemmes suivants; (cf. [7]).

LEMME 4.— *On a :*

$$\lim_{s\to 0}\big\|\nabla v_{a,\epsilon,s}\big\|_2^2 = \big\|\nabla v_{a,\epsilon}\big\|_2^2$$
$$\lim_{s\to 0}\big\|v_{a,\epsilon,s}\big\|_{p+1}^{p+1} = \big\|v_{a,\epsilon}\big\|_{p+1}^{p+1}$$
$$\lim_{s\to 0}\big\|v_{a,\epsilon,s}\big\|_{q+1}^{q+1} = \big\|v_{a,\epsilon}\big\|_{q+1}^{q+1}$$

uniformément par rapport à $|a| < 3/4 - d$ *($d > 0$ assez petit).*

LEMME 5.— *On a :*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{s\to 0}\psi(v_{a,\epsilon,s}) = \frac{1}{N}\,S^{N/2}$$

uniformément par rapport à $|a| \leq 3/4 - d$ *;*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{s\to 0}\left|F(v_{a,\epsilon,s}) - \frac{a}{2}\right| = 0$$

où $F(u) = S^{-N/2}\int x|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x$ *;*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\psi(v_{a,\epsilon,s}) = \frac{1}{N}\,S^{N/2}$$

uniformément par rapport à $|a| = (1+s)/2$*,* $s \in [0\,,\,1-d]$.

Preuve.— Compte tenu du lemme 2.5 de [7], pour établir le lemme 5, il suffit de prouver

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int \left|\varphi_0(x) u_{a,\epsilon}(x)\right|^{q+1} \mathrm{d}x = 0 .$$

Or on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\varphi_0(x) u_{a,\epsilon}(x)\right|^{q+1} \leq \int_{B(0,2)} \left|u_{a,\epsilon}(x)\right|^{q+1} =$$

$$= \epsilon^{N-(q+1)(N-2)/2} \int_{B(0,2)/\epsilon} \left(1 + |y|^2\right)^{-(q+1)(N-2)/2} \mathrm{d}x$$

quantité qui tend vers 0 quand ϵ tend vers 0.

LEMME 6.— *Si l'équation (1) n'admet pas de solution autre que $u = 0$ alors ψ, définie en (15), vérifie $(PC)_c$ sur $H_0^1(\Omega)^+$ pour tout $c \in \left](1/N) S^{N/2}, (2/N) S^{N/2}\right[$.*

Utilisant à nouveau le lemme de concentration de P.L. Lions (cf. [9], [10]) on a le lemme 7.

LEMME 7.— *Pour tout voisinage V compact de $\overline{\Omega}$, il existe $\alpha > 0$ tel que : si $u \neq 0$,*

$$\Gamma^*(u) = \int |\nabla u|^2 - \int |u|^{p+1} = 0$$

et

$$\psi^*(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1} \leq \frac{1}{N} S^{N/2} + \alpha ,$$

alors

$$F(u) \in V .$$

Fin de la démonstration du cas $N \geq 3$ et $\mu < 0$

Soit α une fonction continue de $\overline{B}(0,1)$ dans $\overline{B}(0,1)$ vérifiant

$$\left|\alpha(a)\right| = \frac{1+s}{2}, \quad \forall\, a \in \partial \overline{B} ,$$

$$\left|\alpha(a)\right| \leq \frac{3}{4} - d, \quad \forall\, a \in \overline{B} .$$

D'après le lemme 2 on peut choisir ϵ et s assez petit tels que

$$\forall\, a \in B , \quad \psi\left(v_{\alpha(a),\epsilon,s}\right) < \frac{2}{N} S^{N/2} \tag{18}$$

$$\forall\, a \in B , \quad \left|F\left(v_{\alpha(a),\epsilon,s}\right) - \frac{a}{2}\right| < \frac{1}{2} . \tag{19}$$

Soit V un voisinage compact de $\overline{\Omega}$ tel que

$$B(0, s) \not\subset V\,, \tag{20}$$

on pose

$$\psi_\epsilon^* = \left\{u \in H_0^1(\Omega)^+ \mid u \not\equiv 0\,,\ \Gamma(u) = 0\,,\ E^*(u) \le \epsilon\right\}.$$

D'après le lemme 7, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$F\left(\psi^*_{(1/N)S^{N/2}+\alpha}\right) \subset V\,. \tag{21}$$

D'après le lemme 5, on peut choisir ϵ assez petit tel que :

$$\psi\left(v_{\alpha(a),\epsilon,s}\right) \le \frac{1}{N}\, S^{N/2} + \alpha\,, \quad \forall\, a \in \partial B\,,\ \forall\, s \in [\,0\,,\,1-d\,]\,. \tag{22}$$

Dans la suite, on choisit ϵ et s de telle sorte qu'on ait (18), (19) et (22), et $\lambda > 1$ tel que $\psi\left(\lambda v_{\alpha(a),\epsilon,s}\right) < 0$.

En vue d'appliquer le théorème A, on définit les ensembles K, K^* et la fonction p^* par

$$p^* : K = [\,0\,,\,1] \times \overline{B} \to H_0^1(\Omega)^+ \text{ définie par } p^*(t, a) = \lambda t v_{\alpha(a),\epsilon,s}\,.$$

Il est clair que, d'après (18), on a

$$\frac{1}{N}\, S^{N/2} < c < \frac{2}{N}\, S^{N/2}\,. \tag{23}$$

Compte tenu du théorème A et du théorème 6, pour conclure il reste à montrer :

$$\max_{(t,a)\in\partial K} \psi\left(p^*(t, a)\right) < \max_{(t,a)\in K} \psi\left(p(t, a)\right)\,, \quad \forall\, p \in P\,. \tag{24}$$

Pour prouver (24) il suffit de montrer que

$$\max_{(t,a)\in K} \psi\left(p(t, a)\right) \ge \frac{1}{N}\, S^{N/2} + 2\alpha\,, \quad \forall\, p \in P\,. \tag{25}$$

Si (25) tombe en défaut, il existe p dans P vérifiant pour tout (t, a) de K :

$$\psi\left(p(t, a)\right) \le \frac{1}{N}\, S^{N/2} + 2\alpha\,. \tag{26}$$

Donc

$$\psi^*\big(p(t,a)\big) \leq \frac{1}{N}\, S^{N/2} + 2\alpha\,. \tag{27}$$

Soit la fonction $T : K \to \mathbb{R}^{N+1}$ définie par $(t,a) \to \big({}^t/_2\,,\ F\big(p(t,a)\big)\big)$. On vérifie, de la même manière que dans (6), que

$$\deg\left(T\,,\ K\,,\ \left(\frac{1}{\lambda}\,,\ 0\right)\right) = 1\,. \tag{28}$$

Posons

$$\begin{aligned} K^+ &= \big\{(t,a) \in K \mid \Gamma\big(p(t,a)\big) > 0\big\} \cup \big\{(0,\xi)\big\}\,,\\ K^- &= \big\{(t,a) \in K \mid \Gamma\big(p(t,a)\big) < 0\big\}\ ,\\ K^0 &= \big\{(t,a) \in K \mid \Gamma\big(p(t,a)\big) = 0\big\}\ . \end{aligned}$$

On a

$$\deg\big(T\,,\ K^+\,,\ (\lambda^{-1},0)\big) + \deg\big(T\,,\ K^-\,,\ (\lambda^{-1},0)\big) = \deg\big(T\,,\ K\,,\ (\lambda^{-1},0)\big)\,. \tag{29}$$

Nous allons montrer que

$$\deg\left(T\,,\ K^+\,,\ \left(\frac{1}{\lambda}\,,\ 0\right)\right) = 0\,, \tag{30}$$

$$\deg\left(T\,,\ K^-\,,\ \left(\frac{1}{\lambda}\,,\ 0\right)\right) = 0\,. \tag{31}$$

Preuve de (30) et (31). — On fixe $R > 0$ tel que $T(K) \subset B(0,R)$, et on considère le chemin $r : [\,0\,,\,1\,] \to \mathbb{R}^{N+1}$ défini par $r(t) = \big(Rt + \lambda^{-1}(1-t)\,,\ 0\big)$. On a $r(t) \notin T(\partial K^+)$. Sinon, il existerait $(t,a) \in \partial K^+$ tel que

$$\big(Rt + \lambda^{-1}(1-t)\,,\ 0\big) = \left(\frac{t}{2}\,,\ F\big(p(t,a)\big)\right).$$

Puisque $F\big(p(t,a)\big) = 0$ on déduit de (21) que $(t,a) \notin K^0$. Comme $\partial K^+ \subset \partial K \cup K^0$, on a $(t,a) \in \partial K \cup K^+$; or puisque $t \geq {}^\lambda/_2$ et $p = p^*$ sur ∂K on déduit que $\Gamma\big(p(t,a) < 0$, ce qui contredit le fait que $(t,a) \in \partial K^+$.

Alors $\deg\big(T\,,\ K^+\,,\ ({}^1/_\lambda\,,\ 0)\big)$ est bien défini et ne dépend pas de t, d'où (30).

La formule (31) se démontre de la même façon en utilisant le chemin $e(t) = \big(-Rt + \lambda^{-1}(1-t)\,,\ 0\big)$. De (28), (30) et (31), on tire une contradiction. D'où (24).

Remerciements

Je remercie vivement le Professeur H. Brezis qui est à l'origine de cette question et qui m'a beaucoup encouragé. Je remercie également le Professeur J.M. Coron pour ses conseils.

Références

[1] Bahri (A.) and Coron (J.M.) .— *On a non linear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent. The effect of the topology of the domain,* Comm. Pure Appl. Math., **41** (1988) pp. 253-294.

[2] Brezis (H.) .— *Elliptic equations with limiting Sobolev exponents. The impact of topology,* Comm. Pure Appl. Math., **39** (1986) pp. S.17-S.39.

[3] Brezis (H.) and Nirenberg (L.) Livre en préparation.

[4] Brezis (H.) and Nirenberg (L.) .— *Positive solutions of elliptic equations involving critical Sobolev exponent,* Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983) pp. 437-477.

[5] Brezis (H.) and Coron (J.M.) .— *Convergence of solutions of H-systems or how to blow bubbles,* Archive Rat. Mech. Anal., **89** (1985) pp. 21-56.

[6] Coron (J.M.) .— *Topologie et cas limite des injections de Sobolev,* C.R. Acad. Sc., Paris, **299** (1984) pp. 209-211.

[7] Ding (W.Y.) .— *Positive solutions of $\Delta u + u^{(N+2)/(N+2)} = 0$ on contractible domains,* à paraître.

[8] Lewandowski (R.) .— *Little holes and convergence of solutions of $-\Delta u = u^{(N+2)/(N+2)}$,* à paraître.

[9] Lions (P.L.) .— *La méthode de concentration-compacitéen calcul des variations* Seminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, (1982-1983).

[10] Lions (P.L.) .— *The concentration-compactness principle in calculus of variations. Part 1 and 2,* Riv. Math. Iberoamericana, **1** (1985) pp. 145-201 et pp. 45-121.

[11] Mancini (G.) and Musina (R.) .— *Holes and obstacles,* Ann. I.H.P. Analyse non linéaire, **5** (1988) pp. 323-345.

[12] Pohozaev (S.J.) .— *Eingenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$,* Soviet Math. Doklady, **6** (1965) pp. 1408-1411.

[13] Rey (O.) .— *Sur un problème variationnel non compact : l'effet de petits trous dans le domaine,* C.R. Acad. Sc. Paris, **308** (1989) pp. 349-352.

[14] Struwe (M.) .— *A global compactness result for elliptic boundary problem involving nonlinearities,* Math. Z., **187** (1984) pp. 511-517.