Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Denis Serre

Ondes spirales pour le problème de Riemann 2-D d'un fluide compressible

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 5, nº 1 (1996), p. 125-135

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1996_6_5_1_125_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. V, n° 1, 1996

Ondes spirales pour le problème de Riemann 2-D d'un fluide compressible(*)

DENIS SERRE[1]

RÉSUMÉ. — On considère les solutions autosimilaires des équations d'Euler pour un gaz polytropique d'exposant adiabatique $1 < \gamma < 2$. La dimension de l'espace physique est deux. On étudie plus particulièrement celles de ces solutions qui sont invariantes sous l'action d'un groupe à un paramètre de similitudes planes. Nous prouvons l'existence de telles solutions, dont les oscillations sont de fréquence arbitrairement élevée et d'amplitude $\mathcal{O}(1)$.

ABSTRACT. — One considers the self similar solutions (the well-known Riemann problem) for a polytropic gas with adiabatic exponent $1 < \gamma < 2$. The physical space is 2-dimensional and we consider only those being invariant with respect to the action of a one-parameter subgroup of plane similarities. One proves the existence of such solutions with arbitrarily large frequency and $\mathcal{O}(1)$ amplitude. The oscillations are sometimes due to vortex sheets.

1. Réduction à un système différentiel

On considère un fluide parfait polytropique dans l'espace $\mathbb{R}^2$. La densité ρ et le champ de vitesses u sont gouvernés par les équations d'Euler :

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0\,, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p(\rho) = 0\,, \end{cases} \tag{1}$$

où $p(\rho) = \rho^\gamma$, $\gamma > 1$ étant le coefficient (constant) adiabatique. La construction qui suit utilise l'hypothèse $\gamma < 2$ qui est satisfaite en pratique puisqu'un gaz parfait à n degrés de liberté correspond à $\gamma = (n+2)/n$.

(*) Reçu le 20 mai 1994

(1) Membre de l'Institut Universitaire de France
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, C.N.R.S U.M.R. 128, E.N.S. Lyon, 46 allée d'Italie, F-69364 Lyon Cedex 07 (France)

Le problème de Riemann est la recherche des solutions auto-similaires de la forme $(\rho, u) = (\rho, u)(x/t)$, $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^2$. On est alors ramené à un problème stationnaire :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho u) = x \cdot \nabla\rho\,, \\ \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p(\rho) = (x \cdot \nabla)(\rho u)\,. \end{cases}$$

Introduisant la pseudo-vitesse $v(x) = u(x) - x$, on met ce système sous une forme à coefficients constants :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho v) + 2\rho = 0\,, \\ \operatorname{div}(\rho v \otimes v) + 3\rho v + \nabla p(\rho) = 0\,. \end{cases} \tag{2}$$

L'étude du problème de Riemann 2-D n'est pas encore faite d'un point de vue analytique (un début d'analyse, concernant des estimations a priori, se trouve dans [2]). Von Neumann a construit des solutions ondes progressives dans un demi-espace par recollement d'ondes simples [5]. Des conjectures ont été faites dans [4], qui concernent la structure des solutions. Enfin, des simulations numériques ([1], [3]) suggèrent l'apparition de singularités en spirale au centre desquelles la densité s'annule parfois. La forme spirale semble être une conséquence de la rotation induite par les données (initiales pour (1) et donc à l'infini pour (2)). Les calculs qui suivent ont pour objet de construire analytiquement de telles singularités. Ici, il n'y a pas de donnée à l'infini. On cherche seulement des solutions particulières qui pourraient décrire au voisinage d'une singularité le comportement de solutions obtenues expérimentalement. On verra qu'il en existe beaucoup, de sorte qu'il est impossible de prévoir lesquelles apparaissent dans un problème de Riemann donné à partir de la connaissance de quelques invariants.

Cette construction tire parti de l'homogénéité de la loi d'état. Celle-ci permet de construire une action du groupe des similitudes (et pas seulement de celui des isométries) du plan sur l'ensemble des solutions de (2). Il est donc légitime de considérer parmi les solutions celles qui sont invariantes relativement à un sous-groupe à un paramètre. Dans ce cas le nombre de variables indépendantes est réduit d'une unité et le système (2) revient à un système différentiel. Dans le cas générique où ce sous-groupe n'est pas inclus dans celui des isométries, il admet un point fixe unique (qui est choisi comme origine du plan) et ses orbites sont des spirales d'équations $\theta - \tau \log r =$ cste en coordonnées polaires. Dans tout ce qui suit, τ est un paramètre non nul, fixé un fois pour toute. À une symétrie près, on peut supposer que τ

est positif. Nos solutions ont la forme suivante, en utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} v_r &= rV(\theta - \tau \log r) \\ v_\theta &= rW(\theta - \tau \log r) \\ \rho &= r^{2/(\gamma-1)} R(\theta - \tau \log r) . \end{aligned}$$

Pour des raisons pratiques, on notera $Z = W - \tau V$ et $Q = \gamma/(\gamma-1)\, R^{\gamma-1}$; $(1+\tau^2)^{-1/2} Z$ est une vitesse relative dans la direction normale aux hélices. Les équations équivalentes, là où (Q, Z, V) est régulier, sont

$$ZQ' + (\gamma - 1)QZ' + 2Q(\gamma V + \gamma - 1) = 0 \tag{3}$$

$$ZV' - \tau Q' + V^2 - W^2 + V + 2Q = 0 \tag{4}$$

$$ZW' + Q' + 2VW + W = 0 . \tag{5}$$

On constate aisément que ce système n'est résoluble par rapport aux dérivées premières (Q', Z', V') que si $(1+\tau^2)^{-1/2} Z$ est différent de zéro et de $\pm c(R)$, où $c(R) =: \sqrt{(\gamma-1)Q}$ est une vitesse relative du son. On doit envisager que certaines hélices soient des ondes de choc ou des discontinuités de contact (des lignes de tourbillon). Seule, cette seconde éventualité sera considérée ici ; elle correspond aux conditions de transmission suivantes :

1) $Z = 0$ de part et d'autre de la discontinuité,

2) la pression, donc Q, est continue à travers la discontinuité.

Problème.— Trouver une fonction 2π-périodique $\theta \mapsto (Q, Z, V)$, régulière par morceaux, satisfaisant (3)-(5) en dehors des points de discontinuité et les conditions de transmission en ceux-ci.

Remarques

- La recherche de solutions 2π-périodiques et régulières au moyen d'une bifurcation de Hopf échoue. En effet, l'apparition d'une paire de valeurs propres imaginaires pures pour le problème linéarisé coïncide avec la fuite à l'infini de la troisième valeur propre (le système cesse d'être résoluble par rapport aux dérivées). On doit donc envisager des solutions discontinues ou au moins qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^1$.
- En cas de discontinuités, puisque nous n'envisageons que des lignes de tourbillons, nos solutions satisfont aussi la loi de conservation de l'énergie (et pas seulement une inégalité). Ce sont donc aussi des solutions, à entropie constante, des équations d'Euler non-isentropiques de loi d'état $p = (\gamma - 1)\rho e$.

2. Solutions régulières maximales

On étudie maintenant les solutions de (3)-(5) régulières entre deux points $\theta_0 < \theta_1$ de discontinuité. On a donc $(Q, Z, V) \in \mathcal{C}^\infty(\,]\theta_0\,,\theta_1\,[\,)$ et le prolongement par continuité en θ_0 et θ_1 est possible. En particulier, $Z(\theta_0) = Z(\theta_1) = 0$ et Z ne s'annule pas dans $]\,\theta_0\,,\theta_1\,[$. On commence par transformer (3)-(5) en un système différentiel ordinaire à l'aide du changement de variable $\theta \mapsto s$ défini par

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{Z(Z^2 - (\gamma - 1)(1 + \tau^2)Q)}\,. \tag{6}$$

On vérifiera a posteriori que les solutions construites satisfont $Z \neq 0$, $\pm c(R)\sqrt{1+\tau^2}$. Pour l'instant, en notant $\dot{f} = \mathrm{d}f/\mathrm{d}s$, on est ramené au système

$$\dot{Q} = QZ\{(\gamma-1)(\tau W^2 - \tau V^2 + 2VW + Z - 2\tau Q) - 2Z(\gamma V + \gamma - 1)\} \tag{7}$$

$$\dot{Z} = 2(1+\tau^2)QZ(\gamma V + \gamma - 1) - Z^2(\tau W^2 - \tau V^2 + 2VW + Z - 2\tau Q) \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\dot{V} = {} & ((\gamma-1)Q - Z^2)(V^2 - W^2 + V + 2Q) + \\ & + \tau(\gamma-1)QW(2V+1) - 2\tau QZ(\gamma V + \gamma - 1)\,.\end{aligned} \tag{9}$$

Pour toute solution de (7)-(9), Z est ou bien nul ou bien de signe constant. Dans le premier de ces cas, Q est constant et il reste une seule équation différentielle

$$\dot{V} = (\gamma-1)Q\big((1+\tau^2)(V^2+V) + 2Q\big)\,,$$

ce qui s'écrit sous la forme

$$\dot{V} = (\gamma-1)(1+\tau^2)Q\big(V - V_-(Q,\tau)\big)\big(V - V_+(Q,\tau)\big)\,. \tag{10}$$

Les nombres $V_\pm(Q,\tau)$ sont les racines du trinôme $V^2 + V + 2Q/(1+\tau^2)$, réelles lorsque

$$8Q < 1 + \tau^2\,. \tag{11}$$

On a alors $V_+ < -1/2 < V_-$ (on verra plus loin l'intérêt de cette convention). Comme $Q > 0$ pour des raisons physiques, on a aussi $V_- < 0$.

Le système (7)-(9) dispose de points stationnaires $\big(Q, , 0, V_{\pm}(Q,\tau)\big)$ et d'orbites hétéroclines de la forme $\big(Q = \text{cste}, 0, V(s)\big)$ où $V(\pm\infty) = V_{\pm}(Q,\tau)$. On étudie maintenant la nature du système différentiel au voisinage de ces solutions particulières. Puisque $Z = 0$, la matrice du système linéarisé en un point stationnaire est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \cdot & \cdot & \mu \end{pmatrix}$$

où $\lambda = 2(1+\tau^2)Q(\gamma V + \gamma - 1)$ et $\mu = (\gamma - 1)(1+\tau^2)Q(2V+1)$. On a donc $\mu(Q,0,V_-) > 0$ et $\mu(Q,0,V_+) < 0$. Pour avoir suffisamment de trajectoires (il en faut avec Z non nul) entre les deux branches de solutions stationnaires, on se place dans le cas où $\lambda(Q,0,V_-) > 0 > \lambda(Q,0,V_+)$, c'est-à-dire $V_+ < (1-\gamma)/\gamma < V_-$, ce qui revient à dire que le trinôme est négatif en $(1-\gamma)/\gamma$:

$$Q < \frac{\gamma - 1}{2\gamma^2}(1+\tau^2). \tag{12}$$

Bien entendu, la contrainte (12) implique (11).

Notons $\Gamma_{\pm}(\tau)$ les deux branches de solutions stationnaires, formées respectivement des points $\big(Q,0,V_-(Q,\tau)\big)$ et $\big(Q,0,V_+(Q,\tau)\big)$ où $Q > 0$ satisfait (12). Le spectre du problème linéarisé est $\{0,\lambda,\mu\}$. En tout point P de $\Gamma_-(\tau)$ (resp. de $\Gamma_+(\tau)$), le système (7)-(9) admet donc une variété instable (resp. stable) de dimension deux, unique, ainsi qu'une variété centrale de dimension un. Celle-ci contient toutes les trajectoires qui restent dans un voisinage de P pour tout "temps", en particulier les solutions constantes. La variété centrale est donc localement égale à $\Gamma_-(\tau)$ (resp. $\Gamma_+(\tau)$). Elle est donc unique elle aussi.

En résumé, au voisinage de $\Gamma_-(\tau)$ (resp. $\Gamma_+(\tau)$), l'espace est feuilleté par les variétés instables (resp. stables) des point de $\Gamma_-(\tau)$ (resp. $\Gamma_+(\tau)$). En particulier, $\Gamma_+(\tau)$ est localement attractif tandis que $\Gamma_-(\tau)$ est localement répulsif. Comme $\big(Q,0,V_-(Q,\tau)\big)$ et $\big(Q,0,V_+(Q,\tau)\big)$ sont reliés par une trajectoire, notée $T_0(Q)$, on en déduit qu'un voisinage de la bande

$$\big\{(Q,0,V) \mid V_+(Q,\tau) < V < V_-(Q,\tau)\big\}$$

est constitué de trajectoires hétéroclines qui vont de $\Gamma_-(\tau)$ vers $\Gamma_+(\tau)$. Considérons une telle trajectoire T, d'origine $\big(Q,0,V_-(Q,\tau)\big)$ et d'extrémité $\big(Q_1,0,V_+(Q_1,\tau)\big)$. Si T est assez proche de $T_0(Q)$, l'application

$$T \mapsto \left(Q,\, \delta\theta := \int_{\mathbb{R}} Z\big(Z^2 - (\gamma-1)(1+\tau^2)Q\big)\, ds\right)$$

est régulière (on munit l'ensemble des trajectoires de la structure différentielle de la variété transverse définie par $V = -1/2$) et injective. On peut noter $T = T(Q, \delta\theta)$. Par exemple, on a $T_0(Q) = T(Q, 0)$. On définit alors une fonction f de deux variables dans un voisinage de $]0, (\gamma-1)(1+\tau^2)/2\gamma^2[$ $\times\{0\}$ par

$$f(Q, \delta\theta) := Q_1 - Q\,.$$

On a bien sûr $f(Q, 0) = 0$.

3. Un lemme technique

LEMME 3.1.— *L'application f est de classe $\mathcal{C}^2$ et on a*

$$\frac{\partial f}{\partial \delta}(Q, 0) = \frac{\tau}{2\gamma(3\gamma-1)}\left\{\frac{8\gamma(2\gamma-1)}{1+\tau^2}Q - 6(\gamma-1)^2\right\}.$$

Démonstration.— La régularité de f est une question délicate dont on verra une discussion en annexe. Le calcul de la dérivée en $(Q, 0)$ utilise les équivalents des intégrales mises en jeu :

$$\delta\theta = \int_{\mathbb{R}} Z\big(Z^2 - (\gamma-1)(1+\tau^2)Q\big)\,\mathrm{d}s\,,$$

$$f(Q, \delta\theta) = \int_{\mathbb{R}} Q(s)Z\{(\gamma-1)(\tau W^2 - \tau V^2 + 2VW + Z - 2\tau Q) + \\ - 2Z(\gamma V + \gamma - 1)\}\,\mathrm{d}s\,.$$

On a

$$\delta\theta \sim (1-\gamma)(1+\tau^2)Q\int_{\mathbb{R}} z\,\mathrm{d}s\,, \tag{13}$$

$$f(Q, \delta\theta) = \tau(\gamma-1)Q\int_{\mathbb{R}} z\big((1+\tau^2)V^2 - 2Q\big)\,\mathrm{d}s\,, \tag{14}$$

où z est une solution du problème linéarisé autour de la trajectoire hétérocline $s \mapsto \big(Q, 0, V(s)\big)$. Ici

$$\begin{cases} \dot z = 2(1+\tau^2)Q(\gamma V + \gamma - 1)z\,, \\ \dot V = (\gamma-1)(1+\tau^2)Q(V - V_-)(V - V_+)\,. \end{cases} \tag{15}$$

De (13) et (14), on tire
$$\frac{\partial f}{\partial \delta}(Q,0) = -\tau \frac{\int_{\mathbb{R}} z(V^2 - V_- V_+)\,\mathrm{d}s}{\int_{\mathbb{R}} z\,\mathrm{d}s}.$$
De (15), on déduit aussi, à une constante multiplicative près :
$$z = (V_- - V)^{\alpha}(V_+ - V)^{\beta}.$$
Les exposants sont donnés par les formules suivantes, où $\Delta V > 0$ désigne $V_- - V_+$:
$$\alpha\,\Delta V = 2 + \frac{2\gamma}{\gamma - 1}V_-\,, \quad \beta\,\Delta V = -2 - \frac{2\gamma}{\gamma-1}V_+\,.$$
On transforme alors les intégrales en utilisant la formule
$$z\,\mathrm{d}s = -(V_- - V)^{\alpha-1}(V_+ - V)^{\beta-1}\frac{\mathrm{d}V}{(\gamma-1)(1+\tau^2)Q}\,,$$
de sorte que
$$\frac{\partial f}{\partial \delta}(Q,0) = -\tau \frac{\displaystyle\int_{V_+}^{V_-} z(V^2 - V_-V_+)(V_- - V)^{\alpha-1}(V - V_+)^{\beta-1}\,\mathrm{d}V}{\displaystyle\int_{V_+}^{V_-}(V_- - V)^{\alpha-1}(V - V_+)^{\beta-1}\,\mathrm{d}V}$$
Faisant le changement de variables $V = (1-y)V_+ + yV_-$, il vient
$$\frac{\partial f}{\partial \delta}(Q,0) = -\tau\Delta V \frac{\displaystyle\int_0^1 \left(y^2V_- - (1-y)^2V_+\right)(1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}\,\mathrm{d}y}.$$
Utilisons alors l'expression $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}\,\mathrm{d}y$. On a
$$\frac{\partial f}{\partial \delta}(Q,0) = \tau\Delta V \frac{V_+B(\alpha+2,\,\beta) - V_-B(\alpha,\,\beta+2)}{B(\alpha,\beta)}.$$
De la formule classique $B(\alpha,\,\beta+1) = \beta B(\alpha,\beta)/(\alpha+\beta)$, on tire
$$\frac{\partial f}{\partial \delta}(Q,0) = \tau\Delta V \frac{V_+(\alpha+1)\alpha - V_-(\beta+1)\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}.$$
Cependant, $V_+ + V_- = -1$, de sorte que
$$\alpha = \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma-2}{\Delta V} + \gamma\right), \quad \beta = \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{2-\gamma}{\Delta V} + \gamma\right),$$
d'où
$$V_+(\alpha+1)\alpha - V_-(\beta+1)\beta = -\frac{\gamma(2\gamma-1)(\Delta V)^2 - (\gamma-2)(4\gamma-3)}{(\gamma-1)^2\,\Delta V}.$$
Utilisant alors $(\Delta V)^2 = 1 - 8Q/(1+\tau^2)$, on obtient la formule annoncée. □

COROLLAIRE 3.1

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\delta\partial Q}(Q,0) = \frac{4\tau(2\gamma-1)}{(1+\tau^2)(3\gamma-1)} \neq 0\,.$$

De plus, $(\partial f/\partial\delta)(Q^*,0) = 0$ *pour*

$$Q^*(\tau) =: \frac{3(\gamma-1)^2}{4\gamma(2\gamma-1)}(1+\tau^2)\,,$$

valeur qui satisfait (12) (c'est ici qu'on utilise l'hypothèse $\gamma < 2$*).*

4. Quelques constructions

Soit T une trajectoire du système (7)-(9), d'origine $P_0 = \big(Q_0, 0, V_-(Q_0,\tau)\big)$, d'extrémité $P_1 = \big(Q_1, 0, V_+(Q_1,\tau)\big)$, sur laquelle Z ne s'annule pas et reste assez petit. Alors Q reste voisin de Q_0. En particulier, on a $Z^2 < (\gamma-1)(1+\tau^2)Q$ le long de T. C'est aussi une trajectoire du système (3)-(5), paramétrée dans ce cas par θ. Il y a des différences essentielles entre ces deux paramétrages. D'une part θ parcourt un intervalle borné $\big(\theta_0, \theta_0+\delta\theta(T)\big)$. D'autre part, la trajectoire peut être parcourue dans le même sens (si $Z < 0$) ou en sens inverse (si $Z > 0$).

4.1. Première construction

On choisit T tel que $Z < 0$ pour fixer les idées. On définit ainsi $\theta \mapsto (Q, Z, V)$ sur l'intervalle $\big(0\,, \delta\theta(T) = \delta\big)$, puis on étend cette définition par δ-périodicité. Cette construction convient si les deux conditions suivantes sont remplies :

1) d'une part, $\theta \mapsto (Q, Z, V)$ est 2π-périodique, c'est-à-dire $2\pi \in \delta\,\mathbb{N}$,
2) d'autre part, la condition de transmission est satisfaite aux points de discontinuité, c'est-à-dire $Q_1 = Q_0$.

La seconde condition s'écrit $f(Q_0, \delta) = 0$. Comme $\delta > 0$ est petit, on va étudier cette égalité au moyen du lemme de Morse. Comme $f(\,\cdot\,,0) \equiv 0$, on a $f_Q(\,\cdot\,,0) = f_{QQ}(\,\cdot\,,0) = 0$. Les résultats du paragraphe précédent montrent que $(Q^*,0)$ est un point critique pour f, en lequel f est une fonction de Morse puisque $f_\delta(Q^*,0) = 0$ et $f_{Q\delta}(Q^*,0) \neq 0$. L'équation

$f = 0$ définit donc deux branches au voisinage de $(Q^*, 0)$. L'une est la branche triviale $\delta = 0$, qui est sans intérêt ici. L'autre est une courbe d'équation $Q = Q^* + \phi(\delta)$ où ϕ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\phi(0) = 0$ et $\phi'(0) = -(f_{\delta\delta}/2f_{Q\delta})(Q^*, 0)$. La construction est complète en prenant $\delta = 2\pi/n$ et $Q_0 = Q^* + \phi(2\pi/n)$, n étant un entier assez grand pour que δ soit dans le domaine de définition de ϕ.

On remarque que le nombre d'oscillations n est arbitrairement grand et que plus n est grand, plus (Q, Z) est uniformément proche de la constante $(Q^*, 0)$ tandis que V oscille entre les valeurs proches des racines de l'équation

$$V^2 + V + \frac{3(\gamma - 1)^2}{4\gamma(2\gamma - 1)} = 0\,.$$

4.2 Deuxième construction

On peut aussi avoir plusieurs discontinuités de contact par période (au lieu d'une seule dans l'exemple précédent). Par exemple, fixant un rapport $p > 0$, on va de $(Q_0, 0, V_-(Q_0))$ à $(Q_1, 0, V_+(Q_1))$ en un angle δ, puis $(Q_1, 0, V_-(Q_1))$ à $(Q_2, 0, V_+(Q_2))$ en un angle $p\delta$. On a

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_0 + f(Q_0, \delta)\,, \\ Q_2 &= Q_1 + f(Q_1, p\delta)\,. \end{aligned}$$

Les conditions à remplir sont $Q_2 = Q_0$ (condition de transmission) et $2\pi \in (1 + p)\delta\,\mathbb{N}$. La première s'écrit $g(Q_0, \delta) = 0$ où g est défini par

$$g(Q, \delta) =: f(Q, \delta) + f\big(Q + f(Q, \delta),\, p\delta\big)\,.$$

De même que dans l'exemple précédent, g est une fonction de Morse en son point critique $(Q^*, 0)$. L'équation $g = 0$ avec $\delta \neq 0$ équivaut à $Q = Q^* + \psi(\delta)$ où ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\psi(0) = 0$. À nouveau, on choisit $\delta = 2\pi/\big((1+p)n\big)$, $Q_0 = Q^* + \psi(\delta)$ où n est un entier assez grand pour que δ soit dans le domaine de définition de ψ.

Notons que si $p = 1$, on a $\psi \equiv \phi$. Dans ce cas, cette construction n'apporte rien par rapport au paragraphe précédent.

4.3 Troisième construction

On peut éviter qu'il y ait des discontinuités de la manière suivante. Étant donné une trajectoire T_1, allant de P_0 à P_1 en un angle $\delta > 0$, on considère la trajectoire T_2 qui va de $P_2 = \big(Q_2, 0, V_+(Q_2)\big)$ à P_0 en un même angle δ. On a donc

$$Q_1 = Q_0 + f(Q_0, \delta),$$
$$Q_2 = Q_0 + f(Q_0, -\delta).$$

On va donc de P_2 (sur $\Gamma_+(\tau)$) à P_1 (sur $\Gamma_+(\tau)$ également) en un angle 2δ. On obtient une solution continue 2π-périodique lorsque $\pi \in \delta\mathbb{N}$ et $Q_2 = Q_1$. La deuxième condition s'écrit $h(Q_0, \delta) = 0$ où h est défini par

$$h(Q, \delta) =: f(Q, \delta) - f(Q, -\delta).$$

À nouveau, $(Q^*, 0)$ est un point critique de h, en lequel h est une fonction de Morse avec $h_{QQ} = 0$. La condition $Q_2 = Q_1$ équivaut donc à $Q_0 = Q^* + \chi(\delta)$ où χ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie au voisinage de zéro. Il reste à choisir $\delta = \pi/n$ et $Q_0 = Q^* + \chi(\delta)$, n étant un entier assez grand pour que δ soit dans le domaine de définition de χ.

A. Régularité

Les questions de régularité pour les équations différentielles, au moins en ce qui concerne les feuilletages stables et instables, sont toujours difficiles. Les spécialistes consultés s'accordent à dire que les résultats généraux sont difficiles d'accès ou à appliquer. *Ce qui suit est entièrement dû au rapporteur désigné par le comité éditorial.* Je ne saurais trop l'en remercier.

Dans le cas présent d'un champ de vecteurs X (le second membre de (7)-(9)), de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, qui s'annule le long d'une sous-variété Γ (une partie de Γ_+ ou Γ_-) et transversalement contractant (par symétrie, on traite aussi le cas dilatant), on peut faire le raisonnement suivant. Désignons par ϕ^t le flot de X. Pour une fonction h de classe $\mathcal{C}^\infty$, nulle sur Γ, on définit une fonction H sur le bassin d'attraction de Γ par la formule $H(x) := \int_0^\infty h\big(\phi^t(x)\big)\,\mathrm{d}t$. Démontrer la régularité de H revient à le faire dans un voisinage de Γ. La continuité de H s'obtient en montrant que $\mathrm{dist}\big(\phi^t(x), \Gamma\big) \le C\exp(-Kt)$ avec des constantes C, $K > 0$ localement uniformes par rapport à x. On améliore les résultats de régularité en raisonnant par récurrence et en remplaçant le couple (X, Γ) par (X_1, Γ_1) où $X_1(x, a) := \big(X(x)\,,\, \mathrm{D}X(x)a\big)$ sur $\mathbb{R}^n \times M_n(\mathbb{R})$, la sous-variété Γ_1 étant constituée des points (x, a) pour lesquels $\mathrm{D}X(x)a = 0$. En effet, (X_1, Γ_1) satisfait les mêmes hypothèses que (X, Γ) et la régularité $\mathcal{C}^k$ de H_1 signifie la régularité $\mathcal{C}^{k+1}$ de H.

Donc, H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans le bassin d'attraction de Γ. Choisissant alors $h(x) = \mathrm{d}g(x) \cdot X(x)$ où g est arbitraire, de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a $H(x) = g\big(\phi^\infty(x)\big) - g(x)$. On en déduit que $x \mapsto \phi^\infty(x) := \lim_{t\to+\infty} \phi^t(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

De tout cela il ressort que l'application $T \mapsto \big(Q(-\infty),\, Q(+\infty),\, \delta\theta\big)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'injectivité locale de $T \mapsto \big(Q(-\infty),\, \delta\theta\big)$ découle des formules (13) et (15) et du théorème des fonctions implicites. Celui-ci assure aussi la régularité $\mathcal{C}^\infty$ de f.

Références

[1] SCHULTZ-RINNE (C.), COLLINS (J.) et GLAZ (H.) .— *Numerical solution of the Riemann problem for two-dimensionnal gas dynamics*, S.I.A.M. J. Sci. Comput. **14**, n° 6 (1993), pp. 1394-1414.

[2] SERRE (D.) .— *Écoulements de fluides parfaits en deux variables indépendantes de type espace. Réflexion d'un choc plan par un dièdre compressif*, Arch. Rat. Mech. Anal. **132** (1995), pp. 15-36.

[3] SHULI YANG .— *Numerical Riemann solutions in multi-pieces of 2-D gas dynamics*, ZIB, Berlin, Preprint SC **92-20** (1992).

[4] TONG ZHANG et YUXI ZHENG .— *Conjecture on the structure of solutions of the Riemann Problem for 2-D gas dynamics systems*, S.I.A.M. J. Math. Anal. **21**, n° 3 (1990), pp. 593-630.

[5] VON NEUMANN (J.) .— *Collected works*, Pergamon, New-York, **6** (1963).