ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ABDELBAKI BOUTABAA

Sur les courbes holomorphes p-adiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 5, nº 1 (1996), p. 29-52

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1996_6_5_1_29_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. V, n° 1, 1996

Sur les courbes holomorphes p-adiques[(*)]

ABDELBAKI BOUTABAA[(1)]

RÉSUMÉ. — Ce travail consiste à étendre la théorie de Nevanlinna aux courbes holomorphes p-adiques. Les résultats obtenus sont appliqués à l'étude des solutions entières de l'équation fonctionnelle $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$, ainsi qu'au problème d'unicité des courbes holomorphes dans l'espace projectif p-adique.

ABSTRACT. — The purpose of this work is to extend Nevanlinna Theory to p-adic holomorphic curves. As applications we will study p-adic entire solutions of the functional equation $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$. We will finally investigate the uniqueness problem of holomorphic curves in the p-adic projective space.

AMS Classification : Prinmary 12H25 ; secondary 46S12.

0. Introduction

Dans [1] et [2], on étudie les fonctions méromorphes p-adiques $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^1$. Une « thérorie de Nevanlinna p-adique » est établie pour de telles fonctions et les résultats obtenus sont appliqués à l'étude d'équations différentielles p-adiques.

Le présent travail qui s'inspire largement d'un article de H. Cartan [3], consiste à généraliser la théorie de Nevanlinna aux fonctions méromorphes $f : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{P}^n$, $n \geq 1$. Ainsi, on obtient une extension aux courbes holomorphes notamment des théorèmes I.3, I.8 et I.9 de [1]. Nous donnons enfin deux applications de ces résultats :

(*) Reçu le 2 novembre 1993

(1) Université Blaise-Pascal, Laboratoire de Mathématiques Pures, Complexe Scientifique de Cézeaux, F-63177 Aubière Cedex (France); boutadaa@ucfma.univ-bpclermont.fr

- étude des solutions entières de l'équation $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$;
- problème d'unicité des courbes holomorphes dans l'espace projectif p-adique.

Les notations utilisées, et que nous allons rappeler brièvement, sont celles de [1] et [2]. Ainsi, on note $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ (resp. $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$) l'espace des fonctions entières (resp. méromorphes) dans tout le corps $\mathbb{C}_p$, complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$.

Pour $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, $\phi \neq 0$ et pour $\mu > -\infty$, on note

$$z(\mu, \phi) = \sum_{v(x)=\mu} \max(0\,, \operatorname{ord}_x \phi) \quad \text{et} \quad p(\mu, \phi) = -\sum_{v(x)=\mu} \min(0\,, \operatorname{ord}_x \phi)\,,$$

où v est la valuation du corps $\mathbb{C}_p$. C'est-à-dire que $z(\mu, \phi)$ (resp. $p(\mu, \phi)$) est le nombre de zéros (resp. pôles) de ϕ sur le cercle $v(x) = \mu$, chaque zéro (resp. pôle) étant compté autant de fois que son ordre de multiciplité l'indique.

PROPOSITION 0.1.— *Formule de Jensen. Pour $\phi \in \mathcal{M}(C_p)$ telle que $\phi(0) \neq 0$ et $\phi(0) \neq \infty$ et pour $\lambda > -\infty$, on a*

$$v(\phi(0)) = v(\phi, \lambda) + \sum_{\mu \geq \lambda} [z(\mu, \phi) - p(\mu, \phi)](\mu - \lambda)\,, \tag{0.1}$$

où $v(\phi, \lambda)$ est la fonction de valuation de la fonction ϕ.

Pour ϕ et λ comme précédemment, posons

$$m(\lambda, \phi) = \max\left(v\Big(\frac{1}{\phi}\,, \lambda\Big)\,, 0\right) \tag{0.2}$$

$$N(\lambda, \phi) = \sum_{\mu \geq \lambda} p(\mu, \phi)(\mu - \lambda) \tag{0.3}$$

$$T(\lambda, \phi) = m(\lambda, \phi) + N(\lambda, \phi)\,. \tag{0.4}$$

La fonction $(\lambda \mapsto T(\lambda, \phi))$ est appelée *fonction caractéristique de ϕ.*

Avec les notations précédentes, la formule (0.1) nous donne le résultat suivant.

THÉORÈME 0.2.— *Premier théorème fondamental de Nevanlinna. Soient $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ et $a \in \mathbb{C}_p$ tels que $\phi(0) \neq 0$, $\phi(0) \neq a$ et $\phi(0) \neq \infty$. On a*

$$T\left(\lambda, \frac{1}{\phi - a}\right) = T(\lambda, \phi) + \mathrm{O}(1)\,, \quad \lambda \to -\infty\,. \tag{0.5}$$

On montre aussi les résultats suivants.

PROPOSITION 0.3.— *Soit $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ telle que $\phi(0) \neq 0$ et $\phi(0) \neq \infty$. On a les équivalences suivantes :*

$$\phi \textit{ est une constante} \Longleftrightarrow T(\lambda, \phi) = \mathrm{o}(1) \quad \lambda = -\infty\,, \tag{0.6a}$$

$$\phi(x) \in \mathbb{C}_p(x) \Longleftrightarrow T(\lambda, \phi) = \mathrm{O}(1)\,, \quad \lambda = -\infty\,. \tag{0.6b}$$

THÉORÈME 0.4.— *Deuxième théorème fondamental de Nevanlinna. Soit $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, ϕ non constante. Soient $a_1, \ldots, a_q$ des éléments distincts de $\mathbb{C}_p$ et $\delta \in \mathbb{R}$ tels que $v(a_i - a_j) \leq \delta$ pour $1 \leq i \neq j \leq q$. On suppose que $\phi(0) \neq 0$, $\phi(0) \neq \infty$ et $\phi(0) \neq a$ pour tout i. On a :*

$$\begin{aligned} m(\lambda, \phi) &+ \sum_{i=1}^{q} m\left(\lambda, \frac{1}{\phi - a_i}\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{q} \left(N\left(\lambda, \frac{1}{\phi - a_i}\right) - N_1\left(\lambda, \frac{1}{\phi - a_i}\right)\right) + \left(N(\lambda, \phi) - N_1(\lambda, \phi)\right) \leq \\ &\leq 2T(\lambda, \phi) + S(\lambda, \phi)\,, \end{aligned} \tag{0.7}$$

où $N_1(\lambda, \phi)$ est le nombre obtenu de $N(\lambda, \phi)$ en comptant chaque pôle une seule fois quel que soit son ordre de multiplicité et $S(\lambda, \phi) = \mathrm{O}(1)$ quand $\lambda \to -\infty$.

Les notations suivantes nous sont nécessaires pour énoncer une conséquence de ce théorème.

Soit $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, ϕ non constante telle que $\phi(0) \neq 0$ et $\phi(0) \neq \infty$. On pose

$$\delta(\phi, \infty) = 1 - \liminf_{\lambda \to -\infty} \frac{N(\lambda, \phi)}{T(\lambda, \phi)}$$

et

$$\delta_1(\phi, \infty) = 1 - \liminf_{\lambda \to -\infty} \frac{N_1(\lambda, \phi)}{T(\lambda, \phi)}\,.$$

Pour tout $a \in \mathbb{C}_p$ tel que $\phi(0) \neq a$, on pose :

$$\delta(\phi, a) = 1 - \liminf_{\lambda \to -\infty} \frac{N(\lambda\,,\, 1/(\phi - a))}{T(\lambda, \phi)}$$

et

$$\delta_1(\phi, a) = 1 - \liminf_{\lambda \to -\infty} \frac{N_1(\lambda\,,\, 1/(\phi - a))}{T(\lambda, \phi)}\,.$$

Il est clair que, pour tout $a \in \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$, on a $0 \leq \delta(\phi, a) \leq \delta_1(\phi, a) \leq 1$.

COROLLAIRE 0.5.— *Soit $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, ϕ non constante telle que $\phi(0) \neq 0$ et $\phi(0) \neq \infty$. On a*

$$\sum_{\phi \in \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}} \delta(\phi, a) \leq \sum_{\phi \in \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}} \delta_1(\phi, a) \leq 2\,,$$

la sommation portant sur les a tels que $\phi(0) \neq a$.

Pour la démonstration voir [1, théorème I.8] ou [2, théorèmes 2.9 et 2.10].

1. Fonction $\mathcal{T}$ et premier théorème fondamental

Pour tout $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}_p^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$; on pose

$$L(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \{\alpha(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid \alpha \in \mathbb{C}_p\}\,.$$

On note alors :

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p) \left\{ L(x_1, \ldots, x_{n+1}) \,\middle|\, (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}_p^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\} \right\}\,,$$

et $\pi : \mathbb{C}_p^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\} \to \mathbb{P}^n$ la fonction définie par :

$$\pi\big((x_1, \ldots, x_{n+1})\big) = L(x_1, \ldots, x_{n+1})\,.$$

DÉFINITION 1.1.— *On dit qu'une application $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^n$ admet une représentation s'il existe une application $\widetilde{f} : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ telle que $f = \pi \circ \widetilde{f}$.*

Ceci signifie l'existence d'application $f_1, \ldots, f_{n+1}$ de $\mathbb{C}_p$ dans $\mathbb{C}_p$ ne s'annulant simultanément en aucun point de $\mathbb{C}_p$ telles que

$$\widetilde{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x)\big).$$

PROPOSITION 1.2.— *Soient*

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n+1} \end{pmatrix}$$

deux représentations d'une application $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^n$. Alors il existe une application $h : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p^*$ telle que $g_i(x) = h(x)f_i(x)$ pour tout $x \in \mathbb{C}_p$ et tout $i = 1, \ldots, n+1$.

Démonstration.— Pour un $x \in \mathbb{C}_p$,

$$a(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x)\big) \quad \text{et} \quad b(x) = \big(g_1(x), \ldots, g_{n+1}(x)\big)$$

sont deux éléments de $\mathbb{C}_p^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tels que $\pi\big(a(x)\big) = \pi\big(b(x)\big)$. Donc, il existe un unique $\alpha_x \in \mathbb{C}_p^*$ tel que $g_i(x) = \alpha_x f_i(x)$ pour $i = 1, \ldots, n+1$. La fonction h est alors définie par $h(x) = \alpha_x$ pour tout $x \in \mathbb{C}_p$.

DÉFINITION 1.3.— *Une représentation*

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

d'une fonction $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^n$ est dite holomorphe si les fonctions $f_i : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ sont holomorphes. Une fonction $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^n$ est dite holomorphe si elle admet une représentation holomorphe.

COROLLAIRE 1.4.— *Soient $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et*

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n+1} \end{pmatrix}$$

deux représentations holomorphes de f. Alors il existe une constante non nulle k telle que $g_i(x) = kf_i(x)$ pour tout $x \in \mathbb{C}_p$ et tout $i = 1, \ldots, n+1$.

Démonstration.— La proposition 1.2 assure l'existence d'une application $h : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p^*$ telle que $g_i(x) = h(x) f_i(x)$ et les conditions du corollaire entraînent que h est entière. Or une fonction entière qui n'a pas de zéro n'est autre qu'une constante non nulle.

DÉFINITION 1.5.— *Soient $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et*

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

une représentation holomorphe de f. On suppose $f_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n+1$. On note alors pour $\lambda > -\infty$:

$$\mathcal{T}(\lambda, f) = \min_{1 \le i \le n+1} \left\{ v\big(f_i(0)\big) \right\} - \min_{1 \le i \le n+1} \left\{ v\big(f_i, \lambda\big) \right\} . \tag{1.1}$$

Remarque 1.6.— Le corollaire 1.4 montre que la fonction $\mathcal{T}$ est bien définie : elle ne dépend pas de la représentation

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix} .$$

DÉFINITION 1.7.— *Soient $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et*

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

une représentation holomorphe de f. Si $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C}_p)$, on note Af la fonction holomorphe de $\mathbb{C}_p$ dans $\mathbb{P}^n$ dont une représentation holomorphe est

$$A \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix} .$$

THÉORÈME 1.8 (généralisation du théorème 0.2).— *Soient $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et*

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

une représentation holomorphe de f. On suppose $f_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n+1$. Soit $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C}_p)$. On a

$$\mathcal{T}(\lambda, Af) = \mathcal{T}(\lambda, f) + \mathrm{O}(1)\,, \quad \lambda \to -\infty\,. \tag{1.2}$$

Démonstration.— Soient $A = (a_{ij})$ et $A^{-1} = (b_{ij})$. Posons

$$A \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n+1} \end{pmatrix},$$

où

$$g_j = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} f_i \quad \text{et} \quad f_j = \sum_{i=1}^{n+1} b_{ij} g_i\,.$$

Soit $\delta \leq 0$ tel que

$$\delta \leq \min_{i,j} \{ v(a_{ij})\,,\, v(b_{ij}) \}\,.$$

On a

$$\min_{1 \leq j \leq n+1} \{ v(g_j, \lambda) \} = \min_{1 \leq j \leq n+1} \left\{ v\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} f_i\,,\, \lambda \right) \right\} \geq$$
$$\geq \delta + \min_{1 \leq j \leq n+1} \{ v(f_j, \lambda) \}\,.$$

De même, on a

$$\min_{1 \leq j \leq n+1} \{ v(f_j, \lambda) \} \geq \delta + \min_{1 \leq j \leq n+1} \{ v(g_j, \lambda) \}\,.$$

D'où

$$\delta \leq \min_{1 \leq j \leq n+1} \{ v(g_j, \lambda) \} - \min_{1 \leq j \leq n+1} \{ v(f_j, \lambda) \} \leq -\delta \quad \text{pour } \lambda > -\infty\,.$$

Donc enfin $\left| \mathcal{T}(\lambda, Af) - \mathcal{T}(\lambda, f) \right| \leq -2\delta$.

Exemple 1.9.— Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ telle que $f(0) \neq 0$ et ∞. On a $f = f_1/f_2$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions de $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ n'ayant aucun zéro commun et telles que $f_1(0) \neq 0$ et $f_2(0) \neq 0$.

1) La formule (0.1) appliquée à $1/f_2$ donne

$$N\left(\lambda, \frac{1}{f_2}\right) = \sum_{\mu \geq \lambda} p\left(\mu, \frac{1}{f_2}\right)(\mu - \lambda) = v(f_2(0)) - v(f_2, \lambda).$$

D'où

$$N(\lambda, f) = N\left(\lambda, \frac{1}{f_2}\right) = v(f_2(0)) - v(f_2, \lambda).$$

On a aussi

$$m(\lambda, f) = \max\left(v\left(\frac{1}{f}, \lambda\right), 0\right) = -\min(v(f, \lambda), 0)$$

et par suite

$$\begin{aligned} m(\lambda, f) &= -\min\big(v(f_1, \lambda) - v(f_2, \lambda), 0\big) \\ &= -\min\big(v(f_1, \lambda), v(f_2, \lambda)\big) + v(f_2, \lambda). \end{aligned}$$

D'où $T(\lambda, f) = m(\lambda, f) + N(\lambda, f) = v\big(f_2(0)\big) - \min\big(v(f_1, \lambda), v(f_2, \lambda)\big)$ et donc

$$T(\lambda, f) = \min\big(v(f_1(0)), v(f_2(0))\big) - \min\big(v(f_1, \lambda), v(f_2, \lambda)\big) + K, \quad (1.3)$$

où $K = v\big(f_2(0)\big) - \min\big(v(f_1(0)), v(f_2(0))\big)$ est une constante.

D'autre part, f peut être regardée comme une fonction holomorphe $\mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^n$ dont une représentation holomorphe est

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

et on a

$$\mathcal{T}(\lambda, f) = \min\big(v(f_1(0)), v(f_2(0))\big) - \min\big(v(f_1, \lambda), v(f_2, \lambda)\big). \quad (1.4)$$

Des relations (1.3) et (1.4) on a

$$T(\lambda, f) = \mathcal{T}(\lambda, f) + K. \quad (1.5)$$

Donc la fonction $\mathcal{T}$ généralise bien la fonction T.

2) Soit $a \in \mathbb{C}_p$ tel que $f(0) \neq a$. Donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}_p)$$

et le théorème 1.8 ci-dessus donne $\mathcal{T}(\lambda, Af) = \mathcal{T}(\lambda, f) + \mathrm{O}(1)$. Or

$$Af = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 - af_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{f-a} = \frac{f_2}{f_1 - af_2}\,.$$

Ceci avec la relation (1.5) permet de retouver le théorème 0.2.

PROPOSITION 1.10.— *Soient $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et*

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

une représentation holomorphe de f telle que $f_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n+1$. On a les équivalences suivantes (prop. 0.3) :

$$f \text{ est une constante} \Leftrightarrow \mathcal{T}(\lambda, f) = \mathrm{o}(1)\,, \quad \lambda \to -\infty \tag{1.6}$$

$$f_i(x) \in \mathbb{C}_p[x] \text{ pour tout } i \Leftrightarrow \mathcal{T}(\lambda, f) = \mathrm{O}(1)\,, \quad \lambda \to -\infty\,. \tag{1.7}$$

COROLLAIRE 1.11.— *Soit $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ telle que $\phi(0) \neq 0$ et $\phi(0) \neq \infty$. Soient a, b, c, $d \in \mathbb{C}_p$ tels que $ad - bc \neq 0$. soit $\psi = (a\phi + b)/(c\phi + d)$. On suppose que $\psi(0) \neq 0$ et $\psi(0) \neq \infty$. Alors on a*

$$T(\lambda, \psi) = T(\lambda, \phi) + \mathrm{O}(1)\,, \quad \lambda \to -\infty\,. \tag{1.8}$$

Démonstration.— On pose

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

on écrit $\phi = f_1/f_2$ et on applique le théorème 1.8 à

$$A\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 1.12.— *Soient $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et*

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

une représentation holomorphe de f telle que $f_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n+1$. Soient

$$F = \sum_{i=1}^{n+1} a_i f_i \quad \text{et} \quad G = \sum_{i=1}^{n+1} b_i f_i$$

deux combinaisons linéaires des f_i à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ telles que $F(0) \neq 0$ et $G(0) \neq 0$. On a

$$N\Big(\lambda, \frac{1}{F}\Big) \leq \mathcal{T}(\lambda, f) - \min_{1 \leq i \leq n+1} \big\{ v\big(f_i(0)\big) \big\} + v\big(F(0)\big) + K_1 \tag{1.9}$$

avec $K_1 = -\min_{1 \leq i \leq n+1} \big\{ v(a_i) \big\}$,

$$T\Big(\lambda, \frac{F}{G}\Big) \leq \mathcal{T}(\lambda, f) + K_2 \tag{1.10}$$

où K_2 est une constante qui dépend de F et G et non pas de λ.

Démonstration.— La formule (0.1) donne

$$\begin{aligned} N\Big(\lambda, \frac{1}{F}\Big) &= v\Big(\frac{1}{F}, \lambda\Big) + v\big(F(0)\big) \\ &\leq -\min_{1 \leq i \leq n+1} \big\{ v(a_i) \big\} - \min_{1 \leq i \leq n+1} \big\{ v(f_i, \lambda) \big\} + v\big(F(0)\big) ; \end{aligned}$$

d'où

$$N\Big(\lambda, \frac{1}{F}\Big) \leq K_1 + \mathcal{T}(\lambda, f) - \min_{1 \leq i \leq n+1} \big\{ v\big(f_i(0)\big) \big\} + v\big(F(0)\big) .$$

On a ainsi démontré la première relation. Pour démontrer la seconde on a :

$$T\Big(\lambda, \frac{F}{G}\Big) = m\Big(\lambda, \frac{F}{G}\Big) + N\Big(\lambda, \frac{1}{G}\Big) \ ;$$

d'où

$$T\left(\lambda, \frac{F}{G}\right) = \max\{v(G,\lambda) - v(F,\lambda), 0\} + N\left(\lambda, \frac{1}{G}\right).$$

Donc

$$T\left(\lambda, \frac{F}{G}\right) = -\min\{v(F,\lambda) - v(G,\lambda)\} + v(G,\lambda) + N\left(\lambda, \frac{1}{G}\right).$$

Or par la formule (0.1), on a $v(G,\lambda) + N(\lambda, 1/G) = v\big(G(0)\big)$, d'où

$$T\left(\lambda, \frac{F}{G}\right) = -\min\{v(F,\lambda) - v(G,\lambda)\} + v(G,\lambda) + v\big(G(0)\big).$$

Donc

$$T\left(\lambda, \frac{F}{G}\right) \leq -\min_{1\leq i,j\leq n+1}\{v(a_i), v(b_j)\} - \min_{1\leq i\leq n+1}\{v(f_i,\lambda)\} + v\big(G(0)\big),$$

d'où $T(\lambda, F/G) \leq \mathcal{T}(\lambda, f) + K_2$, avec

$$K_2 = -\min_{1\leq i\leq n+1}\{v\big(f_i(0)\big)\} - \min_{1\leq i,j\leq n+1}\{v(a_i), v(b_j)\} + v\big(G(0)\big).$$

Remarque 1.13.— $T(\lambda, f_i/f_j) \leq \mathcal{T}(\lambda, f) + K$ pour $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$.

2. Deuxième théorème fondamental

En vue d'étendre le théorème 0.4 aux courbes holomorphes, nous allons démontrer les résultats préliminaires qui suivent.

LEMME 2.1.— *Soient $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ linéairement indépendantes et n'ayant aucun zéro commun. Soit un entier $q > m$. On considère q combinaisons linéaires de $f_1, \ldots, f_m$:*

$$F_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \quad \textit{pour } j = 1, \ldots, q,$$

telles que toutes m fonctions parmi les F_j soient linéairement indépendantes. Soit $x \in \mathbb{C}_p$ tel que

$$v\big(F_1(x)\big) \leq v\big(F_2(x)\big) \leq \cdots \leq v\big(F_q(x)\big).$$

Alors pour tout $i \leq m$ et tout $j \leq q - m + 1$, on a

$$v\big(f_i(x)\big) \geq v\big(F_j(x)\big) - K, \tag{2.1}$$

où $K \in \mathbb{R}$ ne dépend que des a_{ij} et non pas de x.

Démonstration.— Considérons les $m-1$ fonctions F_{q-m+2}, F_{q-m+3}, F_q. Pour tout $j \leq q-m+1$, les f_i $(i \leq m)$ sont des combinaisons linéaires de F_{q-m+2}, F_{q-m+3}, F_j, ..., F_q. Comme les coefficients qui interviennent dépendent seulement des a_{ij}, on a

$$v\big(f_i(x)\big) \geq \min\left\{v\big(F_j(x)\big)\,,\, v\big(F_{q-m+2}(x)\big), \ldots, v\big(F_q(x)\big)\right\} - K$$

d'où $v\big(f_i(x)\big) \geq v\big(F_j(x)\big) - K$.

COROLLAIRE 2.2.— *Pour tout $x \in \mathbb{C}_p$, il y a au moins $q-m+1$ fonctions F_j telles que $F_j(x) \neq 0$.*

Démonstration.— Soit $x \in \mathbb{C}_p$. Si, pour l'un des $j \leq q-m+1$, on avait $F_j(x) = 0$, on aurait d'après le lemme 2.1 :

$$v\big(f_i(x)\big) = +\infty \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, m\,.$$

Ce qui signifie que les f_i ont un zéro commun contrairement à l'hypothèse.

COROLLAIRE 2.3.— *Avec les notations et hypothèses du lemme 2.1, on considère la fonction holomorphe $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^{m-1}$ dont une représentation holomorphe est*

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}.$$

On suppose que $f_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$. Alors on a

$$(q-m)\mathcal{T}(\lambda, f) \leq -\min\big\{v(F_{j_1} \ldots F_{j_{q-m}}\,, \lambda)\big\} + \mathrm{O}(1)\,, \quad \lambda \to -\infty \quad (2.2)$$

le minimum étant pris sur les $(q-m)$-uplets d'entiers distincts appartenant à $\{1, \ldots, q\}$.

Démonstration.— Les conditions du lemme 2.1 impliquent qu'aucune fonction parmi les f_i ou les F_j n'est identiquement nulle. Soit $\lambda > -\infty$. Pour tout x tel que $v(x) \geq \lambda$ et tout $i \leq m$, on a d'après le lemme 2.1 :

$$(q-m)v\big(f_i(x)\big) \geq \min\left\{v\big(F_{j_1} \ldots F_{j_{q-m}}(x)\big)\right\} - (q-m)K\,,$$

le minimum portant sur les $(q-m)$-uplets d'entiers distincts appartenant à $\{1, \ldots, q\}$. D'où

$$(q-m) \inf_{v(x)\geq\lambda} \{v(f_i(x))\} \geq \inf_{v(x)\geq\lambda} \{\min\{v(F_{j_1} \ldots F_{j_{q-m}}(x))\} - (q-m)K\}.$$

Donc

$$(q-m) \inf_{v(x)\geq\lambda} \{v(f_i(x))\} \geq \min \inf_{v(x)\geq\lambda} \{v(F_{j_1} \ldots F_{j_{q-m}}(x))\} - (q-m)K\,.$$

Par suite, on a pour tout i

$$(q-m)v(f_i, \lambda) \geq \min\{v(F_{j_1} \ldots F_{j_{q-m}}, \lambda)\} - (q-m)K\ ;$$

d'où

$$(q-m) \min_{1\leq i\leq m} \{v(f_i, \lambda)\} \geq \min\{v(F_{j_1} \ldots F_{j_{q-m}}, \lambda)\} - (q-m)K\ ;$$

et enfin

$$\begin{aligned}(q-m)T(\lambda, f) \leq -\min\{v(F_{j_1} \ldots F_{j_{q-m}}, \lambda)\} &+ \\ + (q-m)\left\{K + \min_{1\leq i\leq m} \{v(f_i(0))\}\right\}&.\end{aligned}$$

Afin de justifier les notations et résultats qui suivent, nous faisons un commentaire.

Commentaire 2.4.— De la formule (0.7) on déduit que

$$(q-2)\,T(\lambda, \phi) \leq \sum_{i=1}^{q} N_1\left(\lambda\,, \frac{1}{\phi - a_i}\right) + S(\lambda, \phi)\,. \tag{2.3}$$

Or si l'on pose $\phi = \phi_1/\phi_2$ avec $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ sans zéros communs et telles que $\phi_1(0) \neq 0$ et $\phi_2(0) \neq 0$, la formule ci-dessus s'écrit

$$(q-2)\,T(\lambda, \phi) \leq \sum_{i=1}^{q} N_1\left(\lambda\,, \frac{1}{\phi_1 - a_i\phi_2}\right) + S(\lambda, \phi)\,. \tag{2.4}$$

Ainsi, on voit que la somme $\sum_{i=1}^{q} N_1(\lambda\,, 1/(\phi_1 - a_i\phi_2))$ est liée aux q combinaisons linéaires $\phi_1 - a_i\phi_2$ des deux fonctions entières ϕ_1 et ϕ_2.

Ceci nous conduit à faire les notations suivantes.

Notations 2.5.— Si F est une fonction entière non nulle, $m \geq 1$ et $\lambda > -\infty$, on note $\rho_m(\lambda, F)$ le nombre de zéros de F sur le cercle $v(x) = \lambda$, chaque zéro étant compté autant de fois que son ordre de multiplicité si cet ordre est inférieur où égal à m et m fois dans le cas contraire. On pose alors

$$N_m\left(\lambda, \frac{1}{F}\right) = \sum_{\mu \geq \lambda} \rho_m\left(\lambda, \frac{1}{F}\right)[\mu - \lambda]. \tag{2.5}$$

Soit $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

une représentation holomorphe de f telle que $f_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n+1$. Soit F une combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_{n+1}$ telle que $F(0) \neq 0$. Pour tout $m \geq 1$, on pose

$$\delta(F) = 1 - \liminf_{\lambda \to -\infty} \frac{N(\lambda, 1/F)}{\mathcal{T}(\lambda, f)} \quad \text{et} \quad \delta_m(F) = 1 - \liminf_{\lambda \to -\infty} \frac{N_m(\lambda, 1/F)}{\mathcal{T}(\lambda, f)}. \tag{2.6}$$

Il est clair qu'on a

$$0 \leq \delta(F) \leq \delta_1(F) \leq \delta_2(F) \leq \ldots \leq 1. \tag{2.7}$$

Ces notations généralisent celles des théorème 0.4 et corollaire 0.5.

THÉORÈME 2.6 (généralisation du théorème 0.4).— *Soient $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et*

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

une représentation holomorphe de f telle que $f_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n+1$. On suppose que le wronskien $\mathcal{W}(f_1, \ldots, f_{n+1})$ des fonctions $f_1, \ldots, f_{n+1}$ est non-identiquement nul. Soient $q > n+1$ et $F_1, \ldots, F_q$ combinaisons linéaires des fonctions entières $f_1, \ldots, f_{n+1}$. On suppose que toutes $n+1$ fonctions parmi les F_i sont linéairement indépendantes et que $F_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n+1$. On a alors :

$$(q - n - 1)\mathcal{T}(\lambda, f) \leq \sum_{i=1}^{q} N_n\left(\lambda, \frac{1}{F_i}\right) + \mathrm{O}(1), \quad \lambda \to -\infty. \tag{2.8}$$

Remarque 2.7.— On voit que la relation (2.4) est la cas particulier de la relation (2.8) où $n = 1$.

Pour démontrer le théorème 2.6 on a besoin des lemmes suivants.

LEMME 2.8.— *Pour toute $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ tout $j \geq 0$ et tout $\lambda < 0$, on a*

$$m\left(\lambda, \frac{\phi^{(j)}}{\phi}\right) = 0 . \tag{2.9}$$

Pour la démonstration voir [1].

LEMME 2.9.— *Soient F une fonction entière et a un zéro de F d'ordre ℓ. Alors pour tout $j \geq 0$, a est un pôle de $F^{(j)}/F$ d'ordre $\leq \min(\ell, j)$.*

Démonstration.— Posons $F(x) = (x-a)^\ell G(x)$, avec $G(a) \neq 0$. Par la formule de Leibniz, il vient pour $j \geq 0$

$$F^{(j)}(x) = \sum_{0 \leq i \leq \min(\ell, j)} \binom{i}{j} \frac{\ell!}{(\ell-i)!} (x-a)^{\ell-i} G^{(j-i)}(x) .$$

On a donc

$$\frac{F^{(j)}(x)}{F(x)} = \sum_{0 \leq i \leq \min(\ell, j)} \binom{i}{j} \frac{\ell!}{(\ell-i)!} (x-a)^{-i} G^{(j-i)}(x) .$$

Par suite a est un pôle de $F^{(j)}(x)/F(x)$ d'ordre $\leq \min(\ell, j)$.

Démonstration du théorème 2.6.— Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ sont $n+1$ entiers distincts de $\{1, \ldots, q\}$, on note $\beta_1, \ldots, \beta_{q-n-1}$ les autres $q-n-1$ entiers de $\{1, \ldots, q\}$. On a par hypothèse

$$\mathcal{W}(f_1, \ldots, f_{n+1}) = c(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \mathcal{W}(F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_{n+1}}) \neq 0$$

où $c(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ est une constante; d'où

$$\frac{F_1 \ldots F_q}{\mathcal{W}(f_1, \ldots, f_{n+1})} = \frac{F_1 \ldots F_q}{c(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \mathcal{W}(F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_{n+1}})} ,$$

par suite, on a

$$\frac{F_1 \ldots F_q}{\mathcal{W}(f_1, \ldots, f_{n+1})} \frac{\mathcal{W}(F_{\beta_1}, \ldots, F_{\beta_{q-n-1}})}{D(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})} , \tag{2.10}$$

où

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = c(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ F'_{\alpha_1}/F_{\alpha_1} & \ldots & F'_{\alpha_{n+1}}/F_{\alpha_{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F^{(n)}_{\alpha_1}/F_{\alpha_1} & \ldots & F^{(n)}_{\alpha_{n+1}}/F_{\alpha_{n+1}} \end{pmatrix} . \tag{2.11}$$

Donc le second membre de l'égalité (2.10) est une fonction méromorphe $H(x)$ de $\mathbb{C}_p$ dans $\mathbb{P}^1$ qui ne dépend pas de $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$. D'où

$$\min\{v(F_{\beta_1}, \ldots, F_{\beta_{q-n-1}}, \lambda)\} = v(H, \lambda) + \min\{v(D(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}))\}, \tag{2.12}$$

le minimum étant pris sur les $(q-n-1)$-uplets $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ d'éléments distincts de $\{1, \ldots, q\}$.

Nous allons minorer $v(H, \lambda)$. Comme aucune des fonctions $F_1, \ldots, F_q$ ne s'annule en zéro, la relation (2.11) montre que

$$H(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad D(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})(0) \neq \infty .$$

Si $H(x)$ admet un pôle d'ordre k en zéro, alors $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})(x)$ admet un zéro de même ordre k en zéro. Donc la fonction

$$G(x) = x^k H(x) = x^k \frac{\mathcal{W}(F_{\beta_1}, \ldots, F_{\beta_{q-n-1}})}{D(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})}$$

n'a ni zéro ni pôle à l'origine et la formule de Jensen (0.1) nous donne

$$v(G(0)) = v(G, \lambda) + \sum_{\mu \geq \lambda} [z(\mu, G) - p(\mu, G)](\mu - \lambda),$$

d'où

$$\begin{aligned} v(G(0)) &\leq v(G, \lambda) + \sum_{\mu \geq \lambda} z(\mu, G)(\mu - \lambda) \leq \\ &\leq k\lambda + v(H, \lambda) + N\left(\lambda, \frac{1}{x^k H}\right) . \end{aligned}$$

D'où enfin

$$v(H, \lambda) \geq -N\left(\lambda, \frac{1}{x^k H}\right) + O(1), \quad \lambda \to \infty . \tag{2.13}$$

D'autre part, si $\alpha \in \mathbb{C}_p$ est un zéro de $H(x)$ d'ordre $\ell(a)$, le corollaire 2.2 permet de choisir $\beta_1(a), \ldots, \beta_{q-n-1}(a)$ tels que $F_{\beta_1}(a) \neq 0, \ldots, F_{\beta_{q-n-1}}(a) \neq 0$. Donc a est un pôle d'ordre $\ell(a)$ du $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ correspondant. Or on a

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = c(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n+1} \frac{F_{\alpha_i}^{(\sigma(i)-1)}}{F_{\alpha_i}}, \qquad (2.14)$$

où σ parcourt le groupe symétrique $\mathcal{S}_{n+1}$.

Pour tout $j = 1, \ldots, q$, soit $\ell_j(a)$ l'ordre de a en tant que pôle de F_j, ($\ell_j = 0$ si a n'est pas un pôle de F_j). Du lemme 2.9 et de la relation (2.14) il vient que a est un pôle de $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ d'ordre inférieur ou égal à $\max\{\sum_{i=1}^{n+1} \min\{(\sigma(i)-1), \ell_{\alpha_i}\}\}$. Or on a

$$\max\{\sum_{i=1}^{n+1} \min\{(\sigma(i)-1), \ell_{\alpha_i}\} \leq \sum_{i=1}^{n+1} \min\{n, \ell_{\alpha_i}\} \leq \sum_{j=1}^{q} \min\{n, \ell_j\},$$

d'où

$$\ell(a) \leq \sum_{j=1}^{q} \min\{n, \ell_j(a)\}. \qquad (2.15)$$

Maintenant

$$N\left(\lambda, \frac{1}{x^k H}\right) = \sum_{\substack{v(a)\geq\lambda \\ H(a)=0}} \sum_{j=1}^{q} \min\{n, \ell_j(a)\}\left[v(a) - \lambda\right].$$

D'où, d'après (2.15) :

$$N\left(\lambda, \frac{1}{x^k H}\right) \leq \sum_{j=1}^{q} \sum_{\substack{v(a)\geq\lambda \\ H(a)=0}} \min\{n, \ell_j(a)\}\left[v(a) - \lambda\right]$$

et donc (§ 2.5) :

$$N\left(\lambda, \frac{1}{x^k H}\right) \leq \sum_{j=1}^{q} N_n\left(\lambda, \frac{1}{F_j}\right).$$

D'où, d'après (2.13) :

$$v(H, \lambda) \geq -\sum_{j=1}^{q} N_n\left(\lambda, \frac{1}{F_j}\right) + \mathrm{O}(1), \quad \lambda \to -\infty. \qquad (2.16)$$

La relation (2.12) nous donne

$$\min\left\{v\big((F_{\beta_1},\,\ldots,\,F_{\beta_{q-n-1}})\,,\lambda\big)\right\} \geq$$
$$\geq -\sum_{j=1}^{q} N_n\left(\lambda,\frac{1}{F_j}\right) + \min\{v\big(D(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_{n+1})\,,\lambda\big)\} + \mathrm{O}(1)\,,\quad \lambda\to-\infty\,. \tag{2.17}$$

Or du lemme 2.8 et de (2.14), il vient

$$v\big(D(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_{n+1})\,,\lambda\big) =$$
$$= v\big(c(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_{n+1})\big) + v\left(\sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n+1}\frac{F_{\alpha_i}^{(\sigma(i)-1)}}{F_{\alpha_i}}\,,\lambda\right) \geq$$
$$\geq v\big(c(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_{n+1})\big) + \min_\sigma\left\{v\left(\prod_{i=1}^{n+1}\frac{F_{\alpha_i}^{(\sigma(i)-1)}}{F_{\alpha_i}}\,,\lambda\right)\right\}\,,$$

d'où

$$v\big(D(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_{n+1})\,,\lambda\big) \geq$$
$$\geq v\big(c(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_{n+1})\big) + \min_\sigma\left\{\sum_{i=1}^{n+1} v\left(\frac{F_{\alpha_i}^{(\sigma(i)-1)}}{F_{\alpha_i}}\,,\lambda\right)\right\}$$
$$\geq v\big(c(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_{n+1})\big)\,.$$

En reportant dans (2.17), on obtient :

$$\min\left\{v\big(F_{\beta_1},\,\ldots,\,F_{\beta_{q-n-1}}\,,\lambda\big)\right\} \geq -\sum_{j=1}^{q} N_n\left(\lambda,\frac{1}{F_j}\right) + \mathrm{O}(1)\,,\quad \lambda\to-\infty\,. \tag{2.18}$$

Or la relation (2.2) écrite pour $m = n+1$ donne

$$(q-n-1)\mathcal{T}(\lambda,f) \leq -\min\left\{v\big(F_{\beta_1},\,\ldots,\,F_{\beta_{q-n-1}}\,,\lambda\big)\right\} + \mathrm{O}(1)\,,\quad \lambda\to-\infty\,. \tag{2.19}$$

D'où par (2.18) et (2.19) :

$$(q-n-1)\mathcal{T}(\lambda,f) \leq \sum_{j=1}^{q} N_n\left(\lambda,\frac{1}{F_j}\right) + \mathrm{O}(1)\,,\quad \lambda\to-\infty\,. \tag{2.20}$$

COROLLAIRE 2.10 ((généralisation du corollaire 0.5)).— *Sous les mêmes conditions que celles du théorème 2.6, on a*

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_n(F_j) \leq n+1\,. \tag{2.21}$$

3. Applications

3.1 Équation fonctionnelle

Soient $n \geq 1$ et $f_1, \ldots, f_{n+1}$ des fonctions p-adiques entières. Pour tout $i = 1, \ldots, n+1$, soit

$$m_i = \begin{cases} \inf \left\{ \operatorname{ord}_x \dfrac{f_i}{x} \in \mathbb{C}_p \right\} & \text{si } f_i \text{ admet des zéros} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc tout zéro de f_i est d'ordre de multiplicité $\geq m_i$.

Proposition 3.1.— *On suppose qu'aucune des f_i n'est constante, $f_i(0) \neq 0$ et que les f_i sont linéairement indépendantes et vérifient*

$$f_1 + \cdots + f_{n+1} = 1\,. \tag{3.1}$$

Alors on a

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{m_i} \geq \frac{1}{n}\,. \tag{3.2}$$

Démonstration.— D'après la relation (3.1) les f_i ne s'annulent simultanément en aucun point ; donc

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

est une courbe holomorphe de $\mathbb{C}_p$ dans $\mathbb{P}^n$. Considérons les combinaisons linéaires suivantes des f_i

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1 \\ f_2 &= f_2 \\ &\vdots \\ f_{n+1} &= f_{n+1} \\ 1 &= f_1 + \cdots + f_{n+1}\,. \end{aligned}$$

Toutes les conditions sont réunies pour appliquer le corollaire 2.10. D'où

$$\delta_n(1) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta_n(f_i) \leq n+1 \,. \tag{3.3}$$

Or on a $\delta_n(1) = 1$ et

$$N_n\left(\lambda, \frac{1}{f_i}\right) = nN_1\left(\lambda, \frac{1}{f_i}\right) \leq \frac{n}{m_i} N\left(\lambda, \frac{1}{f_i}\right) \,.$$

D'après la formule de Jensen on a

$$N\left(\lambda, \frac{1}{f_i}\right) = -v(f_i, \lambda) + \mathrm{O}(1) \leq \mathcal{T}(\lambda, f) \,,$$

d'où

$$\delta_n(f_i) \geq 1 - \frac{n}{m_i} \,.$$

On termine en reportant dans (3.3).

On remarque que la conclusion de cette proposition reste vraie si les f_i sont supposées non polynomiales et si au second membre de (3.1) on a un polynôme non nul.

3.2 Unicité projective

Soient $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^n$ une fonction holomorphe et

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

une représentation holomorphe de f telle que $f_i(0) \neq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n+1$. Si un hyperplan H, défini par $a_1 z_1 + \cdots + a_{n+1} z_{n+1} = 0$, ne contient pas $f(\mathbb{C}_p)$, on définit la fonction entière $F_H^f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ par

$$F_H^f(x) = a_1 f_1(x) + \cdots + a_{n+1} f_{n+1}(x) \,.$$

On définit alors une fonction $\nu(f, H)$ de $\mathbb{C}_p$ dans $\mathbb{N}$ par

$$\nu(f, H)(x) = \mathrm{ord}_x(F_H^f) \,.$$

DÉFINITION 3.2.— *On dit que la courbe holomorphe f rencontre l'hyperplan H si $\nu(f,H) \not\equiv 0$.*

DÉFINITION 3.3.— *Une famille $H_1, \ldots, H_q$ $(q > n+1)$ d'hyperplans est dite en position générale si à chaque fois que $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{P}^n$ est une courbe holomorphe non constante, toutes $n+1$ fonctions parmi les $F^f_{H_1}, \ldots, F^f_{H_q}$ sont linéairement indépendantes.*

THÉORÈME 3.4.— *On considère $n+1$ courbes holomorphes non constantes*

$$f^i = \begin{pmatrix} f^i_1 \\ \vdots \\ f^i_{n+1} \end{pmatrix} \quad \textit{pour } i = 1, \ldots, n+1\,.$$

Soient $H_1, \ldots, H_{2n+3}$ des hyperplans en position générale. On suppose que $\nu(f^i, H_k) \equiv \nu(f^j, H_k)$ pour $1 \leq i,\ j \leq n+1$ et $1 \leq k \leq 2n+3$. Alors, on a

$$\det(f^1, \ldots, f^{n+1}) := \begin{vmatrix} f^1_1 & \cdots & f^{n+1}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^1_{n+1} & \cdots & f^{n+1}_{n+1} \end{vmatrix} \equiv 0\,.$$

Démonstration.— Posons $F^i_k = F^{f^i}_{H_k}$ pour tout i et tout k. La formule (2.8) appliquée avec $q = 2n+3$ donne pour tout i :

$$(n+2)\mathcal{T}(\lambda, f^i) \leq \sum_{k=1}^{2n+3} N_n\left(\lambda, \frac{1}{F^i_k}\right) + \mathrm{O}(1)\,, \quad \lambda \to -\infty\,. \tag{3.4}$$

Pour k fixe soit F_k une fonction entière ayant pour zéros tous les zéros communs aux F^i_k, $i = 1, \ldots, n+1$, et telle que pour tout $a \in \mathbb{C}_p$:

$$\mathrm{ord}_a(F_k) = \min_{1 \leq i \leq n+1} \nu(f^i, H_k)(a)\,.$$

Donc, tout zéro de F_k est d'ordre de multiplicité le minimum des ordres qu'il a en tant que zéro des F^i_k. On a

$$N_n\left(\lambda, \frac{1}{F^i_k}\right) \leq N_n\left(\lambda, \frac{1}{F_k}\right) + \left\{N\left(\lambda, \frac{1}{F^i_k}\right) - N\left(\lambda, \frac{1}{F_k}\right)\right\}\,. \tag{3.5}$$

En effet si pour $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$, on note $\ell_a = \max(0\,,\, \mathrm{ord}_a(\phi))$, on a

$$N(\lambda, \phi) = \sum_{v(x)\geq\lambda} \ell_a\left(\frac{1}{\phi}\right)[v(x)-\lambda]$$

et

$$N_n(\lambda, \phi) = \sum_{v(x)\geq\lambda} \min\left(n\,,\, \ell_a\left(\frac{1}{\phi}\right)\right)[v(x)-\lambda]\,.$$

Or pour $a \in \mathbb{C}_p$ on a

$$\min(n\,,\, \ell_a(F_k^i)) \leq \min(n\,,\, \ell_a(F_k)) + \ell_a(F_k^i) - \ell_a(F_k)\,.$$

D'où la relation (3.5) en multipliant par $v(x) - \lambda$ et en sommant sur les x tels que $v(x) \geq \lambda$. De (3.4) et (3.5) on a

$$\begin{aligned}(n+2)\mathcal{T}(\lambda, f^i) \leq \sum_{k=1}^{2n+3} N_n\left(\lambda, \frac{1}{F_k}\right) + \\ + \sum_{k=1}^{2n+3}\left\{N\left(\lambda, \frac{1}{F_k^i}\right) - N\left(\lambda, \frac{1}{F_k}\right)\right\} + \mathrm{O}(1)\,.\end{aligned}$$

Ceci nous donne

$$\begin{aligned}(n+2)\mathcal{T}(\lambda, f^i) \leq (n+1)\sum_{k=1}^{2n+3} N_n\left(\lambda, \frac{1}{F_k}\right) + \\ + \sum_{k=1}^{2n+3}\sum_{i=1}^{n+1}\left\{N\left(\lambda, \frac{1}{F_k^i}\right) - N\left(\lambda, \frac{1}{F_k}\right)\right\} + \mathrm{O}(1)\,.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Posons $F(x) = \det(f^1, \ldots, f^{n+1})$ et supposons $F(x) \not\equiv 0$. Alors tout zéro de F_k est un zéro commun à toutes les F_k^i et est donc un zéro de $F(x)$ au moins du même ordre que relativement à F_k. D'où

$$\sum_{k=1}^{2n+3} N_n\left(\lambda, \frac{1}{F_k}\right) \leq N\left(\lambda, \frac{1}{F}\right)\,. \tag{3.7}$$

Or d'après le premier théorème fondamental, on a

$$N\left(\lambda, \frac{1}{F}\right) \leq T\left(\lambda, \frac{1}{F}\right) + \mathrm{O}(1)\,.$$

Comme F est entière, on a pour λ assez proche de $-\infty$:

$$N\left(\lambda, \frac{1}{F}\right) \leq v\left(\frac{1}{F}, \lambda\right) + \mathrm{O}(1). \tag{3.8}$$

Or on a

$$F(x) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n+1} f^i_{\sigma(i)},$$

d'où

$$\begin{aligned} v\left(\frac{1}{F}, \lambda\right) &\leq -\min_{\sigma}\left\{v\left(\prod_{i=1}^{n+1} f^i_{\sigma(i)}, \lambda\right)\right\} = -\min_{\sigma}\left\{\prod_{i=1}^{n+1} v(f^i_{\sigma(i)}, \lambda)\right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} -\min_{\sigma}\left\{v(f^i_{\sigma(i)}, \lambda)\right\} \leq \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{T}(\lambda, f^i) + \mathrm{O}(1). \end{aligned}$$

Il vient donc

$$N\left(\lambda, \frac{1}{F}\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{T}(\lambda, f^i) + \mathrm{O}(1). \tag{3.9}$$

Des relations (3.6)-(3.9) on a :

$$\begin{aligned} (n+2)\mathcal{T}(\lambda, f^i) \leq (n+1) &\sum_{k=1}^{2n+3} \mathcal{T}(\lambda, f^i) + \\ &+ \sum_{k=1}^{2n+3} \sum_{i=1}^{n+1} \left\{N\left(\lambda, \frac{1}{F^i_k}\right) - N\left(\lambda, \frac{1}{F_k}\right)\right\} + \mathrm{O}(1), \end{aligned} \tag{3.10}$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{T}(\lambda, f^i) \leq \sum_{k=1}^{2n+3} \sum_{i=1}^{n+1} \left\{N\left(\lambda, \frac{1}{F^i_k}\right) - N\left(\lambda, \frac{1}{F_k}\right)\right\} + \mathrm{O}(1). \tag{3.11}$$

Or les identités $\nu(f^i, H_k) \equiv \nu(f^j, h_k)$ se traduisent par la nullité du second membre de l'inégalité (3.11), d'où :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{T}(\lambda, f^i) \leq \mathrm{O}(1).$$

Ce qui signifie que les f^i sont des constantes contrairement à l'hypothèse.