ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JOËLLE BAILET

Régularité de la solution d'un problème mêlé dans un domaine polygonal ou polyédral

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome 5, nº 1 (1996), p. 5-27

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1996_6_5_1_5_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. V, n° 1, 1996

Régularité de la solution d'un problème mêlé dans un domaine polygonal ou polyédral[*]

JOËLLE BAILET[1]

RÉSUMÉ. — Nous montrons la régularité $H^s(\Omega)$ pour tout $s < 1+\pi/2\omega$ de la solution d'un problème aux limites elliptiques avec conditions mêlées de type Dirichlet-graphe maximal monotone au voisinage d'un angle non convexe d'ouverture ω. Le même résultat est obtenu au voisinage d'une arête dans un ouvert polyédral de $\mathbb{R}^3$.

ABSTRACT. — We prove a regularity result in $H^s(\Omega)$ for every $s < 1 + \pi/2\omega$ for the solution of an elliptic boundary value problem with mixed boundary condition : Dirichlet-maximal monotone graph near a non convex angle of measure ω. The same result is proved near the vertices of a polyedral open set in $\mathbb{R}^3$.

1. Introduction

1.1 Le problème en dimension 2

Soit Ω un ouvert plan polygonal de frontière

$$\Gamma = \left(\bigcup_{i\in D}\Gamma_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in G}\Gamma_j\right), \quad D\cup G = [1\,,N]\,.$$

On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & (\Omega) \\ u = 0 & (\Gamma_i),\ i\in D \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \nu_j} \in \beta_j(u) & (\Gamma_j),\ j \in G \end{cases} \tag{P}$$

[*] Reçu le 2 novembre 1993

[1] Département de Mathématiques, 22, B.P. 582, Abidjan (Cote d'Ivoire)
Adresse actuelle : Mission française de Coopération et d'Action Culturelle B.P. 2175, Brazzaville (Congo)

$\partial/\partial\nu_j$ désigne la dérivée normale à Γ_j, orientée vers l'extérieur de Ω. Pour tout $j \in G$, $\beta_j : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ est un graphe maximal monotone (Brézis [3]) différent de celui correspondant à la condition de Dirichlet (à savoir $\beta(0) = \mathbb{R}$, $\beta(t) = \emptyset$ si $t \neq 0$). $S_i = (\overline{\Gamma}_i) \cap (\overline{\Gamma}_{j+1})$ est un sommet de Ω et on note par ω_i la mesure de l'angle intérieur à Ω_i au point S_i.

Il est bien connu que ce problème admet une unique solution variationnelle dans $H^1(\Omega)$ et que de plus à l'intérieur de Ω la solution a la régularité H^2. La régularité de u dépend donc de sa régularité au voisinage des sommets du polygone. On s'intéressera plus précisément ici à la régularité de la solution au voisinage d'un sommet S_i, dont l'angle ω_i est non convexe ($\omega_i > \pi$) avec des conditions aux limites de type mêlées (en S_i, Γ_i est tel que $i \in D$, Γ_{i+1} est tel que $i+1 \in G$). La contrainte $\pi/\omega < 1$ permettra d'obtenir l'inclusion $H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\Omega) \subset W^{1,2}_{-\pi/2\omega}(\Omega)$, il sera alors licite d'appliquer la proposition 2.1 à u.

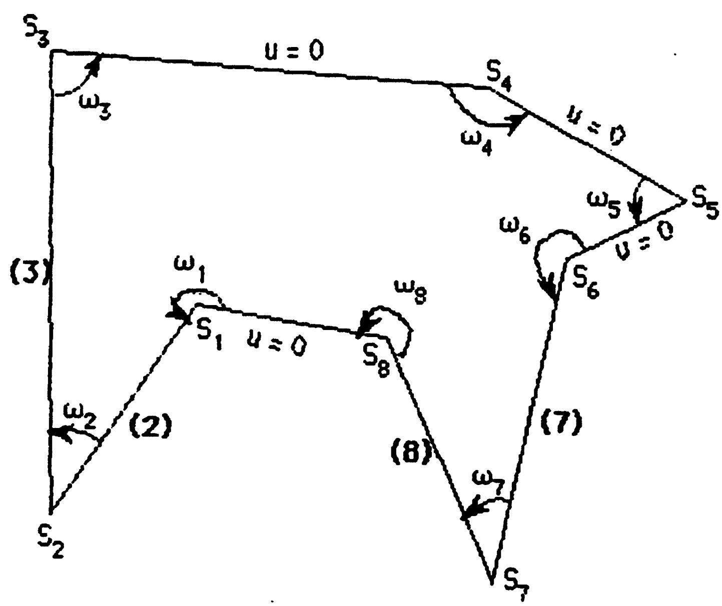

Fig. 1

(2) $\quad -\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta_2(u)$ $\qquad$ (7) $\quad -\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta_7(u)$

(3) $\quad -\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta_3(u)$ $\qquad$ (8) $\quad -\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta_8(u)$

Pour les autres sommets du polygone ne rentrant pas dans ce cadre on supposera qu'on a la régularité H^2, il suffit pour cela que $\omega_i \leq \pi$ si Γ_i et Γ_{i+1} sont tels que i et $i+1$ appartiennent à D ou bien $\omega_i \leq \pi/2$ si Γ_i et Γ_{i+1} sont tels que i et $i+1$ appartiennent à G.

En posant

$$\omega = \max_{i\in[1,N]} \{\omega_i \mid \omega_i > \pi\}$$

on a

$$L^2_{-\pi/2\omega}(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\Omega) \;\Big|\; \int_\Omega \left| r^{-\pi/2\omega} f \right|^2 r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta < +\infty \right\}$$

r, θ désignant les coordonnées polaires, on prouvera le résultat suivant.

THÉORÈME 1.1.— *Pour tout f dans $L^2_{-\pi/2\omega}(\Omega)$ la solution u de (P) appartient à $H^s(\Omega)$ pour tout $s < 1 + \pi/2\omega$.*

Dans le cas où β_{i+1} est le graphe correspondant à la condition de Neumann ($\beta(t) = 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$) (problème mêlé Dirichlet–Neumann), la solution a la régularité $H^{1+(\pi/2\omega)}$ (Grisvard [1]).

Dans le cas où β_{i+1} est le graphe correspondant à la condition aux limites de Signorini ($\beta(t) = \emptyset$ si $t < 0$, $\beta(0) = \left]-\infty\,,0\right[$, $\beta(t) = 0$ si $t > 0$)(problème mêlé Dirichlet–Signorini), la solution a encore la régularité $H^{1+(\pi/2\omega)}$ (Moussaoui [5]).

Le résultat démontré pour $\pi \leq \omega \leq 2\pi$ est donc le meilleur possible.

Compte tenu des inclusions des espaces de Sobolev avec poids (Avantaggiati [4]) on a :

$$L^2_{-\pi/2\omega}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^2_{-(\pi/2\omega)+1}(\Omega)$$

grâce aux théorèmes d'immersion des espaces de Sobolev on déduit le résultat suivant.

PROPOSITION 1.1.— *Pour tout f dans $L^2_{-\pi/2\omega}(\Omega)$ la solution u de (P) appartient à l'espace de Hölder $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour tout $\alpha < \pi/2\omega$.*

1.2 Le problème en dimension 3

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de la forme $\Omega \times \,]0\,,\,h\,[$ où Ω est un ouvert polygonal du même type que celui considéré en dimension 2 et

$$\Gamma = \left(\bigcup_{i\in D} \Gamma_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in G} \Gamma_j\right)$$

la frontière de Ω.

On considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & (\mathcal{O} = \Omega \times \,]0\,,\,h\,[) \\ u = 0 & (\mathcal{G}_i = \Gamma_i \times \,]0\,,\,h\,[\cup \Omega \times \{0\} \cup \Omega \times \{h\}),\ i \in D \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \nu_j} \in \beta_j(u) & (\mathcal{G}_j = \Gamma_j \times \,]0\,,\,h\,[),\ j \in G. \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

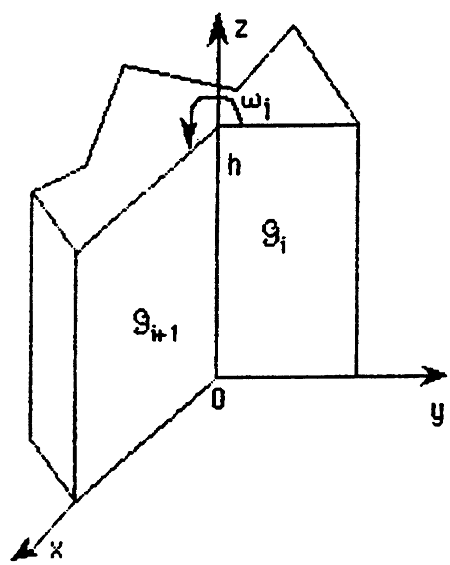

Fig. 2

On s'intéresse aux dièdres non convexes du polyèdre ($\omega_i > \pi$) et on supposera que sur les faces de ces dièdres les conditions aux limites sont mêlées : $\mathcal{G}_i$ est tel que $i \in D$, $\mathcal{G}_{i+1}$ est tel que $i+1 \in G$, β_j est un graphe maximal monotone distinct du graphe correspondant à la condition aux limites de Dirichlet comme dans le cas de la dimension 2.

Au voisinage des autres arêtes du polyèdre, on suppose qu'on a la régularité H^2 de la solution variationnelle u de (P) de la même manière qu'en dimension 2.

On prouvera le résultat suivant, où $\omega = \max_{i\in[1,N]}\{\omega_i \mid \omega_i > \pi\}$.

THÉORÈME 1.2.— *Pour tout* $f \in L^2(]1, h[, L^2_{-\pi/2\omega}(\Omega))$, *la solution* u *de (P) appartient à* $H^s(\mathcal{O})$, *pour tout* $s < 1 + (\pi/2\omega)$.

2. Inégalités de type Poincaré

2.1 Inégalité de type Poincaré dans un secteur angulaire

Soit

$$\Sigma = \{(r,\theta) \mid 0 < r < 0\,,\ 0 < \theta < \omega\}$$

et

$$\Gamma' = \{(r,\theta) \mid r = R \text{ ou } \theta = 0\}\,, \quad \Gamma = \partial\Sigma\,.$$

Soit

$$W^1_{\alpha/2}(\Sigma) = \left\{u \in \mathcal{D}'(\Sigma) \;\middle|\; \int_\Sigma u^2 r^\alpha\,\mathrm{d}x < +\infty \text{ et } \int_\Sigma |\nabla u|^2 r^\alpha\,\mathrm{d}x < +\infty\right\}.$$

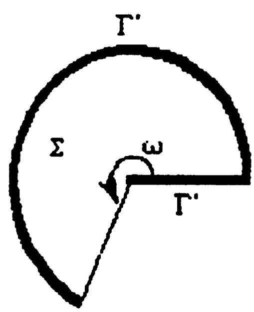

Fig. 3

PROPOSITION 2.1.— *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$. Pour tout*

$$u \in \mathcal{V} = \{v \in W^1_{\alpha/2}(\Sigma) \mid v = 0 \ \mathit{sur}\ \Gamma'\}$$

on a :

$$\int_\Sigma u^2 r^{\alpha-2}\,\mathrm{d}x \le \frac{4}{\alpha^2 + (\pi^2/\omega^2)} \int_\Sigma |\nabla u|^2 r^\alpha\,\mathrm{d}x\,.$$

Démonstration.— Par densité il suffit de démontrer cette relation pour des fonctions de $\mathcal{C}^2(\overline{\Sigma})$ (Avantaggiati [4]).

Considérons la forme bilinéaire continue et coercitive sur $\mathcal{V}$:

$$a(u,v) = \int_\Sigma \overrightarrow{\nabla u} \cdot \overrightarrow{\nabla v}\, r^\alpha\,\mathrm{d}x\,.$$

Compte tenu de la formule du Min-Max (Dautray–Lions [6]), trouver la meilleure constante telle que l'inégalité annoncée ait lieu est équivalent à trouver la première valeur propre non nulle du problème suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{r^{\alpha-2}}\operatorname{div}\big(r^\alpha(\overrightarrow{\nabla} u)\big) = \lambda u & (\Sigma) \\ u = 0 & (\Gamma') \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & (\Gamma/\Gamma'). \end{cases}$$

En coordonnées polaires

$$\frac{1}{r^{\alpha-2}}\operatorname{div}\big(r^\alpha(\overrightarrow{\nabla} u)\big) = r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (\alpha+1) r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\,.$$

Considérons l'opérateur :

$$\begin{aligned} \Lambda : H^2(]\,0\,,\omega\,[) &\longrightarrow L^2(]\,0\,,\omega\,[) \\ \varphi &\longrightarrow -\varphi'' \end{aligned}$$

de domaine

$$D(\Lambda) = \{\varphi \in H^2(]\,0\,,\omega\,[) \mid \varphi(0) = 0\,,\ \varphi'(\omega) = 0\}\,.$$

Les fonctions

$$\varphi_k(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\omega}}\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega}\,\theta\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

forment un système orthonormé de $L^2(]0\,,\,\omega\,[)$ qui diagonalise Λ, les valeurs propres correspondantes étant

$$\lambda_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{\omega^2}\,.$$

En développant v selon cette base $v(r,\theta) = \sum_k v_k(r)\varphi_k(\theta)$, et grâce à l'identité de Bessel :

$$\int_0^\omega \left|v(r,\theta)\right|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_k \left|v_k(r)\right|^2$$

$$\begin{aligned}\int_0^\omega \left|\nabla v(r,\theta)\right|^2 \mathrm{d}\theta &= \int_0^\omega \left(\left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^2 + \left|\frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \theta}\right|^2\right) \mathrm{d}\theta \\ &= \sum_k \left(\left|v_k'(r)\right|^2 + \frac{1}{r^2}\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{\omega^2}\left|v_k(r)\right|^2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^R \int_0^\omega \left|\nabla v(r,\theta)\right|^2 r^\alpha \,\mathrm{d}\theta\, r\,\mathrm{d}r \geq \sum_k \int_0^R r^\alpha \left|v_k'(r)\right|^2 r\,\mathrm{d}r\, + \\ + \frac{\pi^2}{4\omega^2}\sum_k \int_0^R r^{\alpha-2}\left|v_k(r)\right|^2 r\,\mathrm{d}r\,.\end{aligned}$$

Si $v_k(0) = 0$, $\alpha < 0$ en appliquant une inégalité de Hardy à chaque v_k (Kondratiev [2]) :

$$\int_0^R r^{\alpha-2}\left|v_k(r)\right|^2 r\,\mathrm{d}r \leq \frac{4}{\alpha^2}\int_0^R r^\alpha \left|v_k'(r)\right|^2 r\,\mathrm{d}r$$

alors

$$\begin{aligned}\int_0^R \int_0^\omega \left|\nabla v(r,\theta)\right|^2 r^\alpha \,\mathrm{d}\theta\, r\,\mathrm{d}r \geq \frac{\alpha^2}{4}\sum_k \int_0^R r^{\alpha-2}\left|v_k(r)\right|^2 r\,\mathrm{d}r\, + \\ + \frac{\pi^2}{4\omega^2}\sum_k \int_0^R r^{\alpha-2}\left|v_k(r)\right|^2 r\,\mathrm{d}r\,;\end{aligned}$$

finalement

$$\int_\Sigma r^{\alpha-2}\left|v(r,\theta)\right|^2 \mathrm{d}x \leq \frac{4}{\alpha^2 + (\pi^2/\omega^2)}\int_\Sigma r^\alpha \left|\nabla v(r,\theta)\right|^2 \mathrm{d}x\,.$$

Il reste à démontrer que $v_k(0) = 0$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$,

$$\int_\Sigma |\nabla v|^2 r^\alpha \,\mathrm{d}x < +\infty \Longrightarrow \sum_k \int_0^R r^\alpha \big|v_k'(r)\big|^2 r \,\mathrm{d}r < +\infty$$
$$\Longrightarrow \int_0^R r^\alpha \big|v_k'(r)\big|^2 r \,\mathrm{d}r < +\infty \,.$$

En écrivant $v_k(t) = \int_0^t v_k'(r)\,\mathrm{d}r$, alors

$$\begin{aligned}\big|v_k(t_1) - v_k(t_2)\big| &= \left|\int_{t_1}^{t_2} v_k'(r)\,\mathrm{d}r\right| \leq \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} r^{(\alpha+1)/2}\big|v_k'(r)\big| r^{-(\alpha+1)/2}\,\mathrm{d}r \\ &\leq \left(\int_{t_1}^{t_2} r^\alpha \big|v_k'(r)\big|^2 r\,\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_1}^{t_2} r^{-(\alpha+1)}\,\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\frac{t_2^{-\alpha} - t_1^{-\alpha}}{-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_1}^{t_2} r^\alpha \big|v_k'(r)\big|^2 r\,\mathrm{d}r\right)\end{aligned}$$

sachant que $\alpha < 0$, $|t_1 - t_2| \to 0 \Rightarrow \big|v_k(t_1) - v_k(t_2)\big| \to 0$ et la continuité de $v_k(t)$ sur $[\,0\,,\,+\infty[$ résulte du critère de Cauchy.

Si $v_k(0) \neq 0$, de la continuité de v_k en zéro on déduit l'existence d'un $\eta > 0$ tel que $\forall\ r \in [\,0\,,\,\eta\,]$

$$\big|v_k(r)\big| \geq \frac{1}{2}\,\big|v_k(0)\big|$$

et

$$\int_0^\eta r^{\alpha-2}\big|v_k(r)\big|^2 r\,\mathrm{d}r \geq \left(\frac{1}{2}\,\big|v_k(0)\big|\right)^2 \int_0^\eta r^{\alpha-1}\,\mathrm{d}r = +\infty \quad \text{car } \alpha < 0\,,$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

2.2 Inégalité dans un dièdre de $\mathbb{R}^3$

En coordonnées cylindriques, soit :

$$S = \{(r, \theta, z) \mid 0 < r < R,\ 0 < \theta < \omega\,,\ 0 < z < h\}\,,$$

$$S = \Sigma \times \,]\,0\,, h\,[\,, \quad G' = \Gamma' \times \,]\,0\,, h\,[\,,$$

$$\mathcal{V} = \{u \in \mathcal{D}'(G) \mid \text{pour tout } z \in \,]\,0\,, h\,[\,,\ u(r,\,\theta,\,z) \in W^1_{\alpha/2}(\Sigma)\}\,.$$

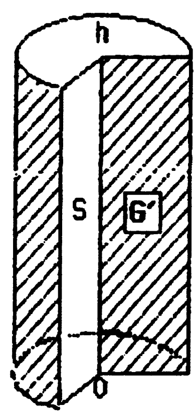

Fig. 4

PROPOSITION 2.2.— *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$. Pour tout $u \in H^1(S)$ tel que pour chaque $z \in \,]\,0\,, h\,[\,$, $u(r, \theta, z) \in \mathcal{V}$, on a :*

$$\int_S u^2 r^{\alpha-2}\,\mathrm{d}x \le \frac{4}{\alpha^2 + (\pi^2/\omega^2)} \int_S |\nabla u|^2 r^\alpha\,\mathrm{d}x\,.$$

Démonstration.— Le résultat est évident.

3. Le problème en dimension 2

Le problème approché

Soit

$$\beta_{j,\lambda} = \frac{1}{\lambda}(\mathrm{id} + \lambda\beta_j)^{-1}, \quad \lambda > 0,$$

les régularisées de Yosida du graphe β_j (Brézis [3]). Pour tout $\lambda > 0$, $\beta_{j,\lambda}$ est une fonction lipschitzienne croissante telle que $\beta_{j,\lambda}(0) = 0$.

Le problème approché :

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda + u_\lambda = f & (\Omega) \\ u_\lambda = 0 & (\Gamma_i) \\ -\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} = \beta_{j,\lambda}(u_\lambda) & (\Gamma_j) \end{cases} \qquad (\mathrm{P}_\lambda)$$

admet une unique solution variationnelle u_λ dans $H^1(\Omega)$.

3.1 Régularité de la solution u_λ de (P_λ)

Pour pouvoir appliquer la proposition 2.1 à u_λ il est nécessaire d'avoir un peu plus de régularité sur celle-ci.

(P_λ) est un problème de type mêlé non homogène et sachant que $u_\lambda \in H^{1/2}(\Gamma_j)$ et $\beta_{j,\lambda}$ est lipschitzienne, $\beta_{j,\lambda}(u_\lambda) \in H^{1/2}(\Gamma_j)$.

Le polygone présente deux types de sommets :

- les sommets près desquels l'ouvert est non convexe; les conditions aux limites sont telles que les conditions de "raccord faible" (Grisvard [1]) sont satisfaites, en effet la condition :

$$\int_0^{\delta_j} \frac{\left|\beta_{j,\lambda}\left(u_\lambda(x_j(\sigma))\right) - \beta_{j+1,\lambda}\left(u_\lambda(x_j(-\sigma))\right)\right|^2}{\sigma}\, \mathrm{d}\sigma < +\infty \text{ pour } 1 \le j \le N$$

devient

$$\int_0^{\delta_j} \frac{\left|\beta_{j,\lambda}\left(u_\lambda(x_j(\sigma))\right)\right|^2}{\sigma}\, \mathrm{d}\sigma < +\infty \quad \text{pour } 1 \le j \le N$$

car sur Γ_{j+1} on a $u_\lambda = 0$; ce qui exprime seulement que $\beta_{j,\lambda}(u_\lambda) \in H^{1/2}(\Gamma_j)$;

- les sommets près desquels les conditions aux limites ne sont pas du type Dirichlet-graphe ; l'angle est tel que la régularité H^2 est assurée.

Loin des sommets il est bien connu que u_λ a la régularité H^2. Au voisinage V_i d'un sommet S_i d'angle ω_i où le problème est mêlé, la solution u_λ a une partie singulière qui est de la forme :

- si $\omega_i \in \,]\,\pi\,,\,2\pi\,]\setminus\{3\pi/2\}$,

$$r^{\pi/2\omega_i}\cos\frac{\pi}{2\omega_i}\,\theta + r^{3\pi/2\omega_i}\cos\frac{3\pi}{2\omega_i}\,\theta \in H^{1+(\pi/2\omega_i)-\varepsilon}(V_i)\,,\quad \varepsilon>0\,;$$

- si $\omega_i = 3\pi/2$,

$$r\{\log r\cos\theta - \theta\sin\theta\} \in H^{2-\varepsilon}(V_i)\,,\quad \varepsilon>0\,.$$

Étant donné qu'on a supposé que $\omega_i \le \pi$ si j et $j+1 \in \mathcal{D}$, ou $\omega_i \le \pi/2$ si j et $j+1 \in \mathcal{N}$ de telle sorte que $u_\lambda \in H^2$ au voisinage de ces sommets, et en appelant $\omega = \max\omega_i$, on a au moins $u_\lambda \in H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\Omega)$.

En utilisant les inclusions des espaces de Sobolev avec poids (Avantaggiati [4]) :

$$H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\Omega) \subset W^{1,2}_{-\pi/2\omega}(\Omega) =$$
$$\left\{u\in\mathcal{D}'(\Omega)\;\Big|\;\int_\Omega|\nabla u|^2 r^{-\pi/\omega}\,\mathrm{d}x < +\infty\,,\;\int_\Omega|u|^2 r^{-\pi/\omega}\,\mathrm{d}x < +\infty\right\}.$$

3.2 Estimations sur u_λ

Soit S un des sommets de Ω. Quitte à faire une translation et une rotation, ce qui laisse le problème invariant, on peut supposer que S est à l'origine des coordonnées et que au voisinage de S, Ω est inclus dans un secteur angulaire d'ouverture ω. φ étant une fonction de troncature convenable, $v_\lambda = \varphi(r)u_\lambda$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta v_\lambda + v_\lambda = g & (\Sigma)\\ v_\lambda = 0 & (\Gamma_1\cup\Gamma_0)\\ -\dfrac{\partial v_\lambda}{\partial\nu} = \varphi\beta_\lambda(u_\lambda) & (\Gamma_2)\end{cases}$$

où

$$g = \varphi f + \left(\varphi''(r) + \frac{1}{2}\,\varphi'(r)\right)u_\lambda + 2\varphi'(r)\frac{\partial u_\lambda}{\partial r} \in L^2$$

car $u_\lambda \in H^1$,

$$\Sigma = \{(r,\theta) \mid 0 < r < R\,,\ 0 < \theta < \omega\}$$

$$\Gamma_0 = \{(r,\theta) \mid r = R\,,\ 0 \le \theta \le \omega\}$$
$$\Gamma_1 = \{(r,\theta) \mid \theta = 0\,,\ 0 < r < R\}$$
$$\Gamma_2 = \{(r,\theta) \mid \theta = \omega\,,\ 0 < r < R\}\,.$$

Premières estimations

Par souci de clarté nous omettrons l'indice λ pour u et v. En multipliant l'équation par $r^\alpha v$ et en intégrant sur Ω :

$$\begin{aligned}\int_\Sigma (-\Delta v + v) v r^\alpha \,\mathrm{d}x = \int_\Sigma |\nabla v|^2 r^\alpha \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Sigma v^2\, \Delta r^\alpha \,\mathrm{d}x \,+ \\ + \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{\partial r^\alpha}{\partial \nu}\, v^2 \,\mathrm{d}\sigma + \int_{\Gamma_2} \varphi^2 \beta_\lambda(u) u r^\alpha \,\mathrm{d}\sigma \\ + \int_\Sigma v^2 r^\alpha \,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

or

$$\int_\Gamma \frac{\partial r^\alpha}{\partial \nu}\, v^2 \,\mathrm{d}\sigma = 0$$

et β_λ étant une fonction croissante telle que $\beta_\lambda(0) = 0$,

$$\int_{\Gamma_2} \varphi^2 \beta_\lambda(u) u \,\mathrm{d}\sigma \ge 0\,;$$

d'autre part, $\Delta r^\alpha = \alpha^2 r^{\alpha-2}$. Finalement

$$\int_\Sigma |\nabla v|^2 r^\alpha \,\mathrm{d}x - \frac{\alpha^2}{2}\int_\Sigma v^2 r^{\alpha-2} \,\mathrm{d}x + \int_\Sigma v^2 r^\alpha \,\mathrm{d}x \le \int_\Sigma g v r^\alpha \,\mathrm{d}x\,.$$

En utilisant la proposition 2.1 (ce qui est possible si $\alpha \ge -\pi/\omega$), on obtient :

$$\left(1 - \frac{4}{\alpha^2 + \pi^2/\omega^2}\,\frac{\alpha^2}{2}\right)\int_\Sigma |\nabla v|^2 r^\alpha \,\mathrm{d}x + \int_\Sigma v^2 r^\alpha \,\mathrm{d}x \le \int_\Sigma g v r^\alpha \,\mathrm{d}x\,.$$

$$1 - \frac{4}{\alpha^2 + \pi^2/\omega^2}\,\frac{\alpha^2}{2} > 0 \iff |\alpha| < \frac{\pi}{\omega}\,.$$

Sous cette contrainte pour α, on obtient :

$$\int_{\Sigma} |\nabla v|^2 r^{\alpha} \, \mathrm{d}x \leq C_1(\alpha, \omega) \int_{\Sigma} g^2 r^{\alpha} \, \mathrm{d}x \tag{3.1}$$

$$\int_{\Sigma} v^2 r^{\alpha} \, \mathrm{d}x \leq C_2(\alpha, \omega) \int_{\Sigma} g^2 r^{\alpha} \, \mathrm{d}x \tag{3.2}$$

et en utilisant de nouveau la proposition 2.1

$$\int_{\Sigma} v^2 r^{\alpha-2} \, \mathrm{d}x \leq C_3(\alpha, \omega) \int_{\Sigma} g^2 r^{\alpha} \, \mathrm{d}x \,, \tag{3.3}$$

C_1, C_2, C_3 sont des constantes ne dépendant que de α et de ω (et non de λ).

Quotients différentiels radiaux

Nous allons maintenant utiliser une technique de quotients différentiels adaptée à la géométrie de l'ouvert.

Posons

$$v_h = \frac{v(re^h, \theta) - v(r, \theta)}{h} \,,$$

v_h est solution du problème :

$$\left\{ \begin{aligned} -\Delta v_h + v_h &= \frac{1}{r^2} \, \frac{r^2 e^{2h} g(re^h, \theta) - r^2 g(r, \theta)}{h} \\ &= \frac{1}{r^2} \left(r^2 g\right)_h && (\Sigma) \\ v_h(r, 0) &= \frac{v(re^h, 0) - v(r, 0)}{h} = 0 && (\Gamma_1) \\ v_h(R, \theta) &= \frac{\varphi(Re^h) u(Re^h, \theta) - \varphi(R) u(R, \theta)}{h} = 0 && (\Gamma_0) \\ -\frac{\partial v_h}{\partial \nu} &= \varphi(r) \frac{\beta_\lambda\big(u(re^h, \theta)\big) - \beta_\lambda\big(u(r, \theta)\big)}{h} && (\Gamma_2). \end{aligned} \right. \tag{$P_{\lambda,k}$}$$

• La condition aux limites sur Γ_2 pour v_h étant de nature différente de la condition aux limites sur Γ_2 pour v (ou u) on est amené à calculer de nouveau le produit

$$\int_{\Sigma} (-\Delta v_h + v_h) v_h r^{\alpha} \, \mathrm{d}x$$

et en tenant compte des conditions aux limites on obtient :

$$\int_\Sigma (-\Delta v_h + v_h) v_h r^\alpha \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_\Sigma |\nabla v_h|^2 r^\alpha \,\mathrm{d}x - \frac{\alpha^2}{2}\int_\Sigma v_h^2 r^{\alpha-2}\,\mathrm{d}x + \int_\Sigma v_h^2 r^\alpha \,\mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{1}{h^2}\int_{\Gamma_2} \varphi^2(r)\Big(\beta_\lambda\big(u(re^h,\omega)\big) - \beta_\lambda\big(u(r,\omega)\big)\Big)\big(u(re^h,\omega) - u(r,\omega)\big)\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

Cette dernière intégrale de bord est positive pour tout graphe monotone β, en effet si β_λ est son approchante de Yosida, on a :

$$\forall\,(s,t)\in\mathbb{R}^2,\quad \big(\beta_\lambda(s) - \beta_\lambda(t)\big)(s-t) \ge 0\,.$$

D'autre part, v_h appartenant à $H^1(\Sigma)$ (puisque $v\in H^1(\Sigma)$) et vérifiant $v_h = 0$ sur $\Gamma_0\cup\Gamma_1$, on peut lui appliquer la proposition 2.1; d'où, avec $|a| < \pi/\omega$:

$$C_4(\alpha,\omega)\int_\Sigma |\nabla v_h|^2 r^\alpha\,\mathrm{d}x + \int_\Sigma v_h^2 r^\alpha\,\mathrm{d}x \le \int_\Sigma \frac{1}{r^2}\,(r^2 g)_h v_h r^\alpha\,\mathrm{d}x \tag{3.4}$$

où $C_4(\alpha,\omega)$ est une constante indépendante de h et de λ.

• Nous allons maintenant chercher une majoration de la norme de $(1/r^2)(r^2 g)_h$ indépendante de h.

Par densité, il suffit de considérer le cas où $g\in\mathcal{D}(\overline{\Sigma})$. Posons $\gamma(t) = e^{2th}g(re^{th},\theta)$ alors

$$\gamma'(t) = 2h\,e^{2th}g(re^{th},\theta) + rh\,e^{3th}\frac{\partial g}{\partial r}(re^{th},\theta)\,,$$

et

$$\frac{1}{r^2}\,(r^2 g)_h = \frac{e^{2h}g(re^h,\theta) - g(r,\theta)}{h} = \frac{\gamma(1)-\gamma(0)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \Big(2\,e^{2th}g(re^{th},\theta) + re^{3th}\frac{\partial g}{\partial r}(re^{th},\theta)\Big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Soit $w\in\mathcal{D}(\overline{\Sigma})$, on a

$$\left|\int_\Sigma \frac{1}{r^2}\,(r^2 g)_h w r^\alpha\,\mathrm{d}x\right| =$$

$$= \left|\int_\Sigma\int_0^1 \Big(2\,e^{2th}g(re^{th},\theta) + r\,e^{3th}\frac{\partial g}{\partial r}(re^{th},\theta)\Big)\,wr^\alpha\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\le 2\left|\int_\Sigma\int_0^1 e^{2th}g(re^{th},\theta)w(r,\theta)r^\alpha\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| +$$

$$+ \left|\int_\Sigma\int_0^1 re^{3th}\frac{\partial g}{\partial r}(re^{th},\theta)w(r,\theta)r^\alpha\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right|$$

et

$$\left|\int_\Sigma\int_0^1 e^{2th} g(re^{th},\theta)w(r,\theta)r^\alpha \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| \leq$$
$$\leq \left(\int_\Sigma\int_0^1 \left|r^{(\alpha/2)+1}e^{2th}g(re^{th},\theta)\right|^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left(\int_\Sigma\int_0^1 \left|r^{(\alpha/2)-1}w(r,\theta)\right|^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Posons $\rho = re^{th}$ dans la première intégrale du produit. Ce changement de variable laisse globalement invariant le secteur Σ d'où :

$$\int_\Sigma\int_0^1 \left|r^{(\alpha/2)+1}e^{2th}g(re^{th},\theta)\right|^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 e^{-\alpha th}\int_{\Sigma_h} \left|\rho^{(\alpha/2)+1}g(\rho,\theta)\right|^2 \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}t$$

et finalement :

$$\left|\int_\Sigma\int_0^1 e^{2th} g(re^{th},\theta)w(r,\theta)r^\alpha \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| \leq$$
$$\leq \mathrm{Sup}(1,e^{-\alpha R})\left\|r^{(\alpha/2)+1}g\right\|_{L^2(\Sigma)}\left\|r^{(\alpha/2)-1}w\right\|_{L^2(\Sigma)} .$$

- En utilisant le même changement de variables que précédemment :

$$\left|\int_\Sigma\int_0^1 re^{3th}\frac{\partial g}{\partial r}(re^{th},\theta)w(r,\theta)r^\alpha \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right| =$$
$$= \left|\int_{\Sigma_h}\int_0^1 \rho\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta)w(\rho e^{-th},\theta)e^{-\alpha th}\rho^\alpha\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t\right|$$
$$= \left|-\int_{\Sigma_h}\int_0^1 e^{-\alpha th}\left((\alpha+1)\rho^\alpha w(\rho e^{-th},\theta) + \right.\right.$$
$$\left. + \rho^{\alpha+1}\frac{\partial w}{\partial \rho}(\rho e^{-th},\theta)e^{-th}\right) g(\rho,\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t +$$
$$\left. + \int_{\Gamma_h}\int_0^1 \nu_\rho e^{-\alpha th}\rho^{\alpha+1}w(\rho e^{-th},\theta)g(\rho,\theta)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}t\right|$$

sur $\Gamma_{0,h}$, $g(\rho,\theta)=0$ à cause de la fonction de troncature $\varphi(r)$; sur $\Gamma_{1,h}$ et $\Gamma_{2,h}$, $\nu_\rho=0$; l'intégrale de bord est donc nulle. Majorons chacune des deux intégrales sur Σ_h :

$$\left|\int_{\Sigma_h}\int_0^1 e^{-\alpha th}\rho^\alpha w(\rho e^{-th},\theta)g(\rho,\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t\right| \leq$$
$$\leq \left(\int_{\Sigma_h}\int_0^1 \left|e^{-\alpha th}\rho^{(\alpha/2)-1}w(\rho e^{-th},\theta)\right|^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left(\int_{\Sigma_h}\int_0^1 \left|\rho^{(\alpha/2)+1}g(\rho,\theta)\right|^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

en utilisant le changement de variables inverse dans le premier terme du produit :

$$\leq \mathrm{Sup}(1,e^{-\alpha R})\left\|r^{(\alpha/2)-1}w\right\|_{L^2(\Sigma)}\left\|r^{(\alpha/2)+1}g\right\|_{L^2(\Sigma)}.$$

De la même façon

$$\left|\int_{\Sigma_h}\int_0^1 e^{-(\alpha+1)th}\rho^{\alpha+1}\frac{\partial w}{\partial\rho}(\rho e^{-th},\theta)g(\rho,\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t\right| \leq$$
$$\leq \left(\int_{\Sigma_h}\int_0^1 \left|e^{-(\alpha+1)th}\rho^{\alpha/2}\frac{\partial w}{\partial\rho}(\rho e^{-th},\theta)\right|^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left(\int_{\Sigma_h}\int_0^1 \left|\rho^{\alpha+2}g(\rho,\theta)\right|^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \mathrm{Sup}(1,e^{-\alpha R})\left\|r^{\alpha/2}\nabla w\right\|_{L^2(\Sigma)}\left\|r^{(\alpha/2)+1}g\right\|_{L^2(\Sigma)}.$$

Par densité, on peut appliquer le calcul précédent à v_h; on obtient en regroupant les différentes majorations obtenues :

$$\left|\int_\Sigma \frac{1}{r^2}\left(r^2 g\right)_h v_h r^\alpha\,\mathrm{d}x\right| \leq$$
$$\leq \mathrm{Sup}(1,e^{-\alpha R})\left\{(\alpha+3)\left\|r^{(\alpha/2)-1}v_h\right\|_{L^2(\Sigma)} + \left\|r^{\alpha/2}\nabla v_h\right\|_{L^2(\Sigma)}\right\} \times$$
$$\times \left\|r^{(\alpha/2)+1}g\right\|_{L^2(\Sigma)}.$$

Enfin en appliquant la proposition 2.1 à v_h, on obtient :

$$\left|\int_\Sigma \frac{1}{r^2}\left(r^2 g\right)_h v_h r^\alpha \, \mathrm{d}x\right| \leq K(\alpha,\omega)\left\|r^{\alpha/2}\nabla v_h\right\|_{L^2(\Sigma)}\left\|r^{(\alpha/2)+1}g\right\|_{L^2(\Sigma)} \tag{3.5}$$

où

$$K(\alpha,\omega) = \operatorname{Sup}(1, e^{-\alpha R})\left(\frac{4}{\alpha^2+\pi^2/\omega^2}(\alpha+3)+1\right)$$

est indépendante de h et λ.

En reportant (3.5) dans (3.4), on obtient :

$$\left\|r^{\alpha/2}\nabla v_h\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C_5(\alpha,\omega)\left\|r^{(\alpha/2)+1}g\right\|_{L^2(\Sigma)} \tag{3.6}$$

où $C_5(\alpha,\omega)$ est indépendante de h et λ.

Sachant que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(v(re^h,\theta)-v(r,\theta)\right) = r\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta)\,,$$

quitte à extraire une sous-suite par rapport à h et compte tenu de l'unicité de la solution de $(\mathrm{P}_{\lambda,h})$ on en déduit que :

$$r^{\alpha/2}\nabla\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) \in L^2(\Sigma)$$

d'où

$$r^{\alpha/2}\left(r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{\partial v}{\partial r}\right) \in L^2(\Sigma) \quad \text{et} \quad r^{\alpha/2}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\theta} \in L^2(\Sigma)\,;$$

sachant que $r^{\alpha/2}\partial v/\partial r \in L^2(\Sigma)$, on obtient finalement :

$$\left\|r^{(\alpha/2)+1}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C_5(\alpha,\omega)\left\|r^{(\alpha/2)+1}g\right\|_{L^2(\Sigma)}$$

et

$$\left\|r^{(\alpha/2)+1}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r\partial\theta}\right)\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C_5(\alpha,\omega)\left\|r^{(\alpha/2)+1}g\right\|_{L^2(\Sigma)}.$$

Revenant à l'équation et en utilisant les majorations précédentes :

$$\begin{aligned} r^{(\alpha/2)+1}g \in L^2(\Sigma) &\Longrightarrow r^{(\alpha/2)+1}(-\Delta v+v) \in L^2(\Sigma) \\ &\Longrightarrow \left\|r^{(\alpha/2)+1}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C_6(\alpha,\omega)\left\|r^{(\alpha/2)+1}g\right\|_{L^2(\Sigma)} \end{aligned}$$

où C_5 et C_6 ne dépendent que de α et de ω.

3.3 Espaces de Sobolev avec poids

En regroupant les différentes majorations obtenues :

$$v \in \overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{(\alpha/2)+1}(\Sigma) = \{u \in \mathcal{D}'(\Sigma) \mid r^{(\alpha/2)-1}u \in L^2(\Sigma)\,,\ r^{\alpha/2}\nabla u \in L^2(\Sigma)\,,\ r^{(\alpha/2)+1}D^2u \in L^2(\Sigma)\}$$

et

$$\|v\|_{W^{2,2}_{(\alpha/2)+1}(\Sigma)} \le C(\alpha,\omega)\|r^{\alpha/2}g\|_{L^2(\Sigma)}\ ;$$

or compte tenu des théorèmes d'immersion dans les espaces de Sobolev avec poids (Avantaggiati [4]),

$$\overset{\circ}{W}{}^{2,2}_{(\alpha/2)+1}(\Sigma) \hookrightarrow H^{1-\alpha/2}(\Sigma)\,,$$

on avait comme contrainte $|\alpha| < \pi/\omega$ d'où

$$\|v\|_{H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\Sigma)} \le C\|r^{-\pi/2\omega}g\|_{L^2(\Sigma)}$$

où C est une constante qui ne dépend que de ω.

3.4 Passage à la limite en λ

En applelant ω le plus grand des angles de l'ouvert, on obtient pour u_λ la majoration

$$\|u_\lambda\|_{H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\Omega)} \le \{\text{constante indépendante de } \lambda\}\,.$$

Quitte à extraire une sous-suite u_{λ_j} :

$$u_{\lambda_j} \underset{\lambda_j \to 0}{\longrightarrow} v \text{ faiblement dans } H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\Omega), \text{ fortement dans } H^1(\Omega)\,.$$

Par ailleurs (Brézis [3]) :

- $u_{\lambda_j} = \underset{W}{\mathrm{Min}}\, \varphi_\lambda(v)$ où

$$\varphi_\lambda(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |v|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} |j_\lambda(v)|\,\mathrm{d}\sigma$$

  avec $\partial j_\lambda = \alpha_\lambda$, $W = \{v \in H^1(\Omega) \mid v_{\Gamma_1} = 0\}$ et u_{λ_j} est l'unique solution de (P_λ);

- $u = \operatorname*{Min}_{W} \varphi(v)$ où

$$\varphi(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\Omega} |v|^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} j(v) \, \mathrm{d}\sigma$$

avec $\partial j = \alpha$ et u est l'unique solution de (P) ;

- $u_\lambda \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} v$ fortement dans $H^1(\Omega)$

On en déduit que $u = v$ et par suite la solution de (P) est dans $H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$.

En appliquant des théorèmes d'immersion (Grisvard [1]) on déduit que $u \in C^{0,\pi/2\omega}(\overline{\Omega})$.

4. Le problème en dimension 3

Problème approché

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda + u_\lambda = f & (\mathcal{O} = \Omega \times \,]0\,,h[) \\ u_\lambda = 0 & (\mathcal{G}_0 = \Gamma_0 \times \,]0\,,h[\, \cup \Omega \times \{0\} \cup \Omega \times \{h\}) \\ -\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} = \beta_\lambda(u_\lambda) & (\mathcal{G}_1 = \Gamma_1 \times \,]0\,,h[). \end{cases} \qquad (\mathrm{P}_\lambda)$$

Par résolution variationnelle (P_λ) admet une unique solution u_λ dans $H^1(\mathcal{O})$.

4.1 Régularité de la solution u_λ de (P_λ)

Pour pouvoir appliquer la proposition 2.2 à u_λ il est nécessaire d'avoir un peu plus de régularité sur u_λ pour les variables r et θ ; plus précisément : pour chaque $z \in \,]0\,,h[$ le problème (P_λ) devient

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda + u_\lambda = f & (\Omega \times \{z\}) \\ u_\lambda = 0 & (\Gamma_0 \times \{z\}) \\ -\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} = \beta_\lambda(u_\lambda) & (\Gamma_1 \times \{z\}). \end{cases}$$

On est ramené à un problème en dimension 2 et, pour chaque z appartenant à l'arête du dièdre, on obtient un sommet pour $\Omega \times \{z\}$, l'ouverture de l'angle étant ω (ω est indépendant de z). Comme précédemment :

$$u_\lambda(r,\theta,z) = u_1(r,\theta,z) + c_0(z) r^{\pi/2\omega}\varphi_0(\theta) + c_1(z) r^{3\pi/2\omega}\varphi_1(\theta)$$

$c_1(z)$ étant nulle si $\omega \in \,]\pi\,,\,3\pi/2\,[$ et $u_1 \in H^2(\mathcal{O})$. On en déduit alors que $u_\lambda \in \big(H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\Omega \times \{z\}), H^1(0,h)\big)$ et par suite vérifie pour chaque $z \in \,]\,0\,,\,h\,[$:

$$\int_0^\omega \int_0^R \left(\left| \frac{\partial u_\lambda}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta} \right|^2 \right) r^{-\pi/\omega} r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta < +\infty$$

$$\int_0^\omega \int_0^R u^2 r^{-(\pi/\omega)-2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta < +\infty\,.$$

4.2 Estimations sur u_λ

Soit A une arête de Ω, après translation et rotation on peut supposer que l'arête coïncide avec l'axe $0z$ et au voisinage de A, Ω est inclus dans un dièdre d'angle ω. φ étant une fonction de troncature, $v_\lambda = \varphi(r)u_\lambda$ est solution du problème :

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta v_\lambda + u_\lambda = g & (\mathcal{O} = \Omega \times \,]\,0\,,\,h\,[) \\ v_\lambda = 0 & (\mathcal{G}_0 = \Gamma_0 \times \,]\,0\,,\,h\,[\, \cup \Omega \times \{0\} \cup \Omega \times \{h\}) \\ -\dfrac{\partial v_\lambda}{\partial \nu} = \varphi\beta_\lambda(u_\lambda) & (\mathcal{G}_1 = \Gamma_1 \times \,]\,0\,,\,h\,[). \end{array}\right. \qquad (\widetilde{\mathrm{P}_\lambda})$$

De la même manière qu'en dimension 2 et en utilisant la proposition 2.2, nous obtenons les estimations :

$$\big\| r^{\alpha/2} \nabla v_\lambda \big\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq c_1(\alpha,\omega) \big\| r^{\alpha/2} g \big\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

$$\big\| r^{\alpha/2} v_\lambda \big\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq c_2(\alpha,\omega) \big\| r^{\alpha/2} g \big\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

$$\big\| r^{(\alpha/2)-1} v_\lambda \big\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq c_3(\alpha,\omega) \big\| r^{\alpha/2} g \big\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes ne dépendant que de α et ω.

En utilisant la même technique de quotients différentiels radiaux que précédemment (on pose $v_h = 1/h\big(v_\lambda(re^h,\theta,z) - v_\lambda(r,\theta,z)\big)$) on obtient encore

$$\big\| r^{\alpha/2} \nabla v_\lambda \big\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq c_4(\alpha,\omega) \big\| r^{(\alpha/2)+1} g \big\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

et enfin

$$\left\| r^{(\alpha/2)+1} \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial r^2} \right\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq c_4(\alpha,\omega) \left\| r^{(\alpha/2)+1} g \right\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

$$\left\| r^{(\alpha/2)+1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial r \partial \theta} \right) \right\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq c_4(\alpha,\omega) \left\| r^{(\alpha/2)+1} g \right\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

$$\left\| r^{(\alpha/2)+1} \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial r \partial z} \right\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq c_4(\alpha,\omega) \left\| r^{(\alpha/2)+1} g \right\|_{L^2(\mathcal{O})} .$$

On va maintenant utiliser la technique classique des quotients différentiels dans la direction de z pour obtenir une régularité H^2 par rapport à cette variable. Posons

$$v_h(r,\theta,z) = \frac{1}{h} \left(v_\lambda(r,\theta,z+h) - v_\lambda(r,\theta,z) \right)$$

v_h est solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta v_h + v_h = g_h & (\mathcal{O} = \Omega \times \,]0\,,h[) \\ v_h = 0 & (\mathcal{G}_0 = \Gamma_0 \times \,]0\,,h[\,\cup \\ & \quad \cup\, \Omega \times \{0\} \cup \Omega \times \{h\}) \\ -\dfrac{\partial v_h}{\partial \nu} = \dfrac{1}{h}\, \varphi(r) \left(\beta_\lambda(u_\lambda(r,\theta,z+h)) \right. & \\ \qquad \left. -\beta_\lambda(u_\lambda(r,\theta,z)) \right) & (\mathcal{G}_1 = \Gamma_1 \times \,]0\,,h[). \end{array} \right. \qquad (\widetilde{\mathrm{P}_{\lambda,h}})$$

En multipliant l'équation par $v_h r^\alpha$ et en intégrant sur $\mathcal{O}$:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{O}} (-\Delta v_h + v_h) v_h r^\alpha r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z = \\ &\quad = \int_{\mathcal{O}} \left(|\nabla v_h|^2 + v_h^2 \right) r^\alpha r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z - \frac{\alpha^2}{2} \int_{\mathcal{O}} v_h^2 r^{\alpha-2} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z + \\ &\qquad - \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial v_h}{\partial \nu} v_h r^\alpha \,\mathrm{d}\sigma . \end{aligned}$$

Compte tenu des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} -\int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial v_h}{\partial \nu} v_h r^\alpha \,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{h} \int_{\mathcal{G}_1} \varphi^2 \left(\beta_\lambda(u_\lambda(r,\theta,z+h)) - \beta_\lambda(u_\lambda(r,\theta,z)) \right) \times \\ \times \left(u_\lambda(r,\theta,z+h) - u_\lambda(r,\theta,z) \right) \mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

et est donc positif compte tenu des propriétés de β_λ. Finalement en utilisant la proposition 2.2 :

$$c_5(\alpha,\omega)\int_{\mathcal{O}}\left(\left|\nabla v_h\right|^2+v_h^2\right)r^\alpha r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\le\int_{\mathcal{O}}g_h v_h r^\alpha r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,.$$

La majoration

$$\left|\int_{\mathcal{O}}g_h v_h r^\alpha r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\right|\le\left\|r^{\alpha/2}v_h\right\|_{L^2(\mathcal{O})}\left\|r^{\alpha/2}g\right\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

est tout à fait habituelle. On en déduit que

$$c_5(\alpha,\omega)\left\|r^{\alpha/2}\nabla v_h\right\|_{L^2(\mathcal{O})}\le\left\|r^{\alpha/2}g\right\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

où c_5 ne dépend que de α et ω. D'où (en utilisant de plus que $L^2(\mathcal{O})$ avec le poids $\alpha/2$ est inclus algébriquement et topologiquement dans $L^2(\mathcal{O})$ avec le poids $(\alpha/2)+1$) :

$$\left\|r^{(\alpha/2)+1}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial\theta\partial z}\right)\right\|_{L^2(\mathcal{O})}\le c_5(\alpha,\omega)\left\|r^{\alpha/2}g\right\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

$$\left\|r^{(\alpha/2)+1}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial z^2}\right\|_{L^2(\mathcal{O})}\le c_5(\alpha,\omega)\left\|r^{\alpha/2}g\right\|_{L^2(\mathcal{O})}.$$

Enfin en revenant à l'équation et en utilisant les majorations précédentes

$$\left\|r^{(\alpha/2)+1}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial\theta^2}\right\|_{L^2(\mathcal{O})}\le c_6(\alpha,\omega)\left\|r^{\alpha/2}g\right\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

où c_6 ne dépend que de α et ω.

4.3 Passage à la limite de λ

Exactement de la même façon que dans le cas de la dimension 2, on montre que $\left\|u_\lambda\right\|_{H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\mathcal{O})}\le$ constante indépendante de λ; puis, en passant à la limite, on montre que la solution u de (P) appartient à $H^{1+(\pi/2\omega)-\varepsilon}(\mathcal{O})$.

Bibliographie

[1] GRISVARD (P.) .— *Elliptic problems in non smooth domains*, Monographs and Studies in Math. Pitman (1985).

[2] KONDRATIEV (V. A.) .— *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trudy Moskovkoga Mat. Obschetsva **16** (1967), pp. 209-292 (and Transactions of the Moscow Mat. Soc. (1967), pp. 227-313).

[3] BRÉZIS (H.) .— *Monotonocity methods in Hilbert spaces*, Academic Press (1971).

[4] AVANTAGGIATI (A.) .— *Spazi di Sobolev con peso ed alcune applicazioni*, Bolletino U.M.I. **13-A**, n° 5 (1976), pp. 1-52.

[5] MOUSSAOUI (M.) .— *Régularité des solutions d'un problème mêlé Dirichlet-Signorini dans un domaine polygonal plan*, Publications Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, **36** (1990).

[6] DAUTRAY (R.) et LIONS (J.-L.) .— *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques*, Masson (1987).