

OLIVIER SCHNEIDER

**Stabilité des fibrés  $\Lambda^p E_L$  et condition de Raynaud**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 14,  
n° 3 (2005), p. 515-525

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_2005\\_6\\_14\\_3\\_515\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_2005_6_14_3_515_0)

© Université Paul Sabatier, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**Stabilité des fibrés  $\Lambda^p E_L$  et condition de Raynaud<sup>(\*)</sup>**OLIVIER SCHNEIDER<sup>(1)</sup>


---

**RÉSUMÉ.** — Soit  $C$  une courbe lisse de genre  $g \geq 2$  sur  $\mathbb{C}$ . Soit  $L$  un fibré en droites sur  $C$  engendré par ses sections globales et  $E_L$  le fibré dual du noyau du morphisme d'évaluation  $e_L$ . On étudie ici la relation entre la stabilité et la vérification d'une condition  $(R)$  introduite par Raynaud : on démontre que lorsque  $C$  est générale,  $E_L$  est semi-stable ; on prouve ensuite que  $E_L$  vérifie  $(R)$  lorsque  $\deg(L) \geq 2g$  ou bien lorsque  $L$  est générique. Enfin on démontre que pour tout  $p$  dans  $\{2, \dots, \operatorname{rg}(E_L) - 2\}$ , si  $\deg(L) \geq 2g + 2$ ,  $\Lambda^p E_L$  ne vérifie pas  $(R)$ .

**ABSTRACT.** — Let  $C$  be a smooth curve of genus  $g \geq 2$  on  $\mathbb{C}$ . Let  $L$  be a line bundle on  $C$  generated by its global sections and let  $E_L$  be the dual of the kernel of the evaluation map  $e_L$ . We are studying here the relation between the stability the fact that the bundle is verifying a condition  $(R)$  introduced by Raynaud : we prove that  $E_L$  is semi stable when  $C$  is general. We also prove that  $E_L$  is verifying  $(R)$  when  $\deg(L) \geq 2g$  or when  $L$  is generic. Finally we prove that for each  $p$  in  $\{2, \dots, \operatorname{rg}(E_L) - 2\}$ , if  $\deg(L) \geq 2g + 2$  then  $\Lambda^p E_L$  is not verifying  $(R)$ .

---

**1. Introduction**

Soit  $C$  une courbe lisse de genre  $g \geq 2$  sur  $\mathbb{C}$ . Soit  $J$  la Jacobienne de  $C$ . Dans [R], M. Raynaud introduit la condition suivante : un fibré vectoriel  $E$  sur  $C$  vérifie  $(\star)$  si il existe un ouvert non vide  $U$  de  $J$  tel que pour tout  $L$  dans  $U$ ,

$$\min(h^0(E \otimes L), h^1(E \otimes L)) = 0.$$

On remarque que si  $E$  est un fibré vectoriel sur  $C$  de pente  $g - 1$ , vérifiant  $(\star)$ , alors  $E$  est semi-stable. On introduit ici une condition  $(R)$  (qui implique  $(\star)$ ) de façon à pouvoir étendre cette propriété à tous les fibrés de pente entière. Soit  $SU_C(r, \mu)$  l'espace des modules des fibrés semi-stables sur  $C$

---

(\*) Reçu le 17 septembre 2003, accepté le 3 décembre 2004

(1) Laboratoire J.-A. Dieudonné, U.M.R. no 6621 du C.N.R.S., Université de Nice – Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02 (France).  
E-mail : oschneid@math.unice.fr

de fibré déterminant fixé, de pente  $\mu$  et de rang  $r$ . Les fibrés construits par M. Raynaud et par M. Popa (voir [P]) fournissent des exemples de fibrés stables ne vérifiant pas (R). Lorsque  $\mu$  est entier, ces fibrés jouent un rôle crucial dans l'étude du fibré déterminant sur  $SU_C(r, \mu)$  (voir [Be2]). En effet, si on note  $\mathcal{L}$  ce fibré déterminant, on a pour  $E$  dans  $SU_C(r, \mu)$ ,

$$E \text{ ne vérifie pas (R)} \iff E \text{ est un point base de } |\mathcal{L}|.$$

Soit maintenant  $L$  un fibré en droites sur  $C$  engendré par ses sections globales, soit  $M_L$  le noyau du morphisme d'évaluation

$$e_L : H^0(C, L) \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow L.$$

On note  $E_L := M_L^*$ . Lorsque  $\deg(L) \geq 2g + 1$ ,  $E_L$  est stable (voir [E-L]) et si  $\deg(L) = 2g$ , alors  $E_L$  est stable si et seulement si  $L$  est très ample (voir [Be]). On établira ici le résultat suivant :

**THÉORÈME 1.1.** — *Soit  $C$  une courbe lisse générale de genre  $g \geq 3$  sur  $\mathbb{C}$ . Si  $L$  est un fibré en droites sur  $C$  engendré par ses sections globales, alors*

1.  $E_L$  est semi-stable.
2.  $E_L$  vérifie (R) lorsque  $L$  est générique.

De plus, on donnera des exemples de courbes sur lesquelles ces fibrés ne sont pas semi-stables. Enfin on conclura en évoquant le cas des fibrés  $\Lambda^p E_L$  lorsque  $\deg(L) \geq 2g + 2$  : ces fibrés sont semi-stables et on montrera qu'ils ne vérifient pas (R).

## 2. Condition de Raynaud et semi-stabilité

Dans tout ce qui suit  $C$  est une courbe lisse de genre  $g \geq 2$  sur  $\mathbb{C}$ . Pour tout entier  $n$ , on note  $J^n$  la variété qui paramétrise les fibrés en droites de degré  $n$  sur  $C$  ( $J$  si  $n = 0$ ). Soit  $E$  un fibré vectoriel sur  $C$  de rang  $r$  et de degré  $d$ . On dit que  $E$  vérifie la condition (R) si :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \text{ pour } L \text{ générique dans } J^n, h^0(E \otimes L) \text{ ou } h^1(E \otimes L) \text{ est nul.} \quad (R)$$

On a les propriétés suivantes :

- tout fibré en droites vérifie (R).

- si  $E$  vérifie (R), alors :
  - Pour tout fibré en droites  $L$  sur  $C$ ,  $E \otimes L$  vérifie (R).
  - Le dual  $E^*$  de  $E$ , vérifie (R).

Si  $E$  est non nul, on définit sa pente par :

$$\mu(E) := \frac{d}{r}.$$

Rappelons qu'un fibré vectoriel  $E$  sur  $C$  est dit **stable** (resp. **semi-stable**) si tout sous-fibré propre de  $E$  a une pente strictement inférieure (resp. inférieure) à  $\mu(E)$ . On a des propriétés analogues à celles évoquées précédemment pour la condition (R) : tout fibré en droites est stable ; si  $E$  vérifie l'une ou l'autre de ces propriétés de stabilité, il en sera de même pour  $E^*$  et pour  $E \otimes L$ , avec  $L$  un fibré en droites quelconque sur  $C$ .

En fait, pour qu'un fibré  $E$  vérifie (R) il faut et il suffit de vérifier les deux conditions suivantes :

- 1)  $h^1(E \otimes L) = 0$  pour  $L$  fibré en droites sur  $C$  générique de degré  $g - 1 - [\mu(E)]$ .
- 2)  $h^0(E \otimes L) = 0$  pour  $L$  fibré en droites sur  $C$  générique de degré  $g - 1 - \lceil \mu(E) \rceil$ .

En effet, pour tout diviseur  $D$  sur  $C$  de degré positif, pour tout fibré en droites  $M$  sur  $C$ , on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow E \otimes M \longrightarrow E \otimes M(D) \longrightarrow E \otimes \mathcal{O}_D \longrightarrow 0.$$

En écrivant la suite exacte longue d'homologie, on obtient :

$$h^1(C, E \otimes M(D)) \leq h^1(C, E \otimes M)$$

et

$$h^0(C, E \otimes M) \leq h^0(C, E \otimes M(D)).$$

- Si  $n \geq g - 1 - [\mu(E)]$  alors tout fibré en droites générique de degré  $n$  s'écrit  $M(D)$  avec  $M$  un fibré en droites générique de degré  $g - 1 - [\mu(E)]$  et  $D$  un diviseur de degré positif. Comme

$$h^1(C, E \otimes M(D)) \leq h^1(C, E \otimes M),$$

la condition 1) implique que  $h^1(E \otimes L) = 0$  génériquement lorsque  $L$  est fibré en droites sur  $C$  de degré  $n \geq g - 1 - [\mu(E)]$ .

- Si  $n \leq g - 1 - \lceil \mu(E) \rceil$  alors tout fibré en droites générique de degré  $g - 1 - \lceil \mu(E) \rceil$  s'écrit  $M(D)$  avec  $M$  un fibré en droites générique de degré  $n$  et  $D$  un diviseur de degré positif. Comme

$$h^0(C, E \otimes M) \leq h^0(C, E \otimes M(D)),$$

la condition 2) implique que  $h^0(E \otimes L) = 0$  génériquement lorsque  $L$  est un fibré en droites sur  $C$  de degré  $n \leq g - 1 - \lceil \mu(E) \rceil$ .

PROPOSITION 2.1. — *Soit  $C$  une courbe lisse de genre  $g$  sur  $\mathbb{C}$ . Si on a la suite exacte de fibrés vectoriels sur  $C$  suivante*

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

alors

$$E \text{ vérifie } (R) \implies \mu(F) \leq \lceil \mu(E) \rceil \text{ et } \mu(Q) \geq \lfloor \mu(E) \rfloor.$$

*Preuve.* — Pour tout fibré en droites  $L$  on a

$$h^0(C, F \otimes L) \leq h^0(C, E \otimes L).$$

De plus si  $\deg(L) = n$ , on par Riemann-Roch

$$h^0(C, E \otimes L) - h^1(C, E \otimes L) = r(E)(n + \mu(E) - (g - 1)).$$

De la même façon,

$$h^0(C, F \otimes L) - h^1(C, F \otimes L) = r(F)(n + \mu(F) - (g - 1)).$$

Si  $E$  vérifie  $(R)$ , alors pour  $n = g - 1 - \lceil \mu(E) \rceil$ ,

$$h^0(C, F \otimes L) = h^0(C, E \otimes L) = 0.$$

Donc  $\chi(F \otimes L) \leq 0$ , ce qui entraîne la première inégalité.

De la même façon, pour tout fibré en droites  $L$  on a

$$h^1(C, Q \otimes L) \leq h^1(C, E \otimes L),$$

et

$$h^0(C, Q \otimes L) - h^1(C, Q \otimes L) = r(Q)(n + \mu(Q) - (g - 1)).$$

Alors pour  $n = g - 1 - \lfloor \mu(E) \rfloor$ ,

$$h^1(C, Q \otimes L) = h^1(C, E \otimes L) = 0.$$

Donc  $\chi(Q \otimes L) \geq 0$ , ceci entraîne la deuxième inégalité.  $\square$

On voit grâce à ce résultat que si  $\mu(E)$  est entier, la condition  $(R)$  entraîne la semi-stabilité. Par contre la stabilité n'entraîne pas la vérification de la condition  $(R)$  (voir la construction de Raynaud dans [R]).

### 3. Stabilité des fibrés $E_L$

Soit  $L$  un fibré en droites sur  $C$  engendré par ses sections globales ; soit  $M_L$  le fibré vectoriel de rang  $h^0(C, L) - 1$  sur  $C$ , noyau du morphisme d'évaluation :

$$0 \longrightarrow M_L \longrightarrow H^0(C, L) \otimes \mathcal{O}_C \xrightarrow{ev_L} L \longrightarrow 0 \quad (3.1)$$

On définit  $E_L := M_L^*$ . L. Ein et R. Lazarsfeld démontrent dans [E-L], que si  $\deg(L) \geq 2g + 1$ , alors  $E_L$  est stable. Le cas  $\deg(L) = 2g$  est traité par A. Beauville dans [Be] :

**THÉORÈME 3.1** (A. Beauville). — *Si  $\deg(L) = 2g$ , alors  $E_L$  est semi-stable et possède un diviseur thêta. De plus  $E_L$  est stable si et seulement si  $L$  est très ample.*

Traisons maintenant les cas où  $L$  est un fibré en droites de degré inférieur à  $2g$  ; on rappelle la propriété suivante (voir [L]) :

**LEMME 3.2** (R. Lazarsfeld). — *Soit  $C$  une courbe lisse de genre  $g$  sur  $\mathbb{C}$ . Soit  $L$  un fibré en droites sur  $C$ , de degré  $g + d$  ( $d \in \mathbb{Z}$ ) et engendré par ses sections globales. Soient  $x_1, \dots, x_{d+h^1(L)-1}$ , des points distincts sur  $C$  tels que*

$$h^1(L(-\sum x_i)) = h^1(L).$$

On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{d+h^1(L)-1} \mathcal{O}_C(x_i) \longrightarrow E_L \longrightarrow L(-\sum_{i=1}^{d+h^1(L)-1} x_i) \longrightarrow 0.$$

Ceci induit la suite exacte suivante pour tout  $0 \leq p \leq d + h^1(L) - 1$  :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigoplus_{i_1 < \dots < i_p} \mathcal{O}_C(x_{i_1} + \dots + x_{i_p}) \longrightarrow \Lambda^p E_L \\ \longrightarrow \bigoplus_{j_1 < \dots < j_{d+h^1(L)-p}} L(-x_{j_1} - \dots - x_{j_{d+h^1(L)-p}}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

**LEMME 3.3.** — *Soit  $C$  une courbe lisse de genre  $g$  sur  $\mathbb{C}$ . Soit  $L$  un fibré en droites sur  $C$  engendré par ses sections globales. Si  $Q$  est un fibré quotient propre de  $E_L$  de rang  $n$ , alors*

$$h^0(\det Q) \geq n + 1.$$

*Preuve du Lemme 3.3.* — Soit  $g+d$  le degré de  $L$ . Si on note  $h := h^1(L)$ , alors  $r(E_L) = d+h$ . D'après le lemme 3.2, pour tous  $x_1, \dots, x_{d+h-1}$  sur  $C$  tels que  $h^1(L(-\sum x_i)) = h$ , on a

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \bigoplus_{i_1 < \dots < i_n} \mathcal{O}_C(x_{i_1} + \dots + x_{i_n}) \longrightarrow \Lambda^n E_L \\ &\longrightarrow \bigoplus_{j_1 < \dots < j_{d+h-n}} L(-x_{j_1} - \dots - x_{j_{d+h-n}}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Comme  $Q$  est un fibré quotient de  $E_L$  on a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ & \downarrow & \\ & \bigoplus_{i_1 < \dots < i_n} \mathcal{O}_C(x_{i_1} + \dots + x_{i_n}) & \\ & \downarrow & \swarrow \text{---} \varphi_{x_1, \dots, x_{d+h-1}} \text{---} \\ & \Lambda^n E_L & \longrightarrow \det Q \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & \\ & \bigoplus_{j_1 < \dots < j_{d+h-n}} L(-x_{j_1} - \dots - x_{j_{d+h-n}}) & \\ & \downarrow & \\ & 0 & \end{array}$$

Dans tous les cas ceci impose

$$h^0(\det Q) \geq n+1.$$

En effet,

- ou bien il existe  $x_1, \dots, x_{d+h-1}$  tels que  $\varphi_{x_1, \dots, x_{d+h-1}}$  est nulle alors il existe  $x_{i_1}, \dots, x_{i_{d+h-n}}$  sur  $C$  tels que  $L(-x_{i_1} - \dots - x_{i_{d+h-n}})$  s'injecte dans  $\det Q$ . Or comme

$$h = h^1(L) \leq h^1(L(-x_{i_1} - \dots - x_{i_{d+h-n}})) \leq h^1(L(-\sum x_i)) = h,$$

on a par Riemann-Roch :

$$h^0(L(-x_{i_1} - \dots - x_{i_{d+h-n}})) = g+d-(d+h-n)-g+1+h = n+1 \leq h^0(\det Q).$$

- Ou bien  $\varphi_{x_1, \dots, x_{d+h-1}}$  n'est jamais nulle : pour  $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$  génériques sur  $C$ ,  $\mathcal{O}_C(x_{i_1} + \dots + x_{i_n})$  s'injecte dans  $\det Q$  ; d'où

$$h^0(\det Q) \geq n+1.$$

[

*Preuve du 1) du Théorème 1.1.* — Soit  $g+d$  le degré de  $L$  et  $h := h^1(L)$ . Démontrons la proposition par l'absurde : soit  $Q$  un fibré quotient propre de  $E_L$  de rang  $n < r(E_L) = d+h$  et tel que  $\mu(Q) < \mu(E_L)$ . Ceci impose

$$\deg(Q) < n \left( \frac{g+d}{d+h} \right) : \quad (3.2)$$

D'après le lemme 3.3,  $h^0(\det Q) \geq n+1$ . Soit  $\rho$  le nombre de Brill-Noether pour les systèmes linéaires de degré  $\deg(Q)$  et de dimension (projective)  $n$  :

$$\begin{aligned} \rho &= g - (n+1)(g - \deg(Q) + n) \\ &= -ng + (n+1)\deg(Q) - n(n+1). \end{aligned}$$

En utilisant (3.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \rho &< -ng + n(n+1) \left( \frac{g+d}{d+h} \right) - n(n+1) \\ &= n \left( \frac{(n+1)(g-h)}{d+h} - g \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Ceci contredit l'existence d'un tel fibré  $Q$  sur une courbe générale, ce qui prouve la semi-stabilité.  $\square$

*Remarque 3.4.* — Le résultat de la proposition n'est pas généralisable à toute courbe : soit  $C$  une courbe de genre  $g \geq 3$ , possédant un système linéaire  $g_d^1$  (de degré  $d$  et de dimension projective 1). Soit  $M$  le fibré en droites engendré par ce système linéaire. Alors pour tout fibré en droites  $L$  sur  $C$  générique de degré  $g+d$ , on a une injection  $M \hookrightarrow L$ , d'où une surjection

$$E_L \longrightarrow E_M \longrightarrow 0.$$

De plus

$$\mu(E_L) = \frac{g}{d} + 1 \quad \text{et} \quad \mu(E_M) = d.$$

Alors si  $d < \frac{g}{d} + 1$ ,  $E_L$  n'est pas semi-stable.

#### 4. $E_L$ et la condition (R)

Soit  $L$  un fibré en droites sur  $C$  engendré par ses sections globales. Soit  $M$  un autre fibré en droites sur  $C$ . Si on tensorise la suite exacte (3.1) par  $M$  et qu'on écrit la suite exacte longue d'homologie, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(C, M_L \otimes M) \longrightarrow H^0(C, L) \otimes H^0(C, M) \\ &\xrightarrow{\mu_{L,M}} H^0(C, L \otimes M) \longrightarrow H^1(C, M_L \otimes M) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

D'après ce qu'on a remarqué précédemment,  $E_L$  vérifiera la condition (R) si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- 1)  $\mu_{L,M}$  est surjective pour  $M$  fibré en droites sur  $C$  générique de degré  $g - 1 - [\mu(M_L)]$ .
- 2)  $\mu_{L,M}$  est injective pour  $M$  fibré en droites sur  $C$  générique de degré  $g - 1 - \lceil \mu(M_L) \rceil$ .

Remarquons tout d'abord que si  $h^0(C, L) \leq 2$ , alors  $\mu_{L,M}$  est toujours de rang maximum ; en effet,

- ou bien  $h^0(C, L) = 1$  et  $\mu_{L,M}$  est trivialement toujours injective.
- ou bien  $h^0(C, L) = 2$  et le «base-point free pencil trick» (voir [A,C,G,H] p. 152) nous donne le résultat.

PROPOSITION 4.1. — *Soit  $C$  une courbe lisse de genre  $g$  sur  $\mathbb{C}$ . Si  $L$  est un fibré en droites sur  $C$  de degré supérieur à  $2g$ , alors  $E_L$  vérifie (R).*

*Preuve.* — Si  $\deg(L) \geq 2g$ , alors  $[\mu(M_L)] = -2$ . Pour que  $E_L$  vérifie (R) il faut donc que :

- 1)  $\mu_{L,M}$  soit surjective pour  $M$  fibré en droites sur  $C$  générique de degré  $g + 1$ , et que
- 2)  $\mu_{L,M}$  soit injective pour  $M$  fibré en droites sur  $C$  générique de degré  $g$ .

La deuxième assertion est évidente ( $h^0(C, M) = 1$ ). Pour le premier point, comme  $h^0(C, M) = 2$  pour  $M$  générique de degré  $g$ , on applique encore le «base-point free pencil trick» pour obtenir le résultat.  $\square$

Enfin comme sur une courbe générale, pour deux fibrés en droites génériques l'application  $\mu_{L,M}$  est de rang maximum (voir [Ba]), on a le 2) du Théorème 1.1.

*Remarque 4.2.* — Pour les mêmes raisons que pour le premier point, ce résultat n'est pas généralisable à toute courbe : en effet, reprenons l'exemple de la Remarque 3.4 :  $C$  est une courbe lisse de genre  $g$  possédant un  $g_d^1$  avec  $d + 1 < \frac{g}{d} + 1$ . Soit  $M$  le fibré en droites engendré par ce système linéaire. Alors pour tout fibré en droites  $L$  sur  $C$  générique de degré  $g + d$ , on a une surjection

$$E_L \longrightarrow E_M \longrightarrow 0,$$

et  $\lceil \mu(E_M) \rceil = \mu(E_M) = d < \mu(E_L) = \frac{g}{d} + 1$ . De ce fait d'après la Proposition 2.1,  $E_L$  ne vérifie pas (R).

### 5. Le cas des fibrés $\Lambda^p E_L$ lorsque $\deg(L) \geq 2g + 2$

Lorsque  $\deg(L) \geq 2g + 1$ ,  $E_L$  est stable. De ce fait, pour tout  $1 < p < \text{rg}(E_L)$ ,  $\Lambda^p E_L$  est polystable, c'est-à-dire somme directe de fibrés stables de même pente. Soit  $\gamma := \left[ \frac{g+1}{2} \right]$  ; dans [P] M. Popa démontre que lorsque  $\deg(L) \geq g(\gamma + 1)$ ,  $\Lambda^\gamma E_L$  ne vérifie pas (R). De ceci il déduit le résultat suivant (voir [P]) :

**THÉORÈME 5.1** (*M. Popa*). — *Pour tout  $g \geq 2$ , il existe un entier  $\rho(g)$  tel que pour tout  $r > \rho(g)$ , il existe sur toute courbe de genre  $g$  un fibré stable de rang  $r$  ne vérifiant pas (R).*

En s'inspirant de cela, on démontre la Proposition suivante :

**PROPOSITION 5.2.** — *Soit  $C$  une courbe lisse de genre  $g \geq 2$  sur  $\mathbb{C}$ . Si  $L$  est un fibré en droites sur  $C$  de degré supérieur ou égal à  $2g + 2$ , alors pour tout  $p$  dans  $\{2, \dots, \text{rg}(E_L) - 2\}$ ,  $\Lambda^p E_L$  ne vérifie pas (R).*

*Preuve.* — Soit  $g + d$  le degré de  $L$ , un calcul facile donne :

$$\mu(\Lambda^p E_L) = p + \frac{g}{d}p.$$

Remarquons tout d'abord que d'après le Lemme 3.2, pour  $x_1, \dots, x_{d-1}$   $d-1$  points génériques sur  $C$ , on a pour tout  $p$  dans  $\{2, \dots, d-2\}$ ,

$$\mathcal{O}_C(x_1 + \dots + x_p) \hookrightarrow \Lambda^p E_L.$$

Donc pour tous diviseurs effectifs  $A_q$  et  $B_p$  respectivement de degrés  $q$  et  $p$ ,  $h^0(C, \Lambda^p E_L(A_q - B_p)) \neq 0$ . Établissons maintenant grâce à ceci les conditions sur  $p$  pour que  $\Lambda^p E_L$  ne vérifie pas (R) :

- 1) Si  $p \leq g$ , tout fibré en droites  $M$  générique de degré  $g - 2p$  est un fibré engendré par un diviseur de la forme  $A_{g-p} - B_p$  avec  $A_{g-p}$  et  $B_p$  des diviseurs effectifs de degrés respectivement  $g - p$  et  $p$ . D'après ce qui précède,  $h^0(C, \Lambda^p E_L \otimes M) \neq 0$  et comme

$$\chi(C, \Lambda^p E_L \otimes M) \leq 0 \iff \mu(\Lambda^p E_L \otimes M) \leq g - 1,$$

$\Lambda^p E_L$  ne vérifiera pas (R) si  $p + \frac{g}{d}p + g - 2p \leq g - 1$ , c'est-à-dire si  $p \geq \frac{d}{d-g}$ .

- 2) Si  $p \geq g$  alors tout fibré en droites  $M$  générique de degré  $-p$  s'écrit  $\mathcal{O}_C(-A_p)$  avec  $A_p$  diviseur effectif de degré  $p$ . D'après ce qui précède,  $h^0(C, \Lambda^p E_L \otimes M) \neq 0$  et pour les mêmes raisons que dans le 1),  $\Lambda^p E_L$  ne vérifiera pas (R) si  $p + \frac{g}{d}p - p \leq (g - 1)$ , c'est-à-dire si  $p \leq d - \frac{d}{g}$ .

D'après les propriétés établies dans le premier paragraphe, pour prouver la Proposition il nous suffit de démontrer que  $\Lambda^p E_L$  ou bien  $\Lambda^{d-p} E_L$  (qui est le dual de  $\Lambda^p E_L$  à  $\otimes L$  près) ne vérifie pas (R) :

i) Si  $d \leq 2g$  alors

- ou bien  $\max(p, d-p) \geq g$ , disons  $p$  et alors d'après 2)  $\Lambda^p E_L$  ne vérifie pas (R) si  $p \leq d - \frac{d}{g}$ , ce qui est bien le cas puisque  $d \leq 2g$ .
- ou bien  $\max(p, d-p) \leq g$  et si on suppose que  $\Lambda^p E_L$  et  $\Lambda^{d-p} E_L$  vérifient (R), d'après le 1), on doit avoir :

$$p > d - \frac{d}{g} \quad \text{et} \quad d - p > d - \frac{d}{g}.$$

Or ceci n'est pas possible lorsque  $d \geq g + 2$ .

ii) Si  $d \geq 2g$  alors

- ou bien  $\min(p, d-p) \leq g$  et d'après 1), on doit avoir  $\min(p, d-p) \geq \frac{d}{d-g}$  ce qui est automatique lorsque  $d \geq 2g$ .
- ou bien  $p$  et  $d-p$  sont supérieurs ou égaux à  $g$  et si on suppose que  $\Lambda^p E_L$  et  $\Lambda^{d-p} E_L$  vérifient (R), d'après le 2), on doit avoir :

$$p > d - \frac{d}{g} \quad \text{et} \quad d - p > d - \frac{d}{g}.$$

Or cela implique  $g \leq 1$ , ça n'est donc pas possible.  $\square$

**Remerciements :** Je remercie mon directeur de thèse Arnaud Beauville de m'avoir guidé dans ce travail de recherche.

## Bibliographie

- [A,C,G,H] ARBARELLO (E.), CORNALBA, GRIFFITHS (P.), J. HARRIS (J.). — Geometry of algebraic curves. Vol. I, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 267, Springer-Verlag, New York (1985).
- [Ba] BALLICO (E.). — Line bundles on projective curves : the multiplication map, Atti Sem. Mat. Fis. Univ Modena, L, p. 17-21 (2002).
- [Be] BEAUVILLE (A.). — Some stable vector bundles with reducible theta divisors, Manuscripta Math. 110, p. 343-349 (2003).
- [Be2] BEAUVILLE (A.). — Vector bundles on curves and generalized theta functions: recent results and open problems, Current topics in complex algebraic geometry (Berkeley, CA, 1992/93), Math. Sci. Res. Inst. Publ., 28, Cambridge Univ. Press, Cambridge, p. 17-33 (1995).

- [E-L] EIN (L.), LAZARSFELD (R.). — Stability and restrictions of Picard bundles, with an application to the normal bundles of elliptic curves, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 179, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1992).
- [L] LAZARSFELD (R.). — A sampling of vector bundle techniques in the study of linear series, Lectures, World scientific press, Singapore, p. 500-559 (1989).
- [P] POPA (M.). — On the base locus of the generalized theta divisor, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 329, no. 6, p. 507-512 (1999).
- [R] RAYNAUD (M.). — Sections des fibrés vectoriels sur une courbe, Bull. Soc. math. France, 110, p. 103-125 (1982).