Jacques Deny

Systèmes totaux de fonctions harmoniques

Annales de l'institut Fourier, tome 1 (1949), p. 103-113

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1949__1__103_0>

SYSTÈMES TOTAUX DE FONCTIONS HARMONIQUES

par Jacques DENY (Strasbourg).

Le problème de l'approximation des fonctions continues sur la frontière du compact E à l'aide de fonctions harmoniques dans un voisinage de E a fait l'objet de divers travaux au premier rang desquels il faut citer une note de M. Keldych et M. Lavrentieff (¹) et un article plus détaillé de M. Brelot (²). J'ai montré, dans une note quelque peu sommaire (³), que les résultats fondamentaux de ces auteurs peuvent être établis assez simplement à l'aide du théorème de Hahn-Banach. Je désire reprendre ici cette démonstration avec plus de détails, et apporter quelques compléments ; je terminerai par quelques remarques sur des questions annexes.

1. Fonctions harmoniques élémentaires.

On se placera dans l'espace euclidien R^m à $m \geqslant 2$ dimensions ; $|x|$ désignera la distance euclidienne de l'élément x à l'élément origine O.

On notera $h(x)$ la *fonction harmonique fondamentale* $|x|^{2-m}$ pour $m > 2$, $-\log|x|$ pour $m = 2$.

$H_n(x)$ étant un polynome harmonique homogène de degré n, on

(¹) *C. R.*, 204, 1937, p. 1788.

(²) *Bull. Soc. Math. de France*, 73, 1945, p. 55-70.

(³) *Ibid.*, p. 71-73. Un lapsus s'est glissé dans l'énoncé du théorème central, qu'il faut lire : « Pour que toute fonction continue sur la frontière d'un compact E puisse être approchée... », ou remplacer par le théorème 3 du présent travail. Le résultat auquel il est fait allusion a été retrouvé par M. LANDKOF : *Sur la densité de certains systèmes de fonctions harmoniques dans l'espace des fonctions continues sur un ensemble* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, 55, 1947, p. 7-8). Signalons également les études de G. FICHERA dans le cas d'un compact limité par un nombre fini de surfaces régulières (cf. notamment : Applicazione della teoria del potenziale di superficie, etc. *Giornale Mat. Battaglini*, 78, 1948, p. 71-80).

appellera *fonctions harmoniques élémentaires* d'ordre n relatives à un point a situé à distance finie les fonctions de la forme :

$$\Phi_n^a(x) = \frac{H_n(x-a)}{|x-a|^{2n+m-2}} \quad \text{pour } n \geqslant 1$$
$$\Phi_0^a(x) = H_0 h(x-a) \quad (H_0 = \text{constante}).$$

Si a est à l'infini, on pose

$$\Phi_n^\infty(x) = H_n(x) \quad (n \geqslant 0).$$

Une telle fonction est harmonique en $x \neq a$; son expression canonique à l'aide des fonctions sphériques ou hypersphériques ne sera pas utilisée dans ce travail (4).

Si x est un point intérieur à la sphère S de centre o et de rayon R, les polynomes harmoniques H_n satisfont aux relations bien connues :

$$(1) \qquad H_n(x) = A_n R^{-1} \int_S H_n(y) h(x-y) d\sigma(y)$$

où $d\sigma$ est l'élément d'aire de S, et A_n est un coefficient numérique dont la valeur est :

$$A_n = (2n+m-2)/(m-2)s_m \quad \text{si} \quad m > 2, \ n \geqslant 0 \text{ (5)}$$
$$A_n = n/\pi \quad \text{si} \quad m = 2, \ n > 0.$$

La relation (1) tombe en défaut pour $m = 2$, $n = 0$; elle doit être alors remplacée par :

$$(1') \qquad \log R = \frac{1}{2\pi R} \int_C \log|x-y| d\sigma(y)$$

le point x étant intérieur à la circonférence C de centre o et de rayon R (6).

(4) Cette expression est particulièrement simple pour $m = 2$; si r et θ désignent les coordonnées polaires de $x - a$, les Φ_n^a sont, pour tout $n > 0$, les combinaisons linéaires des fonctions $\cos n\theta/r^n$, $\sin n\theta/r^n$.

(5) $s_m = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$ désigne l'aire de la sphère unité.

(6) On démontre le plus souvent la relation (1) en développant $h(x-y)$ suivant les puissances entières de $|x| = r$ (cf. par exemple le traité classique de GOURSAT, t. 3, pour $m = 3$) ; mais elle résulte immédiatement de la formule suivante, attribuée à DINI, qui est elle-même une conséquence facile du théorème de GREEN : si U est harmonique dans et sur la sphère S, on a, pour tout point x intérieur :

$$U(x) = \frac{1}{(m-2)s_m} \int_S \left[2\frac{dU}{dn_e} + (m-2)\frac{U}{R} \right] |x-y|^{2-m} d\sigma(y) \quad \text{pour } m > 2$$
$$U(x) - U(o) = -\frac{1}{\pi} \int_C \frac{dU}{dn_e} \log|x-y| d\sigma(y) \quad \text{pour } m = 2,$$

n_e désignant la normale extérieure à S.

Si x est extérieur à S, on obtient immédiatement, en appliquant (1) au point x' inverse de x, et tenant compte de $|y-x| = |y-x'||x|/R$ pour tout $y \in S$:

$$(2) \quad H_n(x) = A_n |x|^{2n+m-2} R^{-(2n+m-1)} \int_S H_n(y) h(x-y)\, d\sigma(y),$$

relation qui, pour $m=2$, $n=0$ doit être remplacée par

$$(2') \qquad \log|x| = \frac{1}{2\pi R} \int_C \log|x-y|\, d\sigma(y),$$

Les fonctions harmoniques élémentaires permettent d'écrire la relation (2) sous une forme toute semblable à (1) :

$$\Phi_n^a(x) = A_n R^{-1} \int_S \Phi_n^a(y) h(x-y)\, d\sigma(y)$$

pour tout x extérieur à la sphère S de centre a et de rayon R [7].

2. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un potentiel soit identiquement nul dans une région de l'espace ne contenant pas de masses.

Soit $U^\mu(x) = \int h(x-y)\, d\mu(y)$ le potentiel newtonien (logarithmique si $m=2$) engendré au point x par la mesure μ de signe quelconque, supposée à support compact. Soient D un domaine contenu dans le complémentaire de ce support, et a un point quelconque de D.

Théorème 1. — *Pour que* U^μ *soit identiquement nul dans* D, *il faut et il suffit qu'on ait :*

$$\int \Phi_n^a(x)\, d\mu(x) = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

pour toutes les fonctions harmoniques élémentaires relatives au point a.

En effet si a est à distance finie, le potentiel U^μ, qui est harmonique dans D, admet au voisinage de a un développement de la forme

$$U^\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x-a)$$

où F_n est un polynome harmonique homogène d'ordre n.

(7) Sauf encore dans le cas $m=2$, $n=0$.

Soit S une sphère de centre a et de rayon R assez petit pour que la boule fermée $|x-a| \leqslant R$ soit contenue dans D ; deux polynomes harmoniques homogènes de degrés différents étant, comme il est bien connu, orthogonaux sur toute sphère de centre o, on a, si H_n désigne un tel polynome d'ordre n :

$$(3)\quad \int_s U^{\mu}(x)H_n(x-a)d\sigma(x) = \int_s H_n(x-a)F_n(x-a)d\sigma(x).$$

Pour que U^{μ} soit nul au voisinage de a (et par suite dans D), il faut et il suffit qu'on ait :

$$(4)\qquad \int_S U^{\mu}(x)H_n(x-a)d\sigma(x) = 0$$

pour tout polynome harmonique homogène H_n ; la condition est évidemment nécessaire ; si inversement la relation (4) est satisfaite pour tout H_n il vient, en faisant $H_n = F_n$ dans (3) :

$$\int_S \left(F_n(x-a)\right)^2 d\sigma(x) = 0$$

d'où $F_n \equiv 0$, et ceci pour toute valeur de n, ce qui entraîne $U^{\mu} \equiv 0$. Mais les relations (4) s'écrivent :

$$\int d\sigma(x) \int H_n(x-a)h(x-y)d\mu(y) = 0,$$

d'où, par interversion des intégrations, et compte tenu de (2) :

$$\int \frac{H_n(y-a)}{|y-a|^{2n+m-2}} d\mu(y) = 0$$

sauf si $m=2$, $n=0$; mais en appliquant alors (2′) on constate que dans tous les cas (4) est équivalent à

$$\int \Phi_n^a(y)d\mu(y) = 0$$

ce qui démontre le théorème.

Si maintenant a est le point à l'infini, on utilisera le développement uniformément convergent au voisinage de l'infini :

$$(5)\qquad U^{\mu}(x) = F_0 h(x) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)|x|^{-(2n+m-2)}$$

où F_n est un polynome harmonique homogène d'ordre n ; la démonstration est alors toute semblable, mais ce sont les relations (1) et (1′) qu'on appliquera.

Remarque. — Dans l'étude de certains problèmes d'approximation des fonctions harmoniques, il peut être utile de considérer des potentiels engendrés par des distributions qui ne sont plus nécessairement des mesures [8]. Soit T une telle distribution, à support compact ; le potentiel $U^T = h(x) * T$ est une distribution bien déterminée qui, dans tout domaine D disjoint du support, coïncide avec une fonction harmonique. Le théorème précédent se généralise ainsi :

Pour que U^T soit identiquement nul dans D il faut et il suffit que

$$T\big(\Phi_n^a(x)\big) = 0 \text{ [9]}$$

pour toutes les fonctions harmoniques élémentaires relatives à un point a arbitrairement choisi dans D [10].

3. Définitions et lemmes.

Soit E un compact de R^m choisi une fois pour toutes ; son complémentaire Ω est constitué par une suite (finie ou dénombrable) de domaines D_0 (non borné), D_1, ... Si a_p est un point arbitrairement choisi dans D_p ($p = 0, 1, \ldots$; a_0 peut être pris à l'infini), les fonctions harmoniques élémentaires relatives à a_p seront désignées par $\Phi_n^{a_p}$.

Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues sur la frontière $\overset{*}{E}$ de E (muni de la topologie de la convergence uniforme) ; on se propose d'étudier le sous-espace $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ sous-tendu par les $\Phi_n^{a_p}$, c'est-à-dire l'ensemble des limites uniformes des combinaisons linéaires finies des $\Phi_n^{a_p}$; à cet effet on va rappeler quelques résultats de théorie du potentiel.

(8) L. Schwartz, *Théorie des distributions* (à paraître prochainement aux *Actualités Sc. et Ind.*).

(9) Ces quantités ont un sens, car T est à support compact, et les fonctions Φ_n^a sont indéfiniment dérivables sur un voisinage de ce support.

(10) La démonstration donnée dans le cas des mesures s'étend sans difficultés, mais, lorsque a est le point à l'infini, il est essentiel d'observer que U^T admet au voisinage de ce point un développement tel que (5) ; en effet T étant à support compact, c'est la somme finie d'une mesure et de dérivées de mesures à support compact. U^T est donc la somme d'un potentiel engendré par une mesure à support compact, et d'un nombre fini de dérivées (au sens des distributions) de telles fonctions.

L'*extrémisée* d'une mesure μ est sa balayée μ' sur l'ouvert Ω (11). Les points *stables* (*instables*) de E sont les points réguliers (irréguliers) pour Ω (12) ; ou encore ce sont les points en lesquels Ω est non effilé (effilé). Les points stables sont partout denses sur $\overset{*}{E}$; en un tel point on a $U^{\mu} = U^{\mu'}$ (13). μ' ne charge pas l'ensemble des points instables ou intérieurs de E ; si μ charge seulement l'ensemble des points stables ou extérieurs, on a $\mu' = \mu$.

Lemme 1. — *Les mesures μ portées par* E *et d'extrémisée nulle sont caractérisées par l'une ou l'autre des propriétés suivantes :*

a) $U^{\mu} \equiv 0$ *sur* Ω.

b) $\int \Phi_n^{a_p} d\mu = 0$ *pour tous n et p.*

c) μ *est de la forme* $\mu = \lambda - \lambda'$, *où λ charge seulement l'ensemble des points instables ou intérieurs de* E, *et λ' est l'extrémisée de λ.*

a) est une conséquence immédiate des définitions (14) ; d'après le théorème 1, a) et b) sont équivalents ; enfin pour montrer c) il suffit d'observer que toute μ portée par E peut s'écrire $\mu = \alpha + \lambda$, où λ charge seulement l'ensemble des points instables et intérieurs, et α l'ensemble des points stables ; comme $\alpha' = \alpha$ et $\mu' = 0$, on a $\alpha + \lambda' = 0$, d'où le résultat ; cette décomposition c) est évidemment unique.

(11) Pour toutes les questions relatives à l'extrémisation et au balayage sur un ensemble quelconque, voir principalement les mémoires suivants : M. Brelot, *Critères de régularité et de stabilité* (*Bull. Acad. Roy. de Belgique*, 1939, p. 125-139) ; M. Brelot, *Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités* (*Journ. de Math.*, 24, 1945, p. 1-32) ; H. Cartan, *Théorie générale du balayage en potentiel newtonien* (*Ann. Univ. de Grenoble*, 22, 1946, p. 221-280).

(12) Nous conservons, dans un but de concision, cette terminologie de Keldych et Lavrentieff. Le terme *irrégulier*, qui peut prêter à confusion, est entendu au sens moderne de la théorie du potentiel (cf par exemple l'article précité de H. Cartan).

(13) Si μ est positive, le potentiel U^{μ} est défini en tout point. Dans le cas contraire on pose $\mu' = (\overset{+}{\mu})' - (\overline{\mu})'$, $\overset{+}{\mu}$ et $\overline{\mu}$ étant les variations positives et négatives de μ (bien entendu on envisagera seulement des mesures μ telles que $U^{\overset{+}{\mu}}$ et $U^{\overline{\mu}} \not\equiv \infty$; d'ailleurs on n'aura à considérer que des mesures portées par E). En un point stable la relation $U^{\mu'} = U^{\mu}$ n'a de sens que si $U^{\overset{+}{\mu}}$ et $U^{\overline{\mu}}$ ne sont pas tous deux infinis, ce qui a lieu quasi partout (sauf sur un ensemble de capacité extérieure nulle).

(14) Généralisant une définition antérieure (G. Choquet et J. Deny, *Sur une propriété de moyenne*, etc., *Bull. Soc. Math. de France*, 52, 1944, p. 118-140) on peut appeler *normales pour* E les mesures (nécessairement portées par E) dont le potentiel est nul sur $\complement E = \Omega$; d'après un théorème établi dans l'article cité, pour que μ soit normale pour E, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à toute fonction harmonique sur un voisinage de E, c'est-à-dire qu'on ait $\int H d\mu = 0$ pour de telles fonctions. D'après le lemme 2, *b*, il suffit que ces relations soient vérifiées pour toutes les $\Phi_n^{a_p}$.

On appelle *extrémale* de la fonction $f \in \mathcal{C}$ la solution du problème de Dirichlet pour le compact E avec donnée frontière f; elle est définie en tout point x de E par :

$$K_f^E(x) = K_f(x) = \int f(y) d\varepsilon'_x(y),$$

où ε'_x est la mesure extrémisée de ε_x, masse $+1$ placée en x.

LEMME 2. — *Pour toute fonction continue $f \in \mathcal{C}$, et pour toute mesure μ, on a*

$$\int K_f d\mu = \int f d\mu' = \int K_f d\mu'.$$

En effet f est limite uniforme de potentiels continus U^λ, nuls hors d'un compact[15]. Le potentiel extrémisé $U^{\lambda'}$ étant donné par

$$U^{\lambda'}(x) = \int U^\lambda(y) d\varepsilon'_x(y),$$

il converge uniformément sur E vers l'extrémale de f (d'après les expressions intégrales de K_f et de U^λ on a en effet

$$|K_f - U^{\lambda'}| \leqslant |f - U^\lambda|,$$

la masse totale de la mesure positive ε'_x étant $\leqslant 1$). Les relations à démontrer sont alors des conséquences immédiates des formules de réciprocité bien connues[16] :

$$\int U^{\lambda'} d\mu = \int U^\lambda d\mu' = \int U^{\lambda'} d\mu'.$$

LEMME 3. — *Soit $f \in \mathcal{C}$; pour que K_f soit continue sur E, il faut et il suffit que $K_f = f$ en tout point frontière instable.*

En effet, pour que K_f soit continue sur la frontière il faut et il suffit que $K_f = f$ en tout point frontière instable (puisque l'égalité a lieu en tous les points-frontières stables, et que ceux-ci sont denses sur la frontière). Il reste à montrer que si $K_f = f$ en un point-frontière instable x_0, K_f est continue sur E au point x_0 ; or cela résulte du théorème suivant : lorsque le point x de E tend, d'une façon quel-

(15) Lemme utilisé par H. CARTAN : *Théorie du potentiel newtonien*, etc. (*Bull. Soc. Math. de France*, 72, 1945, p. 74-106).

(16) Ces relations sont valables quelle que soit la mesure μ (différence de deux mesures positives de potentiel non identiquement infini), grâce aux hypothèses faites sur U^λ (continu, nul hors d'un compact).

conque, vers x_0, les valeurs limites de $K_f(x)$ sont comprises dans l'intervalle fermé $\big(f(x_0),\, K_f(x_0)\big)$ (17).

4. Variété linéaire engendrée par les $\Phi_n^{a_p}$.

On a désigné par $\mathcal{F}$ la variété linéaire fermée de $\mathcal{C}$ engendrée par les fonctions harmoniques élémentaires $\Phi_n^{a_p}$: appelons $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures portées par la frontière $\overset{*}{E}$ et dont l'extrémisée est nulle. Il est clair que $\mathcal{M}$ *constitue une variété linéaire faiblement fermée du dual topologique de l'espace vectoriel* $\mathcal{C}$ (18).

Théorème 2. — *$\mathcal{F}$ est identique au sous-espace de $\mathcal{C}$ orthogonal à la variété $\mathcal{M}$.*

D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer que $\mathcal{M}$ est constituée par les μ orthogonales à $\mathcal{F}$ (19). Or pour que μ soit orthogonale à $\mathcal{F}$ il faut et il suffit que $\int \Phi_n^{a_p} d\mu = 0$ pour tous n et p (puisque $\mathcal{F}$ est engendrée par les $\Phi_n^{a_p}$); donc il faut et il suffit que μ soit d'extrémisée nulle (lemme 1, b).

Le résultat fondamental sur l'approximation des fonctions de $\mathcal{C}$ à l'aide des fonctions harmoniques au voisinage de E est un simple corollaire du théorème précédent :

Théorème 3. — *Pour que les $\Phi_n^{a_p}$ forment un système total sur $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que* E *n'ait pas de points-frontière instables.*

En effet il faut et il suffit que $\mathcal{M}$ se réduise à la mesure nulle, donc, d'après le lemme 1, c, que E n'ait pas de points-frontière instables.

Théorème 4. — *$\mathcal{F}$ est constituée par les fonctions de $\mathcal{C}$ dont l'extrémale est continue.*

(17) Ce théorème a été établi par O. Frostman (*Les points irréguliers dans la théorie du potentiel et le critère de* Wiener, *Kungl. Fys. Lund Förh.*, 9, 1939) dans le cas de la solution du problème de Dirichlet ordinaire (pour ouverts) au voisinage d'un point frontière irrégulier. Le cas présent (solution du problème de Dirichlet pour compacts) se traite de la même façon.

(18) $\mathcal{M}$ est évidemment une variété linéaire ; si d'autre part $\mu_n \in \mathcal{M}$ converge faiblement vers μ on a, sur Ω: $U^\mu = \lim U^{\mu_n} = 0$, d'où $\mu \in \mathcal{M}$ (lemme 1, a). Ce résultat n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du théorème a énoncé dans la note suivante.

(19) Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach (sur le corps des réels), V une variété linéaire fermée (au sens de la norme) de $\mathcal{B}$, dont les éléments sont notés x ; soit V′ l'ensemble des fonctionnelles linéaires y orthogonales aux éléments de $V\big(y(x) = 0$ pour tout $x \in V\big)$; on a les résultats suivants : a) V′ *est une variété linéaire faiblement fermée du dual de* $\mathcal{B}$ (évident) ; b) *si* $x_0 \in \mathcal{B}$ *est orthogonale à* V′ $\big(y(x_0) = 0$ *pour tout* $y \in V'\big)$, *on a* $x_0 \in V$ (démonstration facile par l'absurde, à l'aide du théorème de Hahn-Banach).

D'après le théorème 2 tout revient à établir l'identité des fonctions de $\mathcal{C}$ dont l'extrémale est continue, avec celles qui sont orthogonales à $\mathcal{M}$. Or si K_f est continue, $f = K_f$ sur $\overset{*}{E}$ (lemme 3), donc, pour toute $\mu \in \mathcal{M}$: $\int f d\mu = \int K_f d\mu = \int f d\mu'$ (lemme 2); comme μ' est nulle par hypothèse, f est bien orthogonale à $\mathcal{M}$. Soit inversement f une fonction de $\mathcal{C}$ qui soit orthogonale à $\mathcal{M}$; pour tout $x \in \overset{*}{E}$ on a $\varepsilon_x - \varepsilon'_x \in \mathcal{M}$, donc $\int f(d\varepsilon_x - d\varepsilon'_x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = K_f(x)$; le lemme 3 montre qu'alors K_f est continue.

5. Cas où l'intérieur E_0 de E n'est pas vide.

Désignons par $\mathcal{F}'$ le sous-espace de $\mathcal{C}$ constitué par les restrictions à $\overset{*}{E}$ des fonctions continues sur E tout entier et harmoniques dans E_0, et par $\mathcal{M}'$ la variété linéaire (faiblement fermée) du dual de $\mathcal{C}$, constituée par les mesures portées par $\overset{*}{E}$ et dont la balayée sur le complémentaire $\complement E_0$ est identiquement nulle.

Une étude toute semblable à celle qui a été faite pour la famille $\mathcal{F}$ montre que *$\mathcal{F}'$ est constituée par les fonctions de $\mathcal{C}$ qui sont orthogonales à $\mathcal{M}'$* [20]. De cette remarque on déduit aisément le :

Théorème 5. — *Pour que les variétés $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ coïncident, il faut et il suffit que les ensembles $\Omega = \complement E$ et $\complement E_0$ soient effilés aux mêmes points.*

En effet, d'après le théorème 2 et la remarque précédente, pour que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ coïncident il faut et il suffit que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$. Or il est clair que dans le cas général on a $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ [21] (d'où $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$), donc il faut et il suffit que toute μ portée par $\overset{*}{E}$ et extrémisée nulle soit de balayée nulle sur $\complement E_0$.

Pour cela il suffit évidemment que Ω et $\complement E_0$ soient effilés aux

(20) Dans les démonstrations on fera intervenir, au lieu des extrémales K_f, les fonctions de Wiener $H_f^{E_0}(x) = H_f(x) = \int f(y) d\varepsilon''_x(y)$, où ε_x est la balayée sur $\complement E_0$ de $\varepsilon_x (x \in E)$. On a $\varepsilon''_x = \varepsilon_x$ pour tout x extérieur à E_0 ou point régulier de $\complement E_0$. On montre que $\mathcal{F}'$ est constituée par les fonctions continues f telles que H_f soit continue sur E (ou seulement, ce qui revient au même, sur la frontière de E_0).

(21) D'après la transitivité du balayage, l'extrémisée μ' d'une mesure μ (c'est-à-dire la balayée de μ sur Ω) peut s'obtenir en remplaçant μ par sa balayée sur $\complement E_0$ (puisque $\complement E_0 \supset \Omega$). Si donc cette dernière balayée est nulle, on a $\mu' = 0$, ce qui montre bien que $\mathcal{M}'$ est contenue dans $\mathcal{M}$.

mêmes points [22], puisque les balayées d'une mesure quelconque sur ces deux ensembles sont identiques. Mais cette condition est également nécessaire, car s'il existait un point x irrégulier pour Ω et intérieur ou régulier pour $\complement E_0$, la mesure non nulle $\mu = \varepsilon_x - \varepsilon'_x$ serait d'extrémisée nulle, mais de balayée sur $\complement E_0$ non nulle, puisque cette balayée serait identique à μ [23].

6. Remarques sur un problème d'approximation faisant intervenir les dérivées des $\Phi_n^{a_p}$.

Nous supposerons maintenant que le compact E est *sans points intérieurs*. Désignons par $\mathcal{C}_1$ l'ensemble des fonctions F définies et continûment différentiables dans un voisinage de E, deux fonctions prenant les mêmes valeurs sur E n'étant pas considérées comme distinctes. $\mathcal{C}_1$ constitue un espace vectoriel qu'on peut normer par exemple par

$$\|F\| = \sup_{x \in E} |F(x)| + \sum_{i=1}^{m} \sup_{x \in E} \left| \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) \right|$$

$\mathcal{C}_1$ est *complet* et il est aisé de voir que son dual est constitué par les « distributions » de la forme :

$$T = \mu + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_i}$$

où μ et les μ_i sont des mesures portées par E.

Soit alors $\mathcal{F}_1$ la variété linéaire fermée de $\mathcal{C}_1$ engendrée par les fonctions harmoniques élémentaires $\Phi_n^{a_p}$. Il est intéressant de chercher des conditions nécessaires et suffisantes pour l'identité de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{F}_1$. Le théorème de Hahn-Banach permet de remplacer ce problème par le suivant : A quelles conditions doit satisfaire E pour que toute dis-

(22) Puisque Ω est contenu dans $\complement E_0$ tout point irrégulier de $\complement E_0$ est irrégulier pour Ω, mais on sait que la réciproque n'a pas toujours lieu.

(23) ε_x étant portée par un point régulier de $\complement E_0$ (par hypothèse), et ε'_x par l'ensemble des points stables de E (donc a fortiori réguliers pour $\complement E_0$), ces deux mesures coïncident avec leurs balayées sur $\complement E_0$.

(24) C'est-à-dire $T(\Phi_n^{a_p}) = 0$ pour tous n et p, ou encore, dans le cas présent :

$$\int \Phi_n^{a_p} d\mu - \sum_{i=1}^{m} \int \frac{\partial \Phi_n^{a_p}}{\partial x_i} d\mu_i = 0$$

tribution T de la forme précédente et orthogonale aux $\Phi_n^{a_p}$ ([24]) est-elle nulle ? D'après la remarque finale du § 2 ceci peut encore s'énoncer : A quelles conditions la relation $U^T \equiv 0$ sur Ω entraîne $T \equiv 0$?

Ce problème semble assez difficile. Bornons-nous à signaler cette condition *suffisante* : Il existe un nombre α, $0 < \alpha < 1$, tel que Ω n'est effilé en aucun point-frontière pour le potentiel d'ordre α (potentiel pris par rapport au noyau $|x|^{\alpha-m}$) ([25]). Cette condition est trivialement vérifiée lorsque E est de mesure nulle.

Remarquons encore que, dans le cas $m = 2$, le problème suivant : « à quelles conditions les fonctions z^n et $(z - a_p)^{-n}$ forment-elles un système total dans l'espace des fonctions continues définies sur E et à valeurs complexes ? » ([26]) peut être mis sous une forme très voisine, à savoir : « à quelles conditions toute distribution de la forme $T = \frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2}$, où μ_1 et μ_2 sont des mesures réelles portées par E, dont le potentiel logarithmique U^T est nul sur Ω, est-elle identiquement nulle ? ».

([25]) Le principe de la démonstration est simple (on observe qu'en vertu des hypothèses sur T la formule de composition de M. Riesz permet d'identifier U^T avec un potentiel d'ordre α engendré par une *mesure*), mais celle-ci demande, surtout dans le cas de deux dimensions, une mise au point faisant appel à des propriétés délicates de la théorie des distributions, et sur laquelle je me propose de revenir dans un prochain travail.

([26]) Rappelons que le résultat le plus précis obtenu dans cette voie est dû à M. Lavrentieff (*Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes*, *Act. Sc. et Ind.*, n° 441) : le système des z^n est total lorsque Ω est connexe.

(Manuscrit reçu en janvier 1950.)