ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

RENÉ GOSSE

Sur une équation de Langmuir généralisée

Annales de l'institut Fourier, tome 1 (1949), p. 5-11
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1949__1__5_0>

SUR UNE ÉQUATION DE LANGMUIR GÉNÉRALISÉE

par René GOSSE †.

Cet article est extrait d'un manuscrit que rédigeait M. Gosse avant sa mort tragique. Le manuscrit, comportant de nombreuses ratures ou retouches, ne constituait évidemment qu'une rédaction provisoire ; le début seul en a pu être publié. Il a fallu laisser de coté tout ce qui concernait des développements en série des solutions des équations différentielles étudiées ou des applications numériques. De plus, n'ayant pas réussi à reconstituer la démonstration que M. Gosse voulait donner de la proposition qu'il énonçait au début du n° 3, j'ai cru devoir proposer celle qui est indiquée entre crochets ; elle repose d'ailleurs sur les inégalités établies aux n^{os} 1 et 2.

(E. Cotton.)

Introduction. — MM. Rocard et Warnecke, dans la *Revue Scientifique* (mars 1939) ont proposé une intéressante étude d'une équation de M. Langmuir dont ils ont généralisé la forme. Ils l'écrivent

$$r\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{dV}{dr}=2i\left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{2}}\left[V-\frac{2e}{m}\left(I\log\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

le changement de variables

$$r=r_0\mathcal{E}^{\frac{3x}{2}},\qquad V=\lambda^2u\mathcal{E}^x+\frac{9}{2}\frac{e}{m}I^2x^2$$

λ étant une constante, $\mathcal{E}$ la base des logarithmes népériens, la ramène à l'équation

$$(1)\qquad \frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}+u+h\mathcal{E}^{-x}=ku^{-\frac{1}{2}}$$

h et k sont des constantes positives dont il est inutile de donner l'expression ; cette équation peut aussi s'écrire en posant $y = u\mathcal{E}^x$

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + h = k\mathcal{E}^{\frac{3x}{2}} y^{-\frac{1}{2}}.$$

Pour déterminer la solution $V(r)$ qui pour $r = r_0$, c'est-à-dire pour $x = 0$, s'annule ainsi que sa dérivée, il suffit de trouver la solution u ou y des équations (1) ou (2) définie par les mêmes conditions initiales.

1. Nous étudions ici quelques propriétés générales des équations de la forme

$$(3) \qquad y'' + y'p(x, y, y') + q(x)\frac{da(y)}{dy} = f(y)$$

(dont (1) et (2) sont des cas particuliers) concernant la solution qui est définie par les conditions initiales

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad y' = 0.$$

Nous supposerons $x \geqq x_0$ et nous ferons sur p, q, a et f les hypothèses suivantes :

1° p est positif ou nul, borné supérieurement.

2° On a $0 \leqq \frac{da}{dy} < A$, $\left|\frac{d^2a}{dy^2}\right| < A'$, A et A' étant deux constantes positives et q est positif non croissant et tend, quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, vers une limite finie qu'on peut toujours supposer nulle en modifiant convenablement $f(y)$.

3° Nous supposerons que y commence par croître. En particulier il en sera ainsi si $f(y_0) - q(x_0)\left(\frac{da}{dy}\right)_0$ est positif. Si cette expression était nulle, il suffirait que $q'(x_0)$ ne soit pas nul et que $\left(\frac{da}{dy}\right)_0$ soit positif pour que notre hypothèse soit vérifiée.

4° $f(y)$ est continue pour toute valeur de y, sauf peut-être pour $y = y_0$ et $F(y) = \int_{y_0}^{y} f(y)\,dy$ a un sens et s'annule pour une valeur au moins Y de y supérieure à y_0. D'après notre troisième hypothèse, $f(y_0)$ est toujours positif, la quatrième implique que $f(y)$ change de signe un nombre impair de fois entre y_0 et Y.

Nous sommes assurés que ces conditions ne sont pas contradictoires puisqu'elles sont vérifiées par l'équation (1) de Langmuir.

2. Nos quatre hypothèses ont des conséquences immédiates que nous allons tout d'abord dégager.

a) Multiplions les deux nombres de (3) par y' et intégrons de x_0 à x :

$$(4) \quad \frac{y'^2}{2} + \int_{x_0}^{x} py'^2\,dx + \int_{x_0}^{x} q(x)\,da = \mathrm{F}(y) = \int_{y_0}^{y} f(y)\,dy.$$

l'identité

$$\int_{x_0}^{x} q(x)da = (a - a_0)q(x) - \int_{x_0}^{x}(a - a_0)q'(x)dx$$

montre que, dans tout intervalle (x_0, x) où $x > x_0$, le premier membre reste positif, car a est une fonction croissante de y.

Supposons alors, que y, qui croît au début à partir de y_0, lui reste supérieur jusqu'à une valeur x_1 pour laquelle il redevient égal à y_0. En faisant $x = x_1$, $y = y_0$ dans (4), le second membre est nul et le premier est une somme de termes positifs. On aboutit à une contradiction. Donc y *reste toujours* $> y_0$. Il en résulte que *toute solution de* (3) *qui passe par un minimum pour* $x = x_0$ *reste supérieure à ce minimum pour* $x > x_0$.

Remarque I. — Supposons que pour $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = 0$ et $y''_0 < 0$. *Dans le cas où q est nul*

$$\frac{y'^2}{2} + \int_{x_0}^{x} py'^2dx = \mathrm{F}(y)$$

Supposons que pour $x = x_1 > x_0$ on passe à nouveau par la valeur y_0, on aurait

$$\frac{y_1'^2}{2} + \int_{x_0}^{x_1} py'^2dx = 0$$

ce qui est impossible. Par suite, dans ce cas, toute solution de (3) qui passe par un maximum pour $x = x_0$, reste inférieure à ce maximum pour $x > x_0$.

Remarque II. — Supposons que y passe par un autre minimum $y = y_1 > y_0$ pour $x = x_1$

$$\int_{x_0}^{x_1} py'^2dx + \int_{x_0}^{x_1} q(x)da = \mathrm{F}(y_1).$$

Soit $x > x_1$,

$$\frac{y'^2}{2} + \int_{x_0}^{x_1} py'^2dx + \int_{x_1}^{x} py'^2dx + \int_{x_0}^{x_1} q(x)da + \int_{x_1}^{x} q(x)da = \mathrm{F}(y)\,;$$

$$\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(y_1) = \frac{y'^2}{2} + \int_{x_1}^{x} py'^2dx + \int_{x_1}^{x} q(x)da.$$

Or

$$\int_{x_0}^{x_1} qda = q(x_1)\int_{y_1}^{\xi} da = q(x_1)\{a[y(\xi)] - a[y(x_1)]\},$$

$$\xi > x_1, \qquad a[y(\xi)] > a[y(x_1)].$$

Cette intégrale est positive. Donc $\mathrm{F}(y) - \mathrm{F}(y_1) > 0$.

b) Le premier membre de (4) est toujours positif. Donc $\mathrm{F}(y)$ doit rester toujours > 0. Si Y est la plus petite des racines de F supérieures à y_0, on a

$$y_0 \leqq y \leqq \mathrm{Y}.$$

L'intervalle effectif de variation de y est compris dans (y_0, Y). $\mathrm{F}(y)$ admet, dans cet intervalle, une borne supérieure B et la relation (4) montre que $\frac{y'^2}{2}$ est inférieur à B, d'où

$$-\sqrt{2\mathrm{B}} < y' < \sqrt{2\mathrm{B}},$$

y et y' *sont donc bornés dans les deux sens.*

c) Les deux intégrales $\int_{x_0}^{x} py'^2dx$ et $\int_{x_0}^{x}(a_0 - a)q'(x)dx$ sont croissantes et toutes deux inférieures à B. Elles ont donc, quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, des limites L et L′ dont la somme est au plus égale à B et (4) montre que

$$\lim_{\frac{1}{x}=0}\left[\mathrm{F}(y) - \frac{y'^2}{2}\right] = \mathrm{L} + \mathrm{L}'. \tag{5}$$

Si y tend vers une limite l quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, il en est de même pour y' et réciproquement. Or

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} y'dx, \qquad l = y_0 + \int_{x_0}^{+\infty} y'dx.$$

Puisque y' a une limite l', celle-ci ne peut-être que zéro. Donc, si y ou y' tend vers une limite quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, y' tend vers zéro.

d) Si p a une borne iuférieure positive C

$$C\int_{x_0}^{x} y'^2 dx < \int_{x_0}^{x} p y'^2 dx < B$$

l'intégrale $\int_{x_0}^{x} y'^2 dx$ est donc bornée et tend vers une limite quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro.

3. Nous allons démontrer que *dans tous les cas où p a une borne inférieure positive, y' tend vers zéro avec* $\frac{1}{x}$.

Remarquons d'abord que si, à partir d'une certaine valeur de x, y' ne s'annule plus, y croît ou décroît constamment. Comme il est borné dans les deux sens, il tend vers une limite et y' tend vers zéro.

Il ne ncus reste donc qu'à étudier le cas où y présente toujours lorsque x croît indéfiniment, une infinité de maxima et de minima.

[Désignons par $L = \overline{\lim}_{x=+\infty} y'^2$ la plus grande des limites[1] pour x infini positif, de y'^2.

L est fini, nul ou positif. Si $L = 0$, y' tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$. Supposons donc $L > 0$; soit h^2 un nombre compris entre 0 et L ; d'après la définition de L, il existe toujours une infinité de valeurs de x aussi grandes que l'on veut, pour lesquelles $y'^2 > h^2$; on peut choisir parmi ces valeurs une suite croissante

$$x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n, \; \ldots$$

telle que la différence de deux termes consécutifs $x_n - x_{n-1}$ soit toujours supérieure à un nombre positif donné 2ε, ce qui s'écrit $x_n - \varepsilon > x_{n-1} + \varepsilon$. Faisons correspondre au terme x_n de la suite l'intervalle $(x_n - \varepsilon, \; x_n + \varepsilon)$; ces intervalles n'empiètent pas les uns sur les autres ; et considérons la série de terme général

$$u_n = \int_{x_n - \varepsilon}^{x_n + \varepsilon} y'^2 \, dx \, ;$$

(1) Voir les *leçons sur la théorie de la croissance* de M. Borel, 1910, p. 10.

ses termes sont positifs et, si $x_1 - \varepsilon > x_0$, la somme

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n < \int_{x_0}^{+\infty} y'^2 \, dx$$

admet une borne supérieure positive (voir plus haut). La série est donc convergente et son terme général u_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}\cdot$ La borne inférieure de y'^2 dans l'intervalle d'intégration $(x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$ tend aussi vers zéro avec $\frac{1}{n}\cdot$ Par suite, pour n assez grand, il existera dans l'intervalle des valeurs de x pour lesquelles $y'^2 < \frac{h^2}{2}$; soit $\overline{x_n}$ l'une d'elles ; on a

$$y'^2(x_n) - y'^2(\overline{x_n}) > \frac{h^2}{2}$$

ou en appliquant la formule de l'accessoirement fini au premier membre

$$2\,|x_n - \overline{x_n}|\,|y'(\overline{\overline{x_n}})y''(\overline{\overline{x_n}})| > \frac{h^2}{2}$$

$\overline{\overline{x_n}}$ étant compris entre x_n et $\overline{x_n}$, $|x_n - \overline{x_n}| < \varepsilon$, donc

$$|y'(\overline{\overline{x_n}})y''(\overline{\overline{x_n}})| > \frac{h^2}{4\varepsilon}\cdot$$

Mais ε est aussi petit que l'on veut ; il existerait donc des valeurs de x aussi grandes que l'on veut telles que $|y'y''|$ soit arbitrairement grande.

Supposons $|f(y)|$ borné supérieurement dans l'intervalle (y_0, Y) ; alors puisque $|y'|$ et borné et que

$$|y'y''| = \left| f(y) - py' - q(x)\frac{da(y)}{dy} \right| |y'|,$$

le premier nombre est aussi borné en vertu des hypothèses précédentes ; nous aboutissons à une contradiction. On a nécessairement $L = 0$ et y' *tend bien vers zéro avec* $\frac{1}{x}\cdot$

Alors y a une limite l telle que $F(l) = L + L'$ mais

$$y' = \int_{x_0}^{x} \left[f(y) - py' - q\frac{da}{dy} \right] dx \; ;$$

quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, l'intégrale du second membre a pour limite zéro, l'élément différentiel a une limite $f(l)$. Elle ne saurait être que zéro. Donc y *admet comme limite une racine de* $f(y) = 0$, racine double de $F(y) = L + L'$.

Ces résultats viennent s'ajouter à ceux de l'étude classique de l'équation $y'' = f(y)$ dont on sait les importantes applications en Mécanique.