FRANÇOIS GALLISSOT

Application des formes extérieures du 2e ordre à la dynamique newtonienne et relativiste

Annales de l'institut Fourier, tome 3 (1951), p. 277-285
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1951__3__277_0>

APPLICATION DES FORMES EXTÉRIEURES DU 2e ORDRE A LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE ET RELATIVISTE

par **François GALLISSOT** (Grenoble).

Introduction

La mécanique est généralement conçue en définissant des grandeurs cinématiques vitesse, accélération, des grandeurs dynamiques forces, la différentielle du vecteur vitesse étant liée au produit vecteur force par dt par le principe de Newton. En admettant que les phénomènes mécaniques sont susceptibles d'être décrits par des équations différentielles, il est intéressant d'avoir une forme génératrice des équations différentielles complètement invariantes dans les transformations du groupe ponctuel portant sur un ensemble de $2n$ variables de position et vitesse.

A notre point de vue en mécanique Newtonienne, un point matériel de masse m est repéré par 7 variables x^i, t, v^i (i variant de 1 à 3) auquel on associe une forme extérieure construite sur les différentielles dx^i, dt, dv^i,

$$\omega = mk_{ij}dv^i \wedge dx^j - mk_{ij}v^i dv^j \wedge dt + k_{ij}X^i dx^j \wedge dt$$

(k_{ij} symbole de Krönecker, X^i composantes de la force F appliquée au point) ω est invariante dans les transformations du groupe Galiléen et son expression a même forme par rapport à tout repère Galiléen orthonormé. Les équations différentielles du mouvement sont les équations associées à ω :

$$\frac{\partial\omega}{\partial(dx^j)} = -m\,dv^i + X^i dt = 0 \qquad \frac{\partial\omega}{\partial(dv^i)} = m(dx^j - v^j dt) = 0.$$

Il est essentiel de remarquer que ce sont les équations associées à ω qui lient les paramètres v^i aux différentielles des paramètres de position x^i et au temps.

Nous avons montré (1) que dans le cadre de la mécanique classique pour un système matériel à $2n$ paramètres de position et vitesse, on peut toujours lui associer une forme extérieure de Cartan du deuxième ordre dont les équations associées jointes aux liaisons imposées de nature quelconque, définissent les équations différentielles du mouvement.

I. — Établissement des équations de la dynamique des milieux continus en mécanique Newtonienne.

1. Lemme. — Étant donnée une forme extérieure du deuxième ordre ω définie sur une variété V_{2n+1} on peut lui associer une forme bilinéaire $\omega(\delta, d)$; les équations du mouvement annulent $\omega(\delta, d)$ quel que soit le choix des δ.

Soit
$$\omega = k_{\alpha\beta} d\rho^\alpha \wedge d\rho^\beta - b_{\alpha_0} d\rho^\alpha \wedge dt$$
$k_{\alpha\beta}$, b_{α_0} tenseurs antisymétriques.

On peut associer à ω la forme bilinéaire
$$\omega(\delta, d) = \delta\rho^\alpha \wedge \frac{\partial\omega}{\partial(d\rho^\alpha)} + \delta\rho^\beta \wedge \frac{\partial\omega}{\partial(d\rho^\beta)} + \delta t \wedge \frac{\partial\omega}{\partial(dt)}$$
ou
$$\omega(\delta, d) = k_{\alpha\beta}[\delta\rho^\alpha \wedge d\rho^\beta - \delta\rho^\beta \wedge d\rho^\alpha] - b_{\alpha_0}[\delta\rho^\alpha \wedge dt - \delta t \wedge d\rho^\alpha].$$

Si d désigne un élément différentiel de la variété intégrale V_1 dans V_{2n+1} les équations différentielles du mouvement étant
$$(1) \qquad \frac{\partial\omega}{\partial(d\rho^\alpha)} = 0 \qquad \frac{\partial\omega}{\partial(d\rho^\beta)} = 0 \qquad \frac{\partial\omega}{\partial(dt)} = 0$$
(conséquence des $2n$ équations précédentes) on a bien $\omega(\delta, d) = 0$ quel que soit δ sur une variété intégrale.

Remarques. 1. — Le résultat précédent peut encore s'exprimer : Dans l'espace à $2n+1$ dimensions, quelle que soit la variété γ à une dimension, pour la variété V_2 engendrée par les variétés intégrales V_1 s'appuyant sur γ l'intégrale $\int_{V_2} \omega(\delta, d) = 0$.

2. — La forme $\omega(\delta, d)$ étant nulle sur toute variété V_2 engendrée par les variétés intégrales V_1 s'appuyant sur γ $\omega(\delta, d)$ est une forme linéaire des intégrales premières du système différentiel (1).

(1) Cf. Communication au Congrès des Sociétés Savantes, Grenoble, 1952, sous presse. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 234, p. 2148-2150, 26 mai 1952.

Si l'on prend $\delta = d$ comme $\omega = \frac{1}{2}\omega(d, d)$ on en déduit que la forme extérieure ω s'exprime uniquement au moyen des différentielles des intégrales premières du système (1).

$$\omega = k_{ij} dc^i \wedge dc^j \quad ky \text{ fonctions de } c^i, c^j \text{ et d'une variable } t.$$

3. — $d\omega = 0$, ω ne s'exprime qu'au moyen des différentielles des intégrales premières

$$\omega = dc^i \wedge dc^j.$$

ω étant une forme fermée il existe localement $\overset{*}{\omega}$ tel que $d\overset{*}{\omega} = \omega$; la forme $\overset{*}{\omega}$ s'exprime également au moyen des différentielles des intégrales premières du système (¹) ; $\overset{*}{\omega}$ est un invariant intégral linéaire du système (¹) au sens de M. E. Cartan.

2. *Équations des milieux continus.* — Considérons un milieu à trois dimensions rapporté à un système de coordonnées curvilignes q^i (i variant de 1 à 3). Soient V un volume fini, ΔV un élément de volume, ρ la densité de matière en un point, ΔS un élément de surface de la frontière de V.

Associons au volume V la forme

$$\Omega(\delta, d) = \int_V \rho\omega_C \Delta V + \int_V \omega f_V \Delta V + \int_{FV} \omega f_S . \Delta S$$

avec

$$\omega_C = \delta p_i \wedge dq^i - \delta q^i \wedge dp_i - \delta T \wedge dt \tag{2}$$

partie cinétique de ω sous forme Hamiltonienne.

$$\omega f_V = \sum_1^3 Q_i \delta q^i \wedge dt \tag{3}$$

partie dynamique de ω correspondant aux forces de volume

$$\omega f_S \Delta S \sum_{ij}^{3} - \Delta S_j T\delta^{ij} q_i \wedge dt \tag{4}$$

partie dynamique de ω correspondant aux forces de surface.

Transformons par la formule de Stokes l'intégrale $\int_{FV} \omega f S \Delta S$, en désignant par D le symbole de dérivation absolue.

$$\int_{F.V} \omega f_S \Delta S = dt \wedge \int_{FV} T^{ij} \delta q_i \Delta S_j$$
$$= dt \wedge \int_V \left[\frac{D(T^{ij})}{Dq^j} \delta q_i + T^{ij} \frac{D(\delta q_i)}{Dq^j} \right] \Delta V.$$

Dans (2) et (3) interviennent les composantes δq^i sous forme contravariante. Mettons les sous forme covariante au moyen du tenseur métrique contravariant g^{ij}, $\delta q^i = g^{ij}\delta q_j$

$$\omega_{\mathrm{C}} = \delta p_i \wedge \left[dq^i - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_i} dt\right] - g^{ij}\left(dp_j - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p^j} dt\right) \wedge \delta q_i$$

$\omega f_{\mathrm{V}} = \sum_1^3 \mathrm{Q}^i \delta q_i \wedge dt$ en introduisant les composantes contravariantes des forces de volume d'où

$$(5)\quad \Omega = -\int_{\mathrm{V}}\left[\rho g^{ij}\left(dp_j - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_j} dt\right) - \mathrm{Q}^i dt + \frac{\mathrm{D}(\mathrm{T}^{ij})}{\mathrm{D}q^j} dt\right] \wedge \delta \rho_i \Delta \mathrm{V}$$
$$+ \int_{\mathrm{V}} \rho \delta p_i \wedge \left[dq^i - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p^i} dt\right] \Delta \mathrm{V} + dt \wedge \int_{\mathrm{V}}^{\cdot} \mathrm{T}^{ij} \frac{(\mathrm{D}\delta q_i)}{\mathrm{D}q^j} \Delta \mathrm{V}.$$

Dans l'expression de Ω nous n'avons pas tenu compte des forces intérieures au volume V car ces forces sont complètement inconnues. D'après le postulat de la mécanique classique : puissance des forces intérieures nulle pour un champ de vitesses qui est un champ de moments, postulat équivalent à ce que le travail des forces intérieures soit nul, si δq désigne un déplacement dans l'espace à 3 dimensions, nous considérerons dans ce qui suit les δq correspondants à des déplacements. Ils sont les solutions des équations de Killing.

$$(6)\qquad \frac{\mathrm{D}(\delta q_i)}{\mathrm{D}q^j} + \frac{\mathrm{D}(\delta q_j)}{\mathrm{D}q^i} = 0.$$

Pour chaque point du milieu si les δq satisfont aux équations (6), les d correspondant aux équations différentielles du mouvement de ce point sont tels que $\Omega = 0$.

a) En choisissant pour les δq les translations solutions des équations (7) $\dfrac{\mathrm{D}(\delta q_i)}{\mathrm{D}q^j} = 0$, Ω sous la forme 5 se réduit à

$$\Omega(\delta, d) = -\int_{\mathrm{V}}\left\{\left[\rho g^{ij}\left(dp_j - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q^j} dt\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \mathrm{Q}^i dt + \frac{\mathrm{D}(\mathrm{T}^{ij})}{\mathrm{D}q^j} dt\right] \wedge \delta q_i - \rho \delta p_i \wedge \left[dq^i - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_i} dt\right]\right\} \Delta \mathrm{V}.$$

L'intégrale du deuxième membre devant être nulle pour tout choix de fonctions continues solutions de (7) et de δp_i fonctions continues arbitraires il en résulte les 6 équations (8)

$$(8) \qquad \begin{cases} \rho g^{ij}\left(dp_j - \dfrac{\partial T}{\partial q^j}dt\right) - Q^i dt + \dfrac{D(T^{ij})}{Dq^j}dt = 0 \\ dq^i - \dfrac{\partial T}{\partial p_i}dt = 0 \end{cases}$$

réductibles aux 3 équations du second ordre classiques (9)

$$(9) \qquad \rho\gamma^i = Q^i - \frac{D(T^{ij})}{Dq^j} \qquad \gamma^i = \ddot{q}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k,$$

Γ^i_{jk} étant le symbole de Christoffel de 2^e espèce.

b) En choisissant pour les δq des déplacements quelconques, Ω compte tenu des équations (8) se réduit à

$$\Omega(\delta, d) = dt \wedge \int_V T^{ij}\frac{D(\delta q_i)}{Dq^j}\Delta V = \frac{dt}{2} \wedge \int_V T^{ij}\frac{D(\delta q_i)}{Dq^j} + T^{ji}\frac{D(\delta q_j)}{Dq^i}$$

ou en tenant compte de (6)

$$\Omega(\delta, d) = \frac{dt}{2}\int (T^{ij} - T^{ji})\frac{D(\delta q_i)}{Dq^j}\Delta V$$

Ω étant nulle pour un choix de fonctions continues solutions de (6) $\dfrac{D(\delta q_i)}{Dq^j} \neq 0$ l'intégrale précédente étant nulle, $T^{ij} = T^{ji}$, ce qui montre que le tenseur des contraintes est symétrique.

Remarques. 1. — On peut en tenant compte de l'équation de continuité mettre les équations 9 sous la forme signalée par M. Lichnérowicz [2] qui conduisent aux équations de la mécanique relativiste des milieux continus

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \frac{D(\rho v^i v^j + T^{ij})}{Dq^j} = Q^i.$$

2. — Pour établir les équations de Killing (6) il suffit d'écrire que dans une transformation ponctuelle la différentielle absolue du carré de l'élément de longueur ds est nulle.

II. — Équations de la mécanique du point en relativité restreinte. — La relativité restreinte repose sur les postulats suivants :

1) Par rapport à tout repère R de la variété V_4 espace-temps la vitesse d'une onde électro-magnétique est une constante c.

(2) Cf. M. Lichnérowicz, *Éléments de calcul tensoriel*, Armand Colin, N° 259, p. 157.

En admettant que V_4 puisse être rapportée à des coordonnées Galiléennes x, y, z, t, formées d'un trièdre trirectangle associée à une variable temps, ce postulat entraîne l'existence de l'invariant métrique fondamental (³)

$$(1) \qquad ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

ds désignant l'arc de trajectoire du point dans V_4.

2) Un point est doué d'une énergie de repos e_0 nombre essentiellement positif.

3) Une force $\vec{F}$ agissant sur un point matériel sera définie par rapport au repère R par les composantes contravariantes d'un quadrivecteur F^i. Pour $\vec{F} = 0$ les trajectoires sont les géodésiques de V_4 définies par les équations associées d'une forme extérieure de degré 2.

Axiomatiquement associons au point M la forme extérieure ω du 2ᵉ ordre construite sur les différentielles des 4 paramètres x^i (i variant de 1 à 4 avec $ct = x^4$) et les différentielles de 4 paramètres u^i liés par la relation

$$(2) \qquad (u^4)^2 - \sum_1^3 u^i)^2 = 1.$$

$$(3) \qquad \omega = e_0\Big[cdu^4 \wedge dt - \sum_1^3 du^i \wedge dx^i - u^4du^4 \wedge ds + \sum_1^3 u^idu^i \wedge ds\Big] + \Big[F^4cdt - \sum_1^3 F^idx^i\Big] \wedge ds$$

ou

$$(4) \qquad \omega = e_0k_{ij}[du^i \wedge dx^j - u^idu^j \wedge ds] + k_{ij}F^idx^j \wedge ds$$

avec $k_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $k_{ij} = +1$ pour $i = j = 4$,
$k_{ij} = -1$ pour $i = j = 1, 2, 3$.

Théorème. — La forme ω est invariante dans les transformations du groupe de Lorentz appliquées simultanément aux variables x^i, u^i, laissant invariantes les deux formes quadratiques 1 et 2.

Soient deux repères Galiléens de V_4 auxquels on associe respectivement les deux systèmes de 8 variables : 1° repère x^i, u^i, 2° repère ξ^σ, α^σ.

On passe du premier au deuxième au moyen des formules

$$\xi^\sigma = a_i^\sigma x^i + b^\sigma \qquad \alpha^\sigma = a_i^\sigma u^i$$

d'où

$$d\xi^\sigma = a_i^\sigma dx^i \qquad d\alpha^\sigma = a_i^\sigma du^i.$$

(³) Cf. Borel Introduction géométrique à quelques théories physiques, Paris, 1914 p. 8.

L'invariance de la forme quadratique de (2) $k_{ij}u^i u^j = k_{\rho\sigma}\alpha^\rho \alpha^\sigma$ entraîne pour la matrice $A = ||a_i^\sigma||$ les propriétés

$$k_{\rho\sigma}a_i^\rho q_j^\sigma = k_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ pour } i \neq j \\ +1 \text{ pour } i = j = 4, \quad -1 \text{ pour } i = j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} k_{\rho\sigma}d\alpha^\rho \wedge d\xi^\sigma &= k_{\rho\sigma}a_i^\rho a_j^\sigma du^i \wedge dx^j = k_{ij}du^i \wedge dx^j, \\ k_{\rho\sigma}\alpha^\rho d\alpha^\sigma &= k_{\rho\sigma}a_i^\rho a_j^\sigma u^i du^j = k_{ij}u^i du^j, \\ k_{\rho\sigma}\Phi^\rho d\xi^\sigma &= k_{\rho\sigma}a_i^\rho a_j^\sigma F^i dx^j = k_{ij}F^i du^j. \end{aligned}$$

d'où l'invariance de ω écrite sous la forme (4).

Équations du mouvement. — Ce sont les équations associées à ω qui s'écrivent sous forme théorique

$$(5)\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial(du^4)} = e_0(cdt - u^4 ds), & \dfrac{\partial\omega}{\partial(dt)} = (-e_0 du^4 + F^4 ds)c, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial(du^i)} = e_0(-dx^i + u^i ds), & \dfrac{\partial\omega}{\partial(dx^i)} = e_0 du^i - F^i ds = 0. \end{cases}$$

Équations usuelles. — Lorsqu'on a en vue les applications, il est commode d'introduire les grandeurs accessibles à la mesure par rapport au trièdre usuel x, y, z.

La vitesse usuelle du point sera le vecteur $\vec{v}$ de composantes $v^i = \dfrac{dx^i}{dt}$, rapports des différentielles dx^i, dt

$$ds^2 = c^2dt^2 - \Sigma(dx^i)^2 = c^2dt^2(1 - \beta^2)$$

en posant $\beta = \dfrac{v}{c}, \qquad v = \sqrt{\sum_1^3 \left(\dfrac{dx^i}{dt}\right)^2}.$

D'où en remplaçant ds par $dt\, c\sqrt{1 - \beta^2}$ dans les équations (5) les équations usuelles

$$(6)\begin{cases} v^i = \dfrac{dx^i}{dt} = c\dfrac{u^i}{u^4}, \\ u^4 = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \qquad 6' \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{e_0 v^i}{c\sqrt{1 - \beta^2}}\right) = F^i c\sqrt{1 - \beta^2}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{e_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right) = F^4 c\sqrt{1 - \beta^2}. \end{cases}$$

dont les quatre dernières s'interprètent vectoriellement dans l'espace V_4 au moyen du vecteur impulsion énergie $\vec{p} = \dfrac{e_0}{c}\vec{u}$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}) = \vec{f} \qquad \text{avec} \qquad \vec{f} = \vec{F}\sqrt{1 - \beta^2}.$$

Remarques. 1. — Si on désire obtenir les équations dans l'espace à 3 dimensions de

$$(u^4)^2 - \Sigma(u^i)^2 = 1 \qquad \text{on déduit} \qquad c\,du^4 = c\frac{u^i}{u^4}du^i = v^i du^i$$

avec
$$u^i = \frac{v^i}{c\sqrt{1-\beta^2}} \qquad ds = c\sqrt{1-\beta^2}\,dt$$

d'où l'expression (3) de ω devient (7)

$$(7) \quad \omega = e_0 k_{ij} v^i d\left(\frac{v^j}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right) \wedge dt - e_0 k_{ij} d\left(\frac{v^i}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right) \wedge dx^j$$
$$- k_{ij} F^i dx^j \wedge c\sqrt{1-\beta^2}\,dt$$

ce qui donne les trois premières équations de (6) et (6′).

Il résulte de (7) que si $\beta \to 0$, ω après division par $-c$ a pour limite (8) :

$$(8) \qquad -\frac{1}{c}\,\omega_{\lim \beta = 0} = \frac{e_0}{c^2} k_{ij} dv \wedge d^i x^j - \frac{e_0}{c^2} k_{ij} V^i dv^j + k_{ij} F^i du^j \wedge dt$$

qui est la forme extérieure génératrice des équations différentielles d'un point en mécanique Newtonienne. De là l'idée relativiste de considérer la quantité $\frac{e_0}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} = m$, comme la masse d'un corps en mouvement, et $m_0 = \frac{e_0}{c^2}$ comme la masse au repos.

2. — Composition des vitesses colinéaires en mécanique relativiste.

Dans notre conception la vitesse par rapport à un repère R est définie comme le rapport des différentielles dx^i, à la différentielle dt : $v^i = \frac{dx^i}{dt}$. Pour établir la règle de composition des vitesses considérons deux repères (x^i), (ξ^σ) coïncidants pour $x^i = 0$, les axes $\Theta\xi$ et Ox glissant l'un sur l'autre, les axes $\Theta\eta$ et Oy, $\Theta\zeta$ et Oz restant respectivement parallèles, on passe du 1er au 2e par les formules.

$$(9) \quad \|\xi^\sigma\| = \|a^\sigma_i\| \times \|x^i\| \qquad \text{avec matrice} \qquad \|a^\sigma_i\| = \begin{Vmatrix} a^1_1 & 0 & 0 & a^1_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a^4_1 & 0 & 0 & a^4_4 \end{Vmatrix}.$$

D'où le passage du système des 8 variables (x^i, u^i) au système des 8 variables $(\xi^\sigma, \alpha^\sigma)$ par les formules (9) et (10)

$$(10) \qquad \|\alpha^\sigma\| = \|a^\sigma_i\| \times \|u^i\|.$$

L'invariance de la forme quadratique

$$(\alpha^4)^2 - \sum_1^3 (\alpha^i)^2 = (u^4)^2 - \sum_1^3 (u^i)^2$$

entraîne pour les coefficients a_i^σ les relations.

$$(a_4^4)^2 - (a_4^1)^2 = 1 \quad (a_1^4)^2 - (a_1^1)^2 = 1 \quad -a_1^1 a_4^1 + a_1^4 a_4^4 = 0$$

d'où $$a_1^1 = a_4^4 = \mathrm{ch}\,\varphi \quad a_1^4 = a_4^1 = \mathrm{Sh}\,\varphi.$$

Il en résulte les formules de changement de repère.

$$(11) \quad \begin{cases} \xi = x\,\mathrm{ch}\,\varphi + ct\,\mathrm{Sh}\,\varphi \\ c\tau = x\,\mathrm{Sh}\,\varphi + ct\,\mathrm{ch}\,\varphi \end{cases} \qquad (11') \quad \begin{cases} \alpha^1 = u^1\,\mathrm{ch}\,\varphi + u^4\,\mathrm{Sh}\,\varphi \\ \alpha^4 = u^1\,\mathrm{Sh}\,\varphi + u^4\,\mathrm{ch}\,\varphi \end{cases}$$

D'après les formules (6) la vitesse du point par rapport au 1^{er} repère est $V = \frac{cu^1}{u^4}$ par rapport au 2^e $W = \frac{c\alpha^1}{\alpha^4}$.

De (11′) on déduit

$$W = \frac{c\alpha^1}{\alpha^4} = \frac{cu'\,\mathrm{sh}\,\varphi + cu^4\,\mathrm{ch}\,\varphi}{u^1\,\mathrm{sh}\,\varphi + u^4\,\mathrm{ch}\,\varphi} = \frac{c\frac{u^1}{u^4} + c\,\mathrm{Th}\,\varphi}{1 + \frac{c\,\mathrm{Th}\,\varphi}{c^2} : c\frac{u^1}{u^4}},$$

suit

$$(12) \qquad W = \frac{V + V_0}{1 + \frac{V_0}{c^2}},$$

en posant $V_0 = c\,\mathrm{Th}\,\varphi$, vitesse du 1^{er} trièdre par rapport au 2^e, d'où résulte la signification mécanique du paramètre φ, et la loi de composition des vitesses colinéaires en mécanique relativiste.

(Parvenu aux Annales le 28 juin 1952.)