

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

P. RIVOIRE

## **Fonctions rationnelles sur un corps fini**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 6 (1956), p. 121-124

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1956\\_\\_6\\_\\_121\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1956__6__121_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# FONCTIONS RATIONNELLES SUR UN CORPS FINI

par Paul RIVOIRE

---

## I. — GÉNÉRALITÉS

Etant donné un corps de base  $K$ , et son corps des fractions rationnelles à une indéterminée  $K(X)$ , rappelons qu'un  $K$ -automorphisme  $s$  de  $K(X)$  est bien déterminé par la fraction rationnelle  $s(X)$ ; celle-ci est nécessairement de la forme  $\frac{aX + b}{cX + d}$  ( $ad - bc \neq 0$ ).

Une telle propriété permet de caractériser le groupe  $G$  des  $K$ -automorphismes de  $K(X)$  comme groupe des homographies régulières  $X \rightarrow \frac{aX + b}{cX + d}$ ,  $a, b, c, d$  étant des éléments de  $K$  tels que  $ad - bc \neq 0$ . (c. f. Van der Waerden, *Moderne Algebra*, § 63).

— Si  $K$  est infini, le corps des invariants  $K_G$  de  $K(X)$  par le groupe  $G$  est évidemment réduit à  $K$ .

— Si  $K$  est fini, donc nécessairement de caractéristique  $p > 0$ ,  $G$  est fini, donc  $K_G$  contient des fractions rationnelles non constantes, et le théorème de Lüroth montre d'ailleurs que c'est une extension transcendante pure de  $K$ .

Dans ces conditions, il est possible d'appliquer les résultats de la théorie classique de Galois — extensions galoisiennes de degré fini — à l'étude de  $G$  et de ses sous-groupes. On rappelle que  $G$  est isomorphe au groupe projectif des matrices carrées régulières d'ordre 2, à éléments sur  $K$ . Il est d'ordre  $q^3 - q$ ,  $q$  désignant le nombre d'éléments de  $K = F_q$ .

**II. — CORPS DES INVARIANTS DE G**

Le transformé de  $X^q - X$  par  $s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est :

$$(ad - bc) \frac{X^q - X}{(cX + d)^{q+1}}.$$

Celui de  $X^{q^2} - X$  est :  $(ad - bc) \frac{X^{q^2} - X}{(cX + d)^{q^2+1}}$ . Cela montre que la fraction rationnelle  $I(X) = \frac{(X^{q^2} - X)^{q+1}}{(X^q - X)^{q^2+1}}$  est invariante par  $s$ . Cette fraction, que nous pouvons mettre sous la forme :

$$I(X) = \frac{\left[ \sum_0^q X^{(q-1)(q-j)} \right]^{q+1}}{(X^q - X)^{q^2 - q}}, \text{ est de hauteur inférieure à } q^3 - q.$$

Puisque  $I(X)$  est invariante par  $s$ ,  $K(I)$  est contenu dans  $K_G$  :  $(K(I) \subset K_G \subset K(X))$ , et l'inégalité  $(K(X)/K(I)) \leq q^3 - q$  implique :

$$(K_G/K(I)) \leq 1,$$

puisque  $(K(X)/K_G) = q^3 - q$ .

On en conclut alors que  $K_G = K(I)$ , i. e. :

$$K_G = F_q \left( \frac{(X^{q^2} - X)^{q+1}}{(X^q - X)^{q^2+1}} \right).$$

**III. — SOUS-GROUPE DE G.  
CORPS DES INVARIANTS CORRESPONDANTS**

Le groupe des « similitudes »  $H : X \rightarrow aX + b$ , est d'ordre  $q(q-1)$  et admet, pour corps d'invariants :

$$K_H = F_q((X^q - X)^{q-1}).$$

Le groupe des translations  $H' : X \rightarrow X + b$ , est d'ordre  $q$ . C'est un sous-groupe distingué de  $H$ , et son corps des invariants

$$K_{H'} = F_q(X^q - X)$$

est une extension galoisienne (même cyclique) de  $K_H$ .

Le groupe des homothéties  $H_1 : X \rightarrow aX$ , qui est aussi le groupe relatif de  $K_{H_1}$  sur  $K_H$ , est d'ordre  $q-1$ . Son corps des invariants est évidemment  $K_{H_1} = F_q(X^{q-1})$ . Rappelons que  $H$  est le produit semi-direct de  $H'$  par  $H_1$ .

Deux sous-groupes conjugués de  $H$ , désignés par  $G_1$  et  $G_2$ , sont respectivement définis par les conditions

- (1)  $\quad \quad \quad \langle a + b = c + d \rangle$
- (2)  $\quad \quad \quad \langle a + c = b + d \rangle$

En caractéristique 2, ils sont identiques.

En caractéristique  $\neq 2$ , leur intersection  $G_1 \cap G_2$ , d'ordre  $q-1$ , est l'ensemble des automorphismes  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ . Le corps des invariants de  $G_1$  est :

$$K_{G_1} = F_q \left( \frac{(X-1)^{q(q-1)}}{[(X-1)^{q-1} - 1]^{q-1}} \right)$$

Celui de  $G_2$  est :

$$K_{G_2} = F_q \left( \frac{(X+1)^{q(q-1)}}{[(X+1)^{q-1} - 1]^{q-1}} \right)$$

Les groupes  $H_+ = H \cap G_1$  et  $H_- = H \cap G_2$  sont définis par les conditions « dégénérées »

- (1')  $\quad \quad \quad a + b = 1$
- (2')  $\quad \quad \quad a - b = 1$ .

Ils sont d'ordre  $q-1$ , et admettent respectivement pour corps d'invariants :

$$K_{H_+} = F_q((X-1)^{q-1} - 1) \quad \text{et} \quad K_{H_-} = F_q((X+1)^{q-1} - 1)$$

Désignons par  $Q$  l'ensemble des carrés de  $F_q$ . C'est un sous-groupe multiplicatif de  $F_q^*$ , d'indice 2 en caractéristique  $p \neq 2$ , et s'identifiant à  $F_q^*$  en caractéristique 2. Nous supposons, dans ce qui suit,  $p \neq 2$ .

Le groupe  $H_Q$ , ensemble des automorphismes  $X \rightarrow aX + b$

pour lesquels  $a \in Q$ , est d'ordre  $q(q-1)/2$ , et son corps des invariants est :

$$K_{H_q} = F_q \left( (X^q - X)^{\frac{q-1}{2}} \right).$$

C'est une extension cyclique de  $K_H$ . Si nous envisageons, de la même manière, les groupes  $H_{+,q} = H_Q \cap G_1$  et  $H_{-,q} = H_Q \cap G_2$ , ils sont d'ordre  $\frac{q-1}{2}$ , distingués relativement à  $H_+$  et  $H_-$ , et admettent pour corps d'invariants :

$$\begin{aligned} K_{H_{+,q}} &= F_q((X-1)^{q-1/2} - 1) \\ K_{H_{-,q}} &= F_q((X+1)^{q-1/2} - 1) \end{aligned}$$

Le groupe  $\mathcal{G}$ , qui se compose de tous les automorphismes pour lesquels  $D(s) = 1$ , est d'indice 2 en caractéristique  $\neq 2$ , et s'identifie à  $G$  en caractéristique 2.

Rappelons qu'il est simple, sauf si  $q = 2$  ou  $q = 3$  (cf. E. Dickson, *Linear Groups*, Leipzig 1901). En caractéristique  $\neq 2$ , son corps des invariants est une extension cyclique de  $K_G$ .

---