ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARCEL BRELOT

Nouvelle démonstration du théorème fondamental sur la convergence des potentiels

Annales de l'institut Fourier, tome 6 (1956), p. 361-368

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1956__6__361_0>

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL SUR LA CONVERGENCE DES POTENTIELS *

par M. BRELOT.

1. Considérons sur un domaine ω de $R^\tau (\tau \geqslant 2)$ les fonctions sousharmoniques. Il est immédiat que la limite d'une suite décroissante (ou d'un ordonné filtrant décroissant) est $-\infty$ ou sousharmonique. Le cas de croissance est beaucoup plus difficile. Il est d'abord immédiat (T. Radò [9]) que pour des fonctions sousharmoniques u admettant localement une même borne supérieure finie, la limite d'une suite croissante est presque sousharmonique (ou plus précisément sous-médiane) et cela s'étend d'ailleurs [4] à un ordonné filtrant croissant et à l'enveloppe supérieure d'une famille de u. Cela signifie que la limite ou enveloppe diffère, seulement sur un ensemble E de mesure de Lebesgue nulle, d'une fonction sousharmonique dans ω (nécessairement unique, dite régularisée).

Puis on a établi (Brelot [1]) pour une suite croissante de ces u que la limite est « à peu près sousharmonique », c'est-à-dire que l'ensemble E est localement de capacité intérieure nulle, autrement dit que tout sous-ensemble compact de E est de capacité nulle. Enfin H. Cartan [6] a montré que la limite est « quasi sousharmonique », c'est-à-dire que E est de capacité extérieure nulle, ou, ce qui est équivalent, polaire (1); et l'énoncé s'étend à un ordonné filtrant croissant, donc à l'enveloppe supérieure d'un ensemble quelconque de u. Cette forme ultime est un théorème-clef de la théorie moderne du

* (Note sur les épreuves). On peut éviter d'utiliser la polarité de l'ensemble des points irréguliers et le lemme 5 grâce au lemme suivant démontré par Choquet: Si K est un compact (non de capacité nulle) dans le domaine Ω, il existe sur K une mesure $\geqslant 0$ non nulle dont le potentiel G^Ω est fini continu dans Ω.

(1) Rappelons qu'un ensemble polaire est caractérisé par la propriété locale qu'il fait partie des infinis d'une fonction sousharmonique (ou d'un potentiel de masses $\leqslant 0$). Il est immédiat qu'une réunion dénombrable d'ensembles polaires est polaire.

potentiel classique. De caractère local, il revient d'ailleurs à un théorème sur les potentiels de masses > 0 avec un noyau qui peut être, au lieu de $h(r)$ (c'est-à-dire $r^{2-\tau}(\tau > 2)$] ou $\log\frac{1}{r}(\tau = 2)\Big)$ la fonction de Green du domaine.

La démonstration de H. Cartan repose sur un long développement de la théorie du potentiel, basé sur l'emploi de l'énergie, de la norme-énergie sur l'ensemble des mesures et la complétion de l'ensemble des mesures $\geqslant 0$ d'énergie finie; on traite d'abord le cas des potentiels d'énergie finie et on en déduit le cas général.

Nous allons donner ici *une autre démonstration*, utilisant non plus l'énergie et une complétion correspondante, mais la *compacité* de l'ensemble des mesures $\geqslant 0$ sur un compact, avec une limitation de la masse totale et la topologie de la convergence vague, notion indépendante de la théorie du potentiel. Tout se ramène au cas d'un ensemble de fonctions localement uniformément bornées. On partira alors du cas des suites et du résultat facile primitif [1] que E est de capacité intérieure nulle (ce qui peut se déduire aisément du résultat classique de la théorie autonome du problème de Dirichlet, affirmant que l'ensemble des points-frontière irréguliers est polaire). On passe à la capacité extérieure nulle grâce au résultat de Choquet sur la capacitabilité générale, résultat qui prend place maintenant, à côté de la mesure, dans les instruments fondamentaux de l'analyse. La seule difficulté est alors de ramener au cas d'une suite, le cas de l'ensemble initial de fonctions. Ainsi se trouve fort peu utilisée la théorie proprement dite du potentiel qui, comme on l'a déjà fait [3], peut alors être basée sur le théorème en question.

Nous allons indiquer rapidement sous une forme aussi élémentaire que possible, les éléments préliminaires à cette nouvelle démonstration, dans un ordre qui peut être suivi pour un développement détaillé.

2. *Préliminaires.* — Renvoyant pour les généralités à [9] [4] [2] [5] [6], considérons dans R^τ un domaine Ω par exemple *sphérique*, de fonction de Green $G(M, P)$. On notera U^μ le « potentiel de Green » $\int G(M, P)\,d\mu(P)$ d'une mesure de

Radon portée par un compact de Ω. Si E est un compact dans Ω, soit W la solution du problème de Dirichlet dans $\Omega - E$ avec valeur 1 sur la frontière $\overset{*}{E}$ de E et 0 sur celle $\overset{*}{\Omega}$ de Ω. Le prolongement (W, 1) de W par 1 sur E est continu dans Ω, sauf peut être aux points de E qui sont points-frontière irréguliers pour $\Omega - E$. Or ces points irréguliers forment un ensemble E_0, réunion dénombrable de compacts possédant la propriété que toute charge > 0 sur chacun a un potentiel non borné au voisinage (²); et l'on sait que cette propriété pour le compact équivaut à ce qu'il soit polaire (Frostman-Brelot, voir [2] th. 7).

E_0 est donc polaire et (W, 1) est finie, continue sauf aux points d'un ensemble polaire (ou comme on dit, quasi-partout). Si v est surharmonique > 0 sur Ω, égale à $+\infty$ sur E_0, $W + \lambda v$ est surharmonique quel que soit $\lambda > 0$, donc (W, 1) est presque surharmonique (donc même quasi-surharmonique). La régularisée $\widehat{(W, 1)}$ est un potentiel de Green dans Ω, dit potentiel capacitaire de E; la mesure associée est dite capacitaire et la masse totale correspondante est dite *capacité* de E (relativement à Ω). On définit la capacité intérieure d'un ensemble de Ω comme la borne supérieure des capacités des compacts contenus et la capacité extérieure comme la borne inférieure des capacités intérieures des ouverts contenants.

La condition de capacité extérieure nulle équivaut à la polarité [6] (³). Après ces généralités élémentaires, mettons en évidence comme lemmes les propriétés essentielles suivantes :

LEMME 1. — Pour un ensemble borélien (ou même d'ailleurs analytique) dans Ω, les capacités intérieure et extérieure coïncident.

C'est un cas particulier des résultats de Choquet [7] sur la notion très générale de capacité contenant la précédente.

Convergence vague (⁴). — Considérons les mesures μ sur un

(²) Cette propriété générale d'un domaine ou d'un ouvert borné peut s'établir, un peu plus facilement que par les manières voisines du travail original de Evans [8], avec seulement quelques notions immédiates sur le potentiel, selon [5].

(³) On pourrait dans ces éléments introductifs éviter de parler de la polarité, qui n'intervient dans la suite que comme propriété de capacité extérieure nulle. Mais la notion est importante et directement indépendante de Ω, l'équivalence est facile et le langage commode.

(⁴) Voir dans [6] et Bourbaki (intégration) des notions plus générales et résultats plus forts.

compact E. La topologie vague sur l'ensemble de ces μ est la moins fine rendant continue $\int f d\mu$ pour chaque f finie continue sur E. La convergence (vague) d'une base de filtre $\mathcal{F}$ sur ces μ vers μ_0 se traduit par la condition $\int f d\mu \underset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \int f d\mu_0$ pour toute f.

Lemme 2. — Les mesures $\mu \geqslant 0$ sur E telles que $\mu(E) \leqslant k$ fixé forment un compact, c'est-à-dire que à tout filtre sur ces mesures on peut associer un filtre plus fin qui converge (vaguement).

Une démonstration immédiate consiste à voir que tout ultra-filtre Φ sur ces μ est convergent. Pour chaque f, $\int f d\mu$ transforme Φ en une base d'ultra-filtre sur un intervalle fini de la droite numérique, base qui converge donc vers un nombre fini. Ce point de convergence est une fonctionnelle de f définissant une mesure $\geqslant 0$ vers laquelle converge Φ.

Système total. — Sur E un système total de fonctions finies continues est tel que toute fonction finie continue sur E peut être approchée à ε près par une combinaison linéaire de fonctions du système. Un exemple est formé par tous les monomes $x_1^{n_1} \dots x_\tau^{n_\tau}$; il est dénombrable.

Lemme 3. — Considérons une base de filtre $\mathcal{F}$ sur un ensemble de mesures $\mu' \geqslant 0$ définies sur E avec les $\mu'(E)$ bornées. Si pour une mesure $\mu_0 \geqslant 0$, $\int \varphi \, d\mu' \underset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \int \varphi \, d\mu_0$ pour chaque φ d'un système total, alors $\mathcal{F}$ converge vers μ_0 ([5]).

Car si $|f - \Sigma\lambda_p\varphi_p| < \varepsilon$, on a

$$\left|\int f d\mu' - \int f d\mu_0\right| \leqslant \Sigma|\lambda_p| \left|\int \varphi_p \, d\mu' - \int \varphi_p \, d\mu_0\right| + 2\varepsilon A$$

où A majore les $\mu'(E)$ et $\mu_0(E)$.

Lemme 4. — Soit sur les mesures $\mu \geqslant 0$ portées par E une base de filtre $\mathcal{F}$ convergeant vers $\mu_0 \geqslant 0$. Alors en tout point M de Ω : $\liminf_{\mathcal{F}} U^\mu \geqslant U^{\mu_0}$.

Car si $[G]_k = (\inf G(M, P), k)$

$$\int G \, d\mu \geqslant \int [G]_k \, d\mu \underset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \int [G]_k \, d\mu_0 \quad \text{et} \quad \int [G]_k \, d\mu_0 \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int G \, d\mu_0.$$

([5]) De même pour les φ d'un ensemble partout dense dans l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions finies continues sur E. On sait qu'il existe un tel ensemble dénombrable, ce qui résulte aussi du système total dénombrable.

Lemme 5. — [6] Soit sur des mesures $\mu' \geqslant 0$ portées par E, dont le potentiel est uniformément borné par K, une base de filtre $\mathcal{F}$ convergeant vers μ_0 dont le potentiel est donc aussi borné par K (en particulier une suite $\mu_n \to \mu_0$). Soit φ sur E une fonction bornée par la constante L et continue hors d'un ensemble polaire E_0; alors $\int \varphi\, d\mu' \underset{\mathcal{F}}{\to} \int \varphi\, d\mu_0$.

Soit en effet δ ouvert contenant E_0 et de capacité intérieure $< \varepsilon$. Si e est un compact dans δ, $\mu'(e) \leqslant k.\mathrm{cap}(e)$ d'après la comparaison de $\dfrac{U^{\mu'}}{k}$ et du potentiel capacitaire [7] d'où

$$\mu'(\delta) \leqslant k\varepsilon \qquad \text{et de même} \qquad \mu_0(\delta) \leqslant k\varepsilon.$$

Donc

$$\left|\int \varphi\, d\mu' - \int_{\Omega-\delta} \varphi\, d\mu'\right| \qquad \text{et} \qquad \left|\int \varphi\, d\mu_0 - \int_{\Omega-\delta} \varphi\, d\mu_0\right|$$

sont $\leqslant \mathrm{LK}\varepsilon$ tandis que

$$\int_{\Omega-\delta} \varphi\, d\mu' \underset{\mathcal{F}}{\to} \int_{\Omega-\delta} d\mu$$

d'où le résultat.

3. Théorème général de H. Cartan. — *Soit dans un ouvert de* R^τ *un ensemble de fonctions surharmoniques* $v \geqslant 0$. *L'enveloppe inférieure est quasi-surharmonique, c'est-à-dire ne diffère d'une fonction surharmonique que sur un ensemble de capacité extérieure nulle autrement dit polaire.*

On se ramène aussitôt au cas de fonctions uniformément majorées par une constante. Car si le théorème est alors établi, l'ensemble des $\inf(v, n)$ (n fixé) admet une enveloppe inférieure quasi-surharmonique; donc la limite pour $n \to \infty$ de cette enveloppe est quasi-surharmonique, mais cette limite est justement l'enveloppe inférieure des v.

On se ramène aussi au cas d'un domaine sphérique Ω, puis en adjoignant les enveloppes inférieures d'un nombre fini quelconque de fonctions, on obtient un ensemble ordonné filtrant décroissant dont la limite selon le filtre des sections

[6] Voisin du lemme 1 de [1].

[7] Les deux fonctions s'annulent à la frontière où elles admettent des dérivées normales : (puisqu'elles se prolongent même harmoniquement au travers de la sphère). L'inégalité des fonctions entraîne l'inégalité des dérivées d'où celle des flux et des masses totales associées.

vaut l'enveloppe inférieure de cet ensemble ou celle de l'ensemble donné.

Il suffit encore d'étudier l'enveloppe dans un domaine sphérique concentrique Ω_0 de rayon plus petit. On remplacera dans $\Omega - \Omega_0$ chaque fonction surharmonique par la solution du problème de Dirichlet dans la couronne avec valeur 0 sur $\overset{*}{\Omega}$ et la valeur de la fonction sur $\overset{*}{\Omega}_0$. Cela donne un potentiel de Green dans Ω.

Finalement on est ramené à un ordonné filtrant décroissant de potentiels de Green $U^{\mu'}$ dans Ω, bornés par une constante K et dont les mesures $\mu' \geqslant 0$ sont portées par le compact $\overline{\Omega_0}$; on a alors $\mu'(\overline{\Omega_0}) \leqslant K . \operatorname{cap}(\overline{\Omega_0})$.

Examinons d'abord le cas particulier d'une suite décroissante $v_n = U^{\mu_n}$ de limite V, et dont le μ_n converge vaguement vers un $\mu \geqslant 0$. Montrons que V est quasi-partout égale à U^μ.

On sait par le lemme 4 que $V \geqslant U^\mu$. Montrons que l'ensemble où l'inégalité stricte a lieu est polaire. C'est en effet la réunion dénombrable des ensembles boréliens E_p (p entier) où $V > U^\mu + \frac{1}{p}\cdot$ Voyons que E_p est polaire.

Or soit α un compact dans E_p, ν sa distribution capacitaire

$$\int U^{\mu_n}\, d\nu = \int U^\nu\, d\mu_n \to \int U^\nu\, d\mu \qquad \text{d'après le lemme 5.}$$

Donc
$$\int \left(U^\mu + \frac{1}{p}\right) d\nu \leqslant \int U^\nu\, d\mu = \int U^\mu\, d\nu$$

ce qui exige $\nu \equiv 0$ c'est-à-dire α de capacité nulle.

Par suite E_p est de capacité intérieure nulle, donc (d'après Choquet lemme 1) de capacité extérieure nulle ([8]).

Arrivons au cas général des $U^{\mu'}$ auxquels nous nous sommes ramenés. Ordonnons les μ' par la condition que μ'_α est « après » μ'_β si $U^{\mu'_\alpha} \leqslant U^{\mu'_\beta}$.

Il existe sur les μ' d'après le lemme de compacité (2) un filtre $\mathcal{F}$

([8]) C'est à peu près la démonstration donnée dans [1] où l'on montre dans un cas plus général que la limite est à près surharmonique : faute du lemme 1, on utilise alors la propriété (Frostman) qu'une réunion dénombrable d'ensembles boréliens de capacité intérieure nulle est de capacité intérieure nulle. On peut conclure comme dans [1] sans l'hypothèse de convergence vague des μ_n en utilisant une extraction de suite réalisant cette convergence vague, ce qu'on peut faire sans la forme générale de l'axiome du choix, par le procédé diagonal.

plus fin que le filtre des sections de l'ordonné filtrant et convergeant vaguement vers une mesure $\mu_0 \geqslant 0$ sur $\overline{\Omega_0}$.

Partons d'une suite de fonctions f_n finies continues sur $\overline{\Omega_0}$ que nous choisirons plus loin et soit $\varepsilon_n > 0$ tendant vers 0.

Prenons un ensemble α_1 de $\mathcal{F}$ tel que

$$\left|\int f_1\,d\nu - \int f_1\,d\mu_0\right| < \varepsilon_1 \qquad \text{quel que soit} \qquad \nu \in \alpha_1$$

et choisissons μ'_1 dans α_1.

Puis prenons dans α_1 un ensemble α_2 de $\mathcal{F}$ formé d'éléments situés « après » μ'_1 et tel que

$$\left|\int f_2\,d\nu - \int f_2\,d\mu_0\right| < \varepsilon_2 \qquad \text{quel que soit} \qquad \nu \in \alpha_2$$

et choisissons μ'_2 dans α_2, etc.

On forme ainsi une suite de mesures $\mu'_n \geqslant 0$ sur $\overline{\Omega_0}$ telles que $U^{\mu'_n}$ décroisse et que :

$$\left|\int f_p\,d\mu'_n - \int f_p\,d\mu_0\right| \leqslant \varepsilon_p \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant p.$$

Précisons le choix des f. On part d'un système total (9) dénombrable $\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n \ldots$ de fonctions finies continues sur $\overline{\Omega_0}$ et on prend pour les f la suite φ_1 ; φ_1, φ_2 ; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$; ...

Alors on voit que $\left|\int \varphi_k\,d\mu'_n - \int \varphi_k\,d\mu_0\right|$ sera moindre que ε, pour k fixé, dès que n est assez grand, c'est-à-dire que

$$\int \varphi_k\,d\mu'_n \underset{n\infty}{\rightarrow} \int \varphi_k\,d\mu_0$$

ce qui entraîne la convergence vague de μ'_n vers μ_0.

D'après le cas particulier antérieur nous concluons que $\lim U^{\mu'_n}$ majore U^{μ_0} et l'égale quasi-partout.

D'autre part $\lim U^{\mu'_n} \geqslant \operatorname{Inf} U^{\mu'} = \lim_{\mathcal{F}} U^{\mu'} \geqslant U^{\mu_0}$ d'après le lemme 4.

Donc $\operatorname{Inf} U^{\mu'}$ majore U^{μ_0} et l'égale quasi-partout.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Brelot, Sur le potentiel et les suites de fonctions sousharmoniques, *C. R. Ac. Sc.*, t. 207 (1938), p. 836.

[2] M. Brelot, Sur la théorie autonome des fonctions sousharmoniques, *Bull. Sc. Math.*, 65 (1941).

(9) ou partout dense dans l'espace $\mathcal{C}$ (note 5).

[3] M. Brelot, Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités, *J. de Math.*, 24 (1945), p. 1-32.

[4] M. Brelot, Fonctions sousharmoniques, presque sousharmoniques ou sous-médianes, *Ann. de l'Un. de Grenoble*, t. 21 (1945), p. 75-90.

[5] M. Brelot, A new proof of the fundamental theorem of Kellogg-Evans on the set of irregular points in the Dirichlet problem, *Rend. del circ. mat. Palermo*, Ser. II, IV (1955), p. 112-121.

[6] H. Cartan, Théorie du potentiel newtonien, énergie, capacité, suites de potentiels, *Bull. Soc. Math.*, 73 (1945), p. 74-106.

[7] G. Choquet, Theory of capacities, *Annales Inst. Fourier*, t. 5 (1953-1954), p. 131-295.

[8] G. C. Evans, Application of Poincaré's sweeping out process, *Proc. nat. Ac. of Sc.*, 19 (1933), p. 457-461.

[9] T. Rado, Subharmonic functions, *Ergebn. der Math.*, Bd 5, 1, Berlin, Springer (1937).

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN

Publications littéraires et scientifiques

TYPO - OFFSET

05 - GAP - Téléphone 14-23 14-24

Dépot légal n 91 1968