

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HENRI MOREL

**Existence de noyaux sur  $R \times R$  indéfiniment différentiables dans l'ouvert  $\{(x, y) \in R \times R, x \neq y\}$ , semi-régulier en  $x$  non semi-régulier en  $y$**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 10 (1960), p. 303-306

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1960\\_\\_10\\_303\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1960__10_303_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXISTENCE DE NOYAUX SUR  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  
INDÉFINIMENT DIFFÉRENTIABLES  
DANS L'OUVERT  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \neq y\}$ ,  
SEMI-RÉGULIER EN  $x$ , NON SEMI-RÉGULIER EN  $y$  <sup>(1)</sup>

par Henri MOREL (Paris).

---

On rencontre en théorie de l'hypoellipticité des noyaux-distributions dont on doit vérifier qu'ils sont simultanément : indéfiniment différentiables en dehors de la diagonale, semi-régulier en  $x$  et semi-régulier en  $y$ . On peut se demander (lettre de M. Trèves à M. Schwartz) si les deux premières propriétés entraînent la troisième; on montre que non en construisant l'exemple suivant.

Soit  $\alpha(x)$  une fonction réelle d'une variable réelle, indéfiniment dérivable, à support dans  $(-1 \leq x \leq 0)$  et telle que  $0 < \alpha(x) \leq 1$  dans  $(-1 < x < 0)$ ;  $\alpha\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ ;  $\int_{-1}^0 \alpha(x) dx = \frac{1}{2}$ ;  $\alpha(x) < |x|$  pour  $x > -\frac{1}{4}$ ;  $\alpha$  est décroissante pour  $x > -\frac{1}{2}$ . Alors si  $x \rightarrow 0$ ,  $\forall p > 0$ ,  $\alpha(x)/x^p \rightarrow 0$ .

$$\text{Soit } m_p = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{d^p \alpha(x)}{dx^p} \right|.$$

<sup>(1)</sup> L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, tome I, 2<sup>e</sup> édition, p. 138, Paris, Hermann.

Soit  $g(x, y)$  la fonction définie dans  $\mathbb{R}^2$  comme suit :

pour  $x \leq -\frac{1}{2}$  et  $x \geq 0$ , on a  $g(x, y) = 0$ ;

pour  $-\frac{1}{2^{n-1}} \leq x \leq -\frac{1}{2^n}$ ,  $n \geq 2$ , on a

$$g(x, y) = \alpha \left[ \left( x + \frac{1}{2^n} \right) / \frac{1}{2^n} \right] \alpha \left[ \left( -y + \frac{1}{2^n} \right) / \alpha \left( -\frac{1}{2^n} \right) \right].$$

Vérifions successivement que

I.  $g(x, y)$  est un noyau indéfiniment différentiable en dehors de la diagonale : c'est une fonction indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine et bornée donc localement sommable; elle est d'ailleurs indéfiniment dérivable en  $x$  et en  $y$  partout : les dérivées à l'origine sont toutes nulles; mais la fonction  $g(x, y)$  n'est pas continue en ce point; on peut d'ailleurs construire un exemple ayant les trois propriétés que nous vérifions pour  $g(x, y)$  et en plus celle d'être partout différentiable jusqu'à un ordre fini quelconque.

II. Elle n'est pas semi-régulière en  $y$  :

Soit  $u(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,  $u(x) = 1$  pour  $-1 \leq x \leq 0$ ; la distribution :

$$v(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) u(x) v(y) dx dy$$

est définie par la fonction :

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y) u(x) dx = \int_{-1}^0 g(x, y) dx.$$

Il suffit de voir que  $I(y)$  n'est pas dérivable pour  $y=0$  : on a  $I(0) = 0$ ; pour

$$y_n = \left( \frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{2} \alpha \left( -\left( \frac{1}{2} \right)^n \right), \quad g(x, y_n) = \alpha \frac{x + \left( \frac{1}{2} \right)^n}{\left( \frac{1}{2} \right)^n},$$

donc  $I(y) = \left( \frac{1}{2} \right)^n \times \frac{1}{2}$ ; si  $n$  tend vers  $+\infty$  le quotient différentiel

$$\frac{I(y_n) - I(0)}{y_n} = \frac{1}{2} \frac{\left( \frac{1}{2} \right)^n}{\left( \frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{2} \alpha \left( -\left( \frac{1}{2} \right)^n \right)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

d'ailleurs, d'autres suites de quotients différentiels  $\rightarrow 0$ : il n'y a même pas de dérivée à droite.

III.  $g(x, y)$  est semi-régulière en  $x$ : soit  $\nu \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ; la distribution  $u(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) u(x) \nu(y) dx dy$  est définie par la fonction  $J(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x, y) \nu(y) dy$ ; pour  $x \neq 0$ , il est clair que  $J$  est indéfiniment dérivable; voyons-le pour  $x = 0$ : soit  $|\nu(y)| < M$ ; soit  $n(x)$  l'entier tel que  $\frac{-1}{2^{n(x)-1}} < x \leq \frac{-1}{2^{n(x)}}$  (pour  $x < 0$ ) on a donc:  $\frac{2}{|x|} > 2^{n(x)}(1)$  on a

$$|g(x, y)| \leq \alpha \left[ \left( -y + \frac{1}{2^{n(x)}} \right) / \alpha \left( -\frac{1}{2^{n(x)}} \right) \right]$$

on a

$$J(0) = 0; |J(x)| < M \int g(x, y) dy \leq \frac{1}{2} M \alpha \left( -\frac{1}{2^{n(x)}} \right) < \frac{1}{2} M \alpha(x)$$

donc,  $\left| \frac{J(x) - 0}{x} \right| \leq \frac{1}{2} M \frac{\alpha(x)}{x} \rightarrow 0$  si  $x \rightarrow 0$  et  $J(x)$  a une dérivée première  $J'(0) = 0$ .

$|J(x)|$  est majorée par une fonction  $\alpha(x)$  dont toutes les dérivées sont nulles pour  $x = 0$ ; cela implique que  $J'(0)$  existe et  $J'(0) = 0$ , mais une fonction satisfaisant à ces conditions seulement pourrait très bien ne pas avoir d'autres dérivées (exemple  $J(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin e^{\frac{1}{x^2}}$ ). Montrons que  $J(x)$  est indéfiniment dérivable pour  $x = 0$  par récurrence: supposons que  $J^p(0)$  existe et  $J^p(0) = 0$ ; on a

$$\left| J_{x \neq 0}^p(x) \right| = \left| \int \frac{d^p}{dx^p} g(x, y) \nu(y) dy \right| \leq M \int \left| \frac{d^p}{dx^p} g(x, y) \right| dy$$

or,

$$\frac{d^p}{dx^p} g(x, y) = 2^{pn(x)} \alpha^p \left( \frac{x + \frac{1}{2^{n(x)}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n(x)}} \right) \alpha \left( \frac{-y + \frac{1}{2^{n(x)}}}{\alpha \left( -\frac{1}{2^{n(x)}} \right)} \right)$$

donc

$$\left| J_{x \neq 0}^p(x) \right| \leq M \cdot m_p \cdot (2^{n(x)})^p \cdot \frac{1}{2} \alpha \left( -\left(\frac{1}{2}\right)^{n(x)} \right)$$

donc, d'après (1),

$$\left| \frac{J^p(x)}{x \neq 0} \right| \leq M \cdot m_p \cdot 2p^{-1} \alpha(x) / x^p$$

donc

$$\left| \frac{J^p(x) - J^p(0)}{|x|} \right| \leq M \cdot m_p \cdot 2p^{-1} \alpha(x) / x^{p+1} \rightarrow 0 \quad \text{si } x \rightarrow 0.$$

Donc  $J^{p+1}(0)$  existe et  $J^{p+1}(0) = 0$ .

---