VICTOR GUILLEMIN
SHLOMO STERNBERG

Sur les systèmes de formes différentielles

Annales de l'institut Fourier, tome 13, n° 2 (1963), p. 61-74
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1963__13_2_61_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
13, 2 (1963), 61-74.

SUR LES SYSTÈMES DE FORMES DIFFÉRENTIELLES

par Victor GUILLEMIN (Columbia University)
et Shlomo STERNBERG (Harvard University)

INTRODUCTION

Étant donné une G-structure, on peut en principe, déterminer tous ses invariants structuraux en appliquant deux procédés fonctoriels un nombre fini de fois (voir E. Cartan [2]) :

1) Réduire le groupe structural en astreignant le tenseur de structure à prendre certaines valeurs.

2) Induire une G-structure sur le fibré tangent à la G-structure donnée par *prolongation.*

Si l'on entend par G-structure une structure fibrée au sens moderne, le procédé 1) fait sortir de cette catégorie, même localement, mais on peut tout de même obtenir quelques résultats intéressants. Notre théorème 1, 1 est de ce genre et nous en indiquerons d'autres dans un article à paraître.

Dans son mémoire [3], Cartan applique les méthodes esquissées dans [2] aux systèmes de Pfaff de cinq variables et en obtient une classification complète.

Nous appliquons ces méthodes aux systèmes de Pfaff plus généraux en nous bornant à établir quelques résultats sur leurs groupes d'automorphismes. De plus, nous nous restreignons aux cas les plus simples du point de vue algébrique.

D'abord, considérons un champ de n-plans, Ω_n, sur une variété connexe V_m de dimension $m = \frac{n(n+1)}{2}$.

On suppose que la distribution obtenue de Ω_n en formant les crochets de tous les couples de champs de vecteurs contenus dans Ω_n est partout de dimension maximale (*i. e.* l'espace tangent tout entier).

Nous démontrons que le groupe des difféomorphisme de V_m qui conserve Ω_n est un groupe de Lie de dimension finie [1].

Si, pour $m > \frac{n(n+1)}{2}$, Ω_n satisfait à la condition ci-dessus, et, en plus, n'admet pas une distribution dérivée complètement intégrable, la même conclusion subsiste, mais, il nous sera plus commode de remettre la démonstration à un article ultérieur.

En même temps, nous discuterons le cas : $2 < m < \frac{n(n+1)}{2}$ qui présente quelques difficultés algébriques qu'il n'est pas utile d'aborder ici.

1. — Généralités sur les G-structures.

Les méthodes que nous utilisons ici ont leurs origines dans les travaux de Cartan sur les groupes de Lie infinis et sur le problème d'équivalence. Voir [2], [4] et, pour un exposé moderne, [5], [6] et [7].

Pour tout ce qui concerne les définitions fondamentales de G-structures, voir [1] ou [7]. On peut trouver l'essentiel du théorème 1, 1 dans [5].

Soit V_n une variété différentiable de dimension n, M un espace vectoriel de dimension n et G un sous-groupe de GL (M). Un G-structure sur V_n est la donnée, en tout point p, de V_n, d'un sous-ensemble, S_p de Hom $[M, T_p(V_n)]$ tel que les axiomes suivants soient satisfaits.

1) Les éléments de S_p sont inversibles,

2) Si $A \in G$ et $\alpha \in S_p$, alors $\alpha \circ A \in S_p$,

3) Si $\alpha \in S_p$, $\beta \in S_p$, alors il existe un $A \in G$ tel que $\alpha \circ A = \beta$.

Aux axiomes 1), 2) et 3) il faut, bien entendu, ajouter quelques conditions de régularité dont nous nous passerons ici. Moyennant ces conditions l'ensemble :

$$\bigcup_{p \in V_n} S_p$$

(1) Nous supposons partout $n > 2$. Pour $n = 2$ nous avons une structure de contact, qui admet comme groupe des automorphismes un groupe de Lie infini simple.

devient un fibré principal de groupe structural G, que nous noterons $E(V_n, G)$.

Soit g l'algèbre de Lie de G. En regardant g comme sous-espace de $M \otimes M^*$ on a la suite :

$$g \otimes M^* \xrightarrow{i} M \otimes M^* \otimes M^* \xrightarrow{A} M \otimes M^* \wedge M^*$$

où l'application « i » est l'inclusion et l'application « A » l'anti-symétrisation. Nous désignerons par « ∂ » l'application composée.

Soit p un point de V_n et α un élément de S_p. « α^{-1} » applique l'espace tangent en p sur l'espace M et, par relèvement, définit une application de l'espace tangent en (p, α) sur l'espace M. La loi, qui associe à tout couple (p, α) l'application que nous venons de définir, définit une 1-forme canonique sur $E(V_n, G)$ à valeur dans M, ce que nous appelons sa *forme de structure*. Désignons-la par μ.

Soit z un élément de $E(V_n, G)$. Choisissons arbitrairement une application linéaire, Φ, de M dans T_z tel que $\mu \circ \Phi$ soit l'identité sur M.

$d\mu \circ \Phi$ est un élément de Hom $(M \wedge M, M)$ donc moyennant une identification canonique, c'est un élément de $M \otimes M^* \wedge M^*$.

On peut démontrer (c.f. [1]) que son image dans l'espace quotient $M \otimes M^* \wedge M^* / \partial(g \otimes M^*)$ ne dépend pas du choix de Φ.

La loi qui associe à tout point de $E(V_n, G)$ l'élément de $M \otimes M^* \wedge M^* / \partial(g \otimes M^*)$ ainsi défini s'appelle le *tenseur de structure* de $E(V_n, G)$.

G opère canoniquement à droite dans les deux variétés $E(V_n, G)$ et $M \otimes M^* \wedge M^* / \partial(g \otimes M^*)$. On démontre sans peine que le tenseur de structure est une application différentiable de la première variété dans la seconde, qui commute avec ces deux actions.

2. — G-structures de type fini.

Soient M et N deux espaces vectoriels de dimension finie et g un sous-espace de Hom (M, N). Nous désignerons par $g^{(1)}$ le sous-espace de Hom (M, g) formé des applications :

$$A : M \to g$$

tel que

$$A_v \circ w = A_w \circ v \quad \text{pour tous} \quad v, w \in \mathrm{M}.$$

Par récurrence, nous définissons $g^{(k)}$, sous-espace de Hom $[\mathrm{M}, g^{(k-1)}]$, par l'identité $g^{(k)} = g^{(k-1)(1)}$.

$g^{(k-1)}$ est, par récurrence, un sous-espace de Hom $[\mathrm{M}, g^{(k-2)}]$, donc cette définition a un sens.

Nous dirons que g est de type fini si $g^{(k)} = 0$, k suffisamment grand, et du type k si $g^{(k)} = 0$ et $g^{(k-1)} = 0$.

Dans le cas qui nous intéresse, $\mathrm{M} = \mathrm{N}$, g est une sous-algèbre de Hom (M, M) et $\mathrm{G} \subset \mathrm{GL}(\mathrm{M})$ un sous-groupe de Lie associé.

Nous dirons que G est de type fini (soit de type k) si g est de type fini (soit du type k).

Ce concept joue un rôle fondamental dans la théorie des groupes de transformation des G-structures comme indique le théorème suivant :

Théorème 1, 1. — *Soit* $\mathrm{E}(\mathrm{V}_n, \mathrm{G}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{V}_n$ *une* G-*structure donnée et soit* :

$$f\colon \mathrm{E}(\mathrm{V}_n, \mathrm{G}) \to \mathrm{M} \otimes \mathrm{M}^* \wedge \mathrm{M}^*/\partial(g \otimes \mathrm{M}^*)$$

son tenseur de structure. Désignons par g_z *la sous-algèbre de* g *laissant fixe* $f(z)$ *quand* g *agit canoniquement sur*

$$\mathrm{M} \otimes \mathrm{M}^* \wedge \mathrm{M}^*/\partial(g \otimes \mathrm{M}^*).$$

Supposons g_z de type $\leqslant k$ pour tout z et soient $n_0, \ldots, n_k$, des bornes supérieures pour les dimensions des algèbres dérivées de g_z quand z parcourt $\mathrm{E}(\mathrm{V}_n, \mathrm{G})$.

Conclusion. — Le groupe des difféomorphismes global de V_n qui conserve la G-structure donnée est un groupe de Lie de dimension au plus $n + n_0 + \cdots + n_k$.

Le théorème est encore valable si on remplace « global » par « infinitésimal » et « groupe » par « algèbre ».

Comme corollaire on a :

Corollaire. — *Supposons* G *de type fini et* $\mathrm{E}(\mathrm{V}_n, \mathrm{G})$ *une* G-*structure quelconque donnée sur* V_n. *Alors le groupe des difféomorphismes de* V_n *conservant la* G-*structure est un groupe de Lie de dimension finie.*

3. — La G-structure associée à un champ de n-plans sur une variété de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Soit V_m une variété de dimension m, Ω_n un champ de n-plans sur V_m, M un espace vectoriel de dimension m et K un sous-espace de dimension n. A tout point p de V_m nous associons l'ensemble des applications linéaires inversibles de M sur T_p qui applique K sur le n-plans appartenant à Ω_n en p. Cela définit une G-structure sur V_m à groupe structural G(K, M), sous-groupe de GL(M) qui applique K sur lui-même. Inversement, se donner une G(K, M) structure sur V_m équivaut à se donner un champ de n-plans, comme on le voit aisément.

Désignons la G(K, M) structure associée à Ω_n par $E(V_m;$ K, M). Nous en calculerons le tenseur de structure. L'algèbre de Lie de G(K, M) se compose de toutes les applications linéaires de M dans M qui appliquent K dans K. Cette algèbre s'identifie à $M\otimes K' + K\otimes M^*$ en $M\otimes M^*$, [(K') désignant l'orthogonal de K dans M^*]. L'espace quotient,

$$M\otimes M^*\wedge M^*/M\otimes K'\wedge M^* + K\otimes M^*\wedge M^*$$

s'identifie à l'espace $M/K\otimes K^*\wedge K^*$.
c'est-à-dire, à Hom $(K\wedge K,\ M/K)$.

Donc le tenseur de structure de $E(V_m;$ K, M) prend ses valeurs dans l'espace vectoriel des applications linéaires de $K\wedge K$ dans M/K.

Soit v_1, v_2 dans K, p un point de V_m et α une application linéaire de M sur T_p qui applique K sur le n-plan $\Omega_n(p)$.

Soient deux X_1, X_2 champs de vecteurs qui appartiennent à Ω_n et prennent les valeurs $\alpha(v_1)$, $\alpha(v_2)$ en p.
Posons :

$$v_3 = \alpha^{-1}\circ[X_1, X_2]_p. \tag{3, 1}$$

Si X'_1 et X'_2 sont autres champs de vecteurs qui appartiennent à Ω_n et prennent en p les valeurs $\alpha(v_1)$ et $\alpha(v_2)$ alors, posant

$$v'_3 = \alpha^{-1}[X'_1, X'_2]_p$$

on voit aisément que $v_3 - v'_3$ est contenu dans K. Donc l'image de v_3 dans M/K dépend seulement de v_1 et v_2. Ainsi, l'équation

(3, 1) définit une application de $K \wedge K$ dans M/K. Celle-ci s'identifie aisément au tenseur de structure de $E(V_m; K, M)$ en $(p. \alpha)$.

Cela étant, considérons le cas :

$$m = \frac{n(n+1)}{2}, \; n \geqslant 3.$$

Soit $X_1, \ldots, X_n$ champs de vecteurs qui définissent Ω_n localement dans un voisinage d'un point p; si

$$(3, 2) \qquad X_i, [X_j, X_k], \; i, j, k = 1, \ldots, n \quad j < k$$

sont linéairement indépendants en p, alors, par ce que nous venons de voir, le tenseur de structure définit un isomorphisme entre $K \wedge K$ et M/K en tout point de la fibre au-dessus de p. Prenons un isomorphisme quelconque

$$c \; K \wedge K \rightarrow M/K$$

fixé une fois pour toute. Soit c' un autre isomorphisme de $K \wedge K$ sur M/K. D'après un théorème élémentaire d'algèbre linéaire, il existe une applicqtion linéaire, A de M/K sur M/K telle que $c' = A \circ c$. Si en tout point de V_m il existe un système de champs de vecteurs pour lequel les vecteurs (3, 2) sont linéairement indépendants, alors le tenseur de structure prend la valeur c au moins une fois sur toute fibre de $E(V_m; K, L)$. Pour voir cela, supposons qu'il prend la valeur c' en un point donné, (p, α), et que $c' = A \circ c$, A étant dans $GL(M/K)$.

Alors si B est un élément de $GL(K, M)$ qui induit zéro sur K et A sur M/K, le tenseur de structure prend la valeur c au point $(p, \alpha \circ B)$.

Désignons par E' le sous-ensemble de $E(V_m; K, M)$ où le tenseur de structure prend la valeur c. Nous montrerons qu'il est, lui-aussi, une G-structure sur V_m. Soit H le sous-groupe de $G(K, M)$ qui laisse fixe c dans $M/K \otimes K^* \wedge K^*$. Si (p, α) appartient à E', alors $(p, \alpha \circ A)$ appartient à E' puisque l'action de $GL(K, M)$ sur $E(V_m; K, M)$ commute avec son action sur $M/K \otimes K^* \wedge K^*$. Par le même raisonnement si (p, α) et (p, β) appartiennent à E', $\alpha = \beta \circ A$ où A est contenu dans H. Donc, par définition, E' est une G-structure sur V_m à groupe structural H. Il est évident que tout difféomorphisme de V_m qui conserve Ω_n conserve E'.

4. — Réduction du groupe structural.

Le but des deux sections suivantes sera de démontrer que E′ satisfait aux hypothèses du théorème 1, 1. Dans cette section nous caractérisons les sous-groupes de H qui entrent dans les hypothèses du théorème 1, 1.

D'abord nous étudierons l'algèbre de Lie de H, soit h. Prenons un complémentaire L de K dans M. L'application, c, de $K \wedge K$ sur M/K définit une application $\tilde{c}$ de $K \wedge K$ sur L.

Si A est une application linéaire de K sur K il induit une application de $K \wedge K$ sur lui-même et, par l'isomorphisme $\tilde{c}$ une application, B de L sur lui-même.

Soit $\psi(A)$ l'application de M sur M qui est identique à A sur K et à B sur L. Soit :

$$(4, 1) \qquad h' = \{\psi(A), A \in GL(K)\}.$$

Tout élément de h applique K dans K et induit donc une application de M/K dans M/K.

Ainsi h s'applique homomorphiquement dans

$$gL(K) + gL(M/K).$$

Nous désignerons par h'' le noyau de cet homomorphisme. C'est l'idéal abélien de h composé de toutes les applications de M dans M qui appliquent M dans K et K en zéro.

h s'écrit comme somme directe des espaces vectoriels h' et h''.

h'' contient un sous-espace invariant, isomorphe à K^*, que voici :

A tout élément $\mu \in K^*$ correspond une application $\Phi\mu$ de $K \wedge K$ dans K qui applique $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ sur

$$(4, 2) \qquad \langle \varphi_1, \mu \rangle \varphi_2 - \langle \varphi_2, \mu \rangle \varphi_1.$$

La composée de c^{-1} et $\Phi\mu$ est une application de M/K dans K. Par relèvement, il donne une application de M dans K, prenant la valeur nulle sur K, appelons $\tilde{\mu}$.

$\tilde{\mu}$ est par définition un élément de h'' et on voit facilement que l'application qui envoie μ sur $\tilde{\mu}$ est linéaire et injective, donc elle identifie K^* avec un sous-espace de h'', que nous appellerons k.

Notre premier résultat sera :

Proposition 4, 1. — Supposons que le tenseur de structure de E′ prenne la valeur

$$b \in \frac{M \otimes M^* \wedge M^*}{\partial(h \otimes M^*)} \text{ en un point donné de } E'.$$

Soit h_b le sous-algèbre de h qui laisse fixe b quand h agit canoniquement sur $M \otimes M^* \wedge M^*/\partial(h \otimes M^*)$. Alors

$$h_b \cap h'' \qquad \text{est contenu dans } k.$$

Démonstration. — Choisissons pour K une base

$$e_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

et mettons

$$e_{ij} = \tilde{c}(e_i \wedge e_j).$$

Alors $\qquad e_i, e_{jk}, \qquad i, j, k = 1, \ldots, n \quad j < k$

forment une base pour M. Soit

$$w^i, w^{jk}, \qquad i, j, k = 1, \ldots, n \quad j < k$$

la base duale. Les éléments :

$$(4, 3) \qquad e_i \otimes w^j + \sum_{\beta=1}^{n} e_{i\beta} \otimes w^{i\beta}\, i, \qquad j = 1, \ldots, n$$

forment une base pour h', et les éléments

$$(4, 4) \qquad e_i \otimes w^{jk} \qquad i, j, k = 1, \ldots, n \quad j < k$$

forment une base pour h''. De là on conclut que $\partial(h \otimes M^*)$ est engendré par :

$$(4, 5) \qquad e_i \otimes w^{jk} \wedge w^l$$

$$(4, 6) \qquad e_i \otimes w^{jk} \wedge w^{lm}$$

$$(4, 7) \qquad \sum_{\beta=1}^{n} e_{i\beta} \otimes w^{j\beta} \wedge w^{kl}$$

$$(4, 8) \qquad e_i \otimes w^j \wedge w^k + \sum_{\beta=1}^{n} e_{i\beta} \otimes w^{j\beta} \wedge w^k$$

où i, j, k, l, m parcourent $1, \ldots, n$.

Posons $Z = L \otimes L' \wedge K'$ où L', K' sont les orthogonaux de L, K dans M^*.

On déduit de (4, 8) que $Z \cap \partial(h \otimes M^*)$ est engendré par les éléments :

$$(4, 9) \qquad \sum_{\beta=1}^{n} e_{i\beta} \otimes \omega^{\beta j} \wedge \omega^{k} + e_{i\beta} \omega^{\beta k} \wedge \omega^{j}$$

où i, j, k parcourent $1, \ldots, n$.

Soit X un élément de h''. Par (4, 4) il a la forme

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \Lambda^{i}_{jk} e_i \otimes \omega^{jk}, \qquad \Lambda^{i}_{jk} = -\Lambda^{i}_{kj}.$$

Appliqué à $\tilde{c}$, X donne

$$(4, 10) \quad (\Lambda^{\alpha}_{\mu\rho}\delta^{\beta}_{\eta\rho} - \Lambda^{\alpha}_{\eta\rho}\delta^{\alpha}_{\mu} + \Lambda^{\beta}_{\eta\rho}\delta^{\alpha}_{\mu} - \Lambda^{\beta}_{\mu\rho}\delta^{\alpha}_{\eta} + 2\Lambda^{\alpha}_{\mu\eta}\delta^{\beta}_{\beta} - 2\Lambda^{\beta}_{\mu\eta}\delta^{\alpha}_{\rho}) e_{\alpha\beta} \otimes \omega^{\mu\eta} \wedge \omega^{\rho} \mod \partial(h \otimes M^*).$$

Si $X\tilde{c} \equiv 0 \mod \partial(h \circ M^*)$ alors, par (4, 9), (4,10) est égale à une expression de la forme :

$$(4, 11) \qquad \sum_{i,j,k=1}^{n} A^{i}_{jk} \Big(\sum_{\beta} e_{i\beta} \otimes \omega^{\beta j} \wedge \omega^{k} + \sum_{\beta} e_{i\beta} \otimes \omega^{\beta k} \wedge \omega^{j} \Big).$$

Mettant

$$B^{i}_{jk} = 4(A^{i}_{jk} + A^{i}_{jk})$$

nous obtenons de (4, 10) et (4, 11).

$$(4, 12) \quad B^{\alpha}_{\eta\rho}\delta^{\beta}_{\mu} - B^{\beta}_{\eta\rho}\delta^{\alpha}_{\mu} - B^{\alpha}_{\mu\rho}\delta^{\beta}_{\eta} + B^{\beta}_{\mu\rho}\delta^{\alpha}_{\eta} = \Lambda^{\alpha}_{\mu\rho}\delta^{\beta}_{\eta} - \Lambda^{\alpha}_{\eta\rho}\delta^{\beta}_{\mu} + \Lambda^{\beta}_{\eta\rho}\delta^{\alpha}_{\mu} - \Lambda^{\beta}_{\mu\rho}\delta^{\alpha}_{\eta} + 2\Lambda^{\alpha}_{\mu\eta}\delta^{\beta}_{\rho} - 2\Lambda^{\beta}_{\mu\eta}\delta^{\alpha}_{\rho}.$$

Enfin, de (4, 12) nous obtenons par contraction :

$$(2, n) \quad B^{\beta}_{\eta\rho} - \sum_{\alpha=1}^{n} B^{\alpha}_{\alpha\rho}\delta^{\beta}_{\eta} = n\Lambda^{\beta}_{\eta\rho} + \sum_{\alpha=1}^{n} \Lambda^{\alpha}_{\alpha\rho}\delta^{\beta}_{\eta} + 2\sum_{\alpha=1}^{n} \Lambda^{\alpha}_{\alpha\eta}\delta^{\beta}_{\rho}.$$

Nous en tirons par antisymétrisation :

$$(4, 13) \qquad \Lambda^{\alpha}_{\eta\rho} = \lambda_{\eta}\delta^{\alpha}_{\rho} - \lambda_{\rho}\delta^{\alpha}_{\eta}$$

pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ convenable, et, par symétrisation :

$$(4, 14) \qquad B^{\alpha}_{\eta\rho} = \mu_{\eta}\delta^{\alpha}_{\rho} + \mu_{\rho}\delta^{\alpha}_{\eta}$$

pour $\mu_1, \ldots, \mu_n$ convenable.

On voit facilement que (4, 12) équivaut à

$$\mu_i = \lambda_i \quad i = 1, \ldots, n$$

(4, 13) exprime que $X \in k$; donc si, X est dans h'', pour que $X\tilde{c} \equiv 0 \mod \partial(h \otimes M^*)$ il faut et il suffit que X soit dans k.

Si le tenseur de structure prend la valeur b en un point donné de E′, alors modulo $\partial(h \otimes M^*)$, b peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{c} + \Delta_1 + \Delta_2$$

où Δ_1 appartient à $K \otimes L' \wedge K'$ et Δ_2 appartient à $L \otimes K' \wedge K'$. Soit X dans h''. Par (4, 5) — (4, 8), $X\Delta_2 \equiv 0 \mod \partial(h \otimes M^*)$; $X\Delta_1 \in L \otimes K' \wedge K'$; et $X\tilde{c} \in L \otimes L' \wedge K' \mod \partial(h \otimes M^*)$.

D'ailleurs, on voit de (4, 5) — (4, 8) que $L \otimes K' \wedge K'$ et $L \otimes L' \wedge K'$ ne contient aucun élément commun modulo $\partial(h \otimes M^*)$.

Donc si $Xb = 0$, $X\tilde{c} \equiv 0 \mod \partial(h \otimes M^*)$ et, d'après ce que nous venons de démontrer, $X \in k$. c.q.f.d.

5. Prolongation des groupes réduits.

Soit b la valeur prise par le tenseur de structure à un point donné de E′ et soit h_b la sous-algèbre de h qui laisse fixe b quand h agit canoniquement sur $M \otimes M^* \wedge M^*/\partial(h \otimes M^*)$.

Nous démontrerons que h_b est de type $\leqslant 2$ et que $h_b^{(1)}$ s'identifie canoniquement à un sous-espace de $K^* \wedge K^*$.

Pour simplifier, nous identifierons L avec $K \wedge K$ par l'application $\tilde{c}$. Si v et w sont des éléments de K nous écrirons $\widetilde{v \wedge w}$ pour $\tilde{c}(v \wedge w)$.

Soit $S \in h_b^{(1)}$. Si $u \in K$ et $v \in L$, $S_u v = S_v u \in K$; donc S_u induit le nul endomorphisme sur M/K ce qui montre que S_u est contenu dans le noyau, h'', de l'application

$$h \to GL(M/K) \otimes GL(K).$$

De la proposition 4, 1 nous déduisons le

Lemme 5, 1. — *Si* $S \in h_b^{(1)}$ *et* $u \in K$, *alors* S_u *est contenu dans k; donc, par* (4, 2), *il existe un élément* w_u *de* K^*, *tel que, pour* $\widetilde{x \wedge y} \in L$

$$S_u \circ \widetilde{x \wedge y} = \langle x, w_u \rangle\, y - \langle y, w_u \rangle\, x_0.$$

L'application qui envoie $\langle S, u \rangle$ sur w_u est bilinéaire, ainsi elle définit une application linéaire de $h_b^{(1)}$ dans Hom (K, K*). Montrons qu'elle est injective.

Soit S un élément du noyau. Alors $S_u = 0$ pour tout $u \in K$. Si $u \in K$ et $v \in L$

$$S_v u = S_u v = 0$$

donc $S_v \in h''$ et par la proposition 4, 1 $S_v \in k$. Prenons deux éléments de L, $\widetilde{x \wedge y}$ et $\widetilde{v \wedge z}$. Par (4, 2) et ce que nous venons de montrer.

$$S_{\widetilde{x \wedge y}} \circ \widetilde{v \wedge z} = \langle v, w_{x\wedge y}\rangle z - \langle z, w_{x\wedge y}\rangle v$$

où $w_{x\wedge y}$ est l'élément de K* associé à $S_{\widetilde{x\wedge y}} \in k$.

Par définition $S_{\widetilde{x \wedge y}} \circ \widetilde{v \wedge z} = S_{\widetilde{v \wedge z}} \circ \widetilde{x \wedge y}$; donc

$$(5, 1) \quad \langle v, w_{x\wedge y}\rangle z - \langle z, w_{x\wedge y}\rangle v = \langle x, w_{v\wedge z}\rangle y - \langle y, w_{v\wedge z}\rangle x.$$

Si la dimension de K est $\geqslant 4$, (5, 1) implique directement que $w_{x\wedge y} \equiv 0$; donc que $S = 0$. Si la dimension $K = 3$, prenons x, y, r linéairement indépendant et $z = x$ (5, 1) implique que

$$(5, 2) \qquad \langle r, w_{x\wedge y}\rangle = \langle y, w_{x\wedge r}\rangle$$

et

$$(5, 3) \qquad \langle x, w_{x\wedge y}\rangle = 0$$

(5, 3) montre que (5, 2) est valable pour tout x, y, $v \in K$; donc

$$\begin{aligned} \langle r, w_{x\wedge y}\rangle &= \langle y, w_{x\wedge r}\rangle = -\langle y, w_{r\wedge x}\rangle \\ &= -\langle x, w_{r\wedge y}\rangle = \langle x, w_{y\wedge r}\rangle = \langle r, w_{y\wedge x}\rangle \\ &= -\langle r, w_{x\wedge y}\rangle \end{aligned}$$

pour tout x, y, $r \in K$. Ainsi, $w_{x\wedge y} \equiv 0$ donc $S = 0$.

c.q.f.d.

Enfin, nous montrerons que l'image de $h_b^{(1)}$ dans $K^*\otimes K^*$ est contenue dans le sous-espace des éléments antisymétriques.

Prenons $S \in h_b^{(1)}$. On a :

$$(5, 4) \quad S_{\widetilde{r \wedge z}} \circ (\widetilde{x \wedge y}) \equiv \widetilde{(S_{r\wedge z} \circ x) \wedge y} + \widetilde{x \wedge (S_{\widetilde{r\wedge z}} \circ y)}$$

modulo K.

Appliquant le lemme 5, 1, (5, 4) s'écrit :

$$(5,5) \quad S_{\widetilde{r\wedge z}} \circ (x \wedge y) \equiv \langle r, w_x\rangle \,\widetilde{z\wedge y} - \langle z, w_x\rangle \,\widetilde{r\wedge y} + \langle r, w_y\rangle \,\widetilde{x\wedge z} - \langle z, w_y\rangle \,\widetilde{x\wedge r} \quad \text{modulo K.}$$

Rappelant que $S_{\widetilde{v\wedge z}} \circ \widetilde{x\wedge y} = S_{\widetilde{x\wedge y}} \circ \widetilde{v\wedge z}$,

(5, 5) implique que $\langle v, w_x\rangle = -\langle x, w_v\rangle$ pour tout x, $v \in K$, donc la forme bilinéaire sur K qui envoie x, v sur $\langle v, w_x\rangle$ est antisymétrique. c.q.f.d.

Résumons nos résultats.

Proposition 5, 1. — *Par l'application définie dans le lemme 5, 1 $h_b^{(1)}$ se plonge canoniquement dans* $K^* \wedge K^*$. *Si* $S \in h_b^{(1)}$ *et* $u \in K$, *alors* $S_u \in k$, *et moyennant les identifications canoniques, l'application de* $h_b^{(1)} \otimes K$ *dans* k *qui envoie* (S,u) *sur* S_u *correspond à l'application canonique de contraction qui envoie* $K^* \wedge K^* \otimes K$ *dans* K^*.

Proposition 5, 2. — $h_b^{(2)} = 0$.

Démonstration. — Soit R dans $h_b^{(2)}$. C'est une application de M dans $h_b^{(1)}$. Soit R′ sa restriction à K.

D'après la proposition (5, 1) R′ peut être regardé comme un élément de $K^* \wedge K^* \otimes K^*$. Par la définition de $h_b^{(2)}$ et la dernière partie de la proposition 5, 1, R′ est symétrique dans ces derniers deux indices, donc il est nécessairement nul. Soit

$$w \in L, \qquad u \in K.$$
$$R_w u = R_u w = 0,$$

donc R_w est un élément de $h_b^{(1)}$ qui prend la valeur nulle sur K, ce qui implique que $R_w = 0$ du fait que l'application de $h_b^{(1)}$ dans $K^* \wedge K^*$ définie par le lemme 5, 1 et injective. Cela entraîne que $R = 0$. c.q.f.d.

Nous obtenons d'après les propositions 5, 1 et 5, 2 et le théorème 1, 1 le :

Théorème 5, 1. — *Soit* Ω_n *un champ de n-plans sur une variété connexe* V_m *de dimension* $m = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $n \geqslant 3$.

Supposons que Ω_n satisfait aux conditions suivantes:
Autour de tout point p de V_m il existe un système de champs de vecteurs X', ..., X^n qui appartient à Ω_n, tel que les vecteurs

$$X_p^i, \ldots, [X^j, X^k]_p \quad i, j, k = i, \ldots, n \quad j < k$$

soient linéairement indépendants. Alors, le groupe de difféomorphismes de V_m qui conserve Ω_n est un *groupe de Lie* de dimension $n(2n + 1)$ au plus.

Nous obtenons cette borne sur le nombre des dimensions parce que la variété V_m est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, h_b est de dimension $n^2 + n$ au plus, $h_b^{(1)}$ est contenu dans $K^* \wedge K^*$ (donc de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ au plus) et $h_b^{(i)} = 0$, $i \geqslant 2$.

Prenons un ensemble de n indéterminées $X_1, \ldots, X_n$.
Soit a l'algèbre de Lie libre qu'il engendre sur le corps des réels, et soit b l'idéal de a engendré par:

$$[[X_i, X_j], X_k], \quad i, y, k = 1, \ldots, n.$$

Posons $g = a/b$. g est une algèbre de Lie et le groupe de Lie simplement connexe associé à g est homéomorphique à l'espace Euclidien de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$. Les éléments $X_1, \ldots, X_n$ de g définissent un champ de n-plans sur ce groupe.

On peut montrer que l'algèbre des automorphismes infinitesimaux de cette structure est une algèbre de Lie de dimension $n(2n + 1)$.

On peut se demander si cela est une propriété caractéristique de cette structure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. BERNARD, Sur la géométrie differentielle des G-structures, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 10, 1960, 153-273.

[2] E. CARTAN, Les problèmes d'équivalence, *Séminaire de Math.*, Exposé D, 11 janvier 1937; *Sélecta*, pp. 113-136.

[3] E. CARTAN, Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre, *Ann. Ec. Normale*, 27, 1910, 109-192.

[4] E. Cartan, Sur la structure des groupes infinis de transformations, *Ann. Ec. Normale*, 21, 1904, 153-206 et 22, 1905, 219-308.
[5] V. Guillemin, *Thesis*, Harvard University, 1962.
[6] I. Singer et S. Sternberg, Infinite Lie Groupes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, à paraître.
[7] S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall, 1963.