ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL MENDÈS-FRANCE

Nombres normaux et fonctions pseudo-aléatoires

Annales de l'institut Fourier, tome 13, n° 2 (1963), p. 91-104

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1963__13_2_91_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
13,2 (1963), 91-104.

NOMBRES NORMAUX ET FONCTIONS PSEUDO-ALÉATOIRES

par **Michel MENDES FRANCE** (Paris)

INTRODUCTION

Dans cet article, nous nous proposons d'établir les relations qui peuvent exister entre la théorie des nombres normaux et la théorie des fonctions pseudo-aléatoires. Nous verrons en particulier comment l'introduction de la corrélation multiple :

$$\Gamma\begin{Bmatrix} h_1, & h_2, & \ldots, & h_p \\ h'_1, & h'_2, & \ldots, & h'_q \end{Bmatrix}$$
$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t+h_1) \ldots f(t+h_p) \bar{f}(t+h'_1) \ldots \bar{f}(t+h'_q)\, dt$$

permet d'énoncer simplement certains résultats.

Le plan de l'exposé est le suivant :

1) Définition des fonctions pseudo-aléatoires.

2) Les nombres normaux.

3) L'espace des suites infinies.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici mes remerciements à M. Bertrandias dont les conseils m'ont été précieux.

I. DÉFINITION DES FONCTIONS PSEUDO-ALÉATÉOIRES

I.1. Définitions et notations.

Introduites par M. Bass [2], les fonctions pseudo-aléatoires f sont définies de la façon suivante :
$f(t)$ est une fonction complexe de la variable réelle positive t,

localement intégrale et telle que la limite :

$$(1) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f}(t)\, f(t+h)\, dt = \gamma(h) \text{ (}^1\text{)},$$

appelée fonction de corrélation de f, existe et soit continue à l'origine $h = 0$. De plus $\gamma(0) > 0$ et $\gamma(+\infty) = 0$. On montre alors que la limite pour T infini de $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$ existe et est nulle.

Exemple : Si t est un nombre réel, notons par $\hat{t}$ le plus grand entier qui ne dépasse pas t et par $\check{t} = t - \hat{t}$ la partie fractionnaire du nombre t.

Appelons W^p la classe des polynômes réels φ.

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_\nu t^\nu$$

tels que l'un au moins des coefficients A_p, A_{p+1}, ... soit irrationnel $(1 \leqslant p \leqslant \nu)$.

Dans [2], M. Bass montre que les fonctions f définies par :

$$(2) \qquad f(t) = \exp 2i\pi\, \varphi(\hat{t}); \qquad \varphi \in W^2$$

sont pseudo-aléatoires et que leur fonction de corrélation γ est la fonction de Khintchine :

$$(3) \qquad \gamma(h) = \mathrm{M}ax(0, 1 - |h|).$$

Une fonction admettant pour fonction de corrélation la fonction de Khintchine sera dite *k-pseudo-aléatoire*. Nous en verrons des exemples par la suite, autres que les fonctions définies par l'expression (2).

I.2. Fonctions constantes sur les intervalles [n, n + 1[.

Nous nous occuperons dans ce qui suit, essentiellement de fonctions f constantes sur tous les intervalles $[n, n+1[$,

(1) Dans la définition de $\gamma(h)$, on n'aura pas besoin de supposer que la variable h soit positive. En effet si elle est négative, on posera :

$$\gamma(h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_A^T \overline{f}(t) f(t+h)\, dt$$

où A est un nombre positif plus grand que $-h$. Cette remarque nous sera utile plus loin, lorsque nous aurons à définir les corrélations multiples $\Gamma\begin{Bmatrix} h_1, \dots, h_p \\ h'_1, \dots, h'_q \end{Bmatrix}$, les arguments n'étant pas nécessairement tous positifs.

(n entier.) [C'est d'ailleurs le cas des fonctions définies précédemment par la formule (2).] La fonction de corrélation $\gamma(h)$ d'une telle fonction est particulièrement simple, comme le montre le lemme suivant [2] :

LEMME 1.— *Soit f une fonction complexe de la variable réelle t, vérifiant l'équation fonctionnelle $f(t) = f(\hat{t})$. Si la fonction de corrélation $h \to \gamma(h)$ est définie pour tout h entier non négatif, alors $\gamma(h)$ existe pour tout h réel. γ est une fonction continue, qui varie linéairement dans chacun des intervalles $(n, n+1)$, n entier.*

I.3. Extension de la notion de fonction de corrélation.

Sous condition d'existence, nous poserons :

$$(4)\quad \Gamma\left\{\begin{matrix} h_1, h_2, \ldots, h_p \\ h'_1, h'_2, \ldots, h'_q \end{matrix}\right\} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t+h_1) \ldots f(t+h_p) \bar{f}(t+h'_1) \ldots \bar{f}(t+h'_q)\, dt,$$

expression dans laquelle $h_1, h_2, \ldots, h_p, h'_1, \ldots h'_q$ est une suite finie de nombres réels. Les nombres $\Gamma\left\{\begin{matrix} h_1, \ldots, h_p \\ h'_1, \ldots, h'_q \end{matrix}\right\}$ s'appellent les *corrélations multiples de la fonction f*, ou plus simplement, *les corrélations de f*. Si dans la suite $(h_1, h_2, \ldots, h_p)$ il se trouve α_1 nombres égaux à k_1, α_2 nombres égaux à k_2, etc..., et de même, si dans la suite $(h'_1, h'_2, \ldots, h'_q)$, α'_1 nombres sont égaux à k'_1, etc..., on pourra écrire les corrélations sous la forme abrégée :

$$\Gamma\left\{\begin{matrix} (k_1)_{\alpha_1}, (k_2)_{\alpha_2}, \ldots \\ (k'_1)_{\alpha'_1}, (k'_2)_{\alpha'_2}, \ldots \end{matrix}\right\}$$

Si la suite $(h'_1, h'_2, \ldots)$ est vide, on écrira la corrélation sous la forme :

$$\Gamma\left\{\underline{h_1, h_2, \ldots, h_p}\right\}.$$

Notons en particulier les identités suivantes :

$$\Gamma\left\{\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}\right\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt,$$

$$\Gamma\left\{\begin{matrix} h \\ 0 \end{matrix}\right\} \equiv \Gamma\left\{\begin{matrix} 0 \\ -h \end{matrix}\right\} \equiv \gamma(h).$$

II. LES NOMBRES NORMAUX

Dans ce paragraphe, nous montrons l'équivalence de trois définitions des nombres normaux sous forme de conditions nécessaires et suffisantes.

II.1. Définition des nombres normaux et équirépartition de la suite $\{x.2^n\}_{n=1}^{\infty}$.

A part les nombres $n/2^q$ (n, q entiers positifs), on sait que tout nombre réel x de l'intervalle $[0,1[$ admet une représentation binaire unique :

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{2^k}, \tag{5}$$

où $\varepsilon_k(x)$ est soit 0, soit 1. Soit $A_k = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k)$ un ensemble ordonné de k chiffres égaux à 0 ou 1. Appelons $N(p, A_k)$ le nombre de fois qu'apparaît la suite A_k dans les p premières décimales binaires $(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_p(x))$ de x (p entier positif). *Par définition* [10], *on dit que le nombre x est normal* (*dans le système binaire*) *si l'on a l'égalité suivante* :

$$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} N(p, A_k) = \frac{1}{2^k} \tag{6}$$

pour toute suite A_k de k termes, et pour tout entier $k \geqslant 1$.

Dans [11], on démontre le théorème suivant dont nous aurons besoin pour donner une autre caractérisation des nombres normaux.

THÉORÈME 1. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que le nombre x soit normal, est que la suite $\{x.2^n\}_{n=1}^{\infty}$ soit équipartie modulo 1.*

Démonstration : Soit x un nombre réel positif. Nous allons voir que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

(α) : la suite $\{x.2^n\}_{n=1}^{\infty}$ est équirépartie modulo 1;

(β) : pour tous entiers k et p positifs, et pour tout entier a vérifiant la double inégalité $0 \leqslant a \leqslant 2^k - 1$, l'intervalle

$\left[\frac{a}{2^k}, \frac{a+1}{2^k}\right[$ contient $p.\, 2^{-k} + o(p)$ points de la suite partielle $\{\widetilde{x, 2^n}\}_{n=1}^{p}$;

(γ) : quelle que soit la suite $A_k = (\delta_1, \ldots, \delta_k)$ constituée de k chiffres égaux soit à 0, soit à 1, on a :

$$N(p, A_k) = p.\, 2^{-k} + o(p) \ (k = 1, 2, 3, \ldots);$$

(δ) : x est un nombre normal.

Il est en effet évident que (α) est équivalent à (β) d'une part et que d'autre part, (γ) est équivalent à (δ). Par ailleurs, à tout entier a de l'intervalle $[0, 2^k - 1]$, on peut faire correspondre de façon biunivoque une suite A_k par les relations

$$\begin{cases} a = 2^{k-1}\delta_1 + 2^{k-2}\delta_2 + \cdots + 2.\delta_{k-1} + \delta_k \\ A_k = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{k-1}, \delta_k). \end{cases}$$

On voit ainsi que l'intervalle $\left[\frac{a}{2^k}, \frac{a+1}{2^k}\right[$ contient exactement $N(p, A_k)$ éléments de la suite $\{\widetilde{x.2^n}\}_{n=1}^{p}$. Ceci montre bien que les deux propositions (β) et (γ) sont équivalentes. Le théorème en découle.

II.2. Fonctions de Rademacher et fonctions de Walsh.

Les fonctions de Rademacher sont les fonctions $r_k(x)$ attachées à x et définies par les relations

$$r_k(x) = 1 - 2\varepsilon_k(x) \tag{7}$$

de sorte que $r_k(x)$ est égale soit à $+1$, soit à -1. Notons les deux identités :

$$\begin{cases} 1 - 2x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{r_k(x)}{2^k}, \\ r_k(x) \quad = \exp(i\pi.\widetilde{x.2^k}). \end{cases} \tag{8}$$

Nous considérons ces fonctions comme fonctions de l'argument k, *x étant supposé fixe.* Plus précisément, nous posons $f(t) = r_t(x)$. On a alors le théorème :

THÉORÈME 2. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que le nombre x soit normal est que la fonction $f(t) = r_t(x)$*

admette des corrélations $\Gamma\{\underline{k_1, k_2, \ldots, k_p}\}$ *nulles pour toutes suites d'entiers* $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ *avec* $k_1 < k_2 < \cdots < k_p$.

Pour démontrer ce théorème, nous allons introduire les fonctions de Walsh $\omega_N(x)$ dont nous rappelons la définition ([5], [6], [14]); Soit 2 N un nombre entier pair positif dont la représentation binaire est donnée par

$$2\,N = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_k} \qquad (n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geqslant 1;\ n_j \text{ entiers}).$$

On définit alors la suite de fonctions $\omega_N(x)$ par les relations suivantes :

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \omega_0(x) = 1, \\ \omega_N(x) = r_{n_1}(x) r_{n_2}(x) \ldots r_{n_k}(x). \end{cases}$$

On voit aisément que la suite $\{\omega_N\}$ est une suite de fonctions orthogonales sur l'intervalle (0,1) :

$$\int_0^1 \omega_N(x)\omega_M(x)\,dx = \delta_{M,N} \quad (\delta_{M,N} \text{ est le symbole de Kronecker}).$$

De plus, on montre dans [6] et dans ([14] exercices 6 et 7, p. 34) que l'ensemble des combinaisons linéaires finies $\sum_0^k a_j\omega_j$ est dense dans l'espace des fonctions continues sur (0,1). De cette remarque, on déduit le corollaire suivant du critère d'équirépartition de H. Weyl :

Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite réelle $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *soit équirépartie modulo* 1, *est que pour tout entier* k *non nul on ait l'égalité*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \omega_k(\underbrace{u_n}) = 0.$$

En rassemblant les résultats acquis, on voit alors que les implications suivantes ont lieu :

$$\begin{aligned} x \text{ est normal} &\Longleftrightarrow \{u_n = \underbrace{x.2^n}\}_{n=1}^{\infty} \text{ est équirépartie} \\ &\Longleftrightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \omega_k(\underbrace{x.2^n}) = 0 \qquad \forall\, k \neq 0 \text{ entier} \\ &\Longleftrightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r_{k_1}(\underbrace{x.2^n}) \ldots r_{k_p}(\underbrace{x.2^n}) = 0 \end{aligned}$$

pour toute suite finie d'entiers $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ avec

$$1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_p.$$

Or $r_k(\underbrace{x.2^n}) = r_{k+n}(x)$. On a par conséquent :

x est normal $\Longleftrightarrow \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r_{k_1+n}(x) \ldots r_{k_p+n}(x) = 0$ pour toute suite finie d'entiers $(k_1, \ldots, k_p)$ avec $1 \leqslant k_1 < \cdots < k_p$. Le théorème 2 en découle aussitôt.

Corollaire 2.1. — *Si x est un nombre normal, alors la fonction $f(t) = r_t(x)$ est k-pseudo-aléatoire.*

Démonstration : On combine le lemme 1 au théorème 2.

Corollaire 2.2. — *Soit $k_1 < k_2 < \cdots < k_p$ une suite finie d'entiers positifs donnés. Si x est un nombre normal, alors le nombre y défini par les égalités*

$$r_n(y) = r_{n+k_1}(x) r_{n+k_2}(x) \ldots r_{n+k_p}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

est aussi un nombre normal.

Ce corollaire montre comment à partir d'un nombre normal on peut en construire une infinité dénombrable d'autres.

III. ESPACE DES SUITES INFINIES

III.1. Applications du théorème ergodique de Birkhoff.

Soit $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ une suite infinie de nombres réels u_n de l'intervalle $I = [0,1[$. L'ensemble U des suites u peut être identifié au tore $T_\omega = I^\omega$ à une infinité dénombrable de dimensions. Le théorème de Tychonoff montre que U est compact. Sur l'espace U, on peut définir une mesure comme étant le produit infini des mesures de Lebesgue sur chaque composante I.

Dans la suite, si X désigne un espace muni d'une mesure, nous noterons cette mesure par le symbole mes_X. On a donc $\text{mes}_U(U) = 1$.

Nous nous proposons de démontrer les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 3. — *$(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ et $(k'_1, k'_2, \ldots, k'_q)$ désignent deux ensembles finis distincts d'entiers, l'un des ensembles pouvant éventuellement être vide. Alors pour presque toutes les suites infinies u, la corrélation* $\Gamma\left\{\begin{matrix} k_1, & k_2, & \ldots, & k_p \\ k'_1, & k'_2, & \ldots, & k'_q \end{matrix}\right\}$ *de la fonction $f(t) = \exp 2i\pi u_t$ est nulle.*

THÉORÈME 3'. — *$(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ désigne une suite d'entiers tels que $k_1 < k_2 < \cdots < k_p$. Alors pour presque toutes les suites infinies, la corrélation $\Gamma\ \underline{\{k_1, k_2, \ldots, k_p\}}$ de la fonction $f(t) = \exp i\pi \widehat{2u_t}$, est nulle.*

Démonstration. — Nous allons voir que ces théorèmes sont des conséquences immédiates du théorème ergodique de G. D. Birkhoff dont nous rappelons l'énoncé :

THÉORÈME DE BIRKHOFF. — *Soit X un ensemble sur lequel est définie une mesure finie mes_X. T désigne une application de X sur X, mesurable, conservant la mesure et ergodique* (²). *Si g est une fonction sommable $X \to R$, alors l'égalité suivante*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(T^n x) = \int_X g(x)\, dx$$

a lieu pour presque tous les éléments x de X.

Supposons que X soit l'ensemble U des suites infinies $u = (u_1, u_2, \ldots)$ et que T désigne l'opérateur de translation définie par l'égalité :

$$Tu_n = u_{n+1}$$

ou encore :

$$Tu = (u_2, u_3, \ldots).$$

Pour que le théorème de Birkhoff soit applicable, il faut démontrer que T est une transformation mesurable, conservant la mesure et ergodique. Désignons par T^{-1} l'application inverse de T. Si u est un élément de l'espace U, $T^{-1}u$ représente l'ensemble $\{v | v \in U, Tv = u\}$. De même si U' est un sous-ensemble de U, $T^{-1}U'$ désigne l'ensemble $\{v | v \in U,\ Tv \in U'\}$.

(²) Ces termes sont définis plus loin.

LEMME 2. — *L'application* T *est mesurable et elle conserve la mesure.*

Cela signifie d'une part que si U′ est un sous-ensemble mesurable de U, il en est de même de $T^{-1}U'$, et d'autre part que la mesure de $T^{-1}U'$ est égale à celle de U′. Le lemme se démontre en remarquant que $T^{-1}U' = I \times U'$. De cette égalité découle en effet que si U′ est mesurable, il en est de même de $T^{-1}U'$ et que

$$\begin{aligned} \mathrm{mes}_U(T^{-1}U') &= \mathrm{mes}_I(I).\mathrm{mes}_U(U') \\ &= \mathrm{mes}_U(U'). \end{aligned}$$

LEMME 3. — *L'application* T *est ergodique.*

Cela veut dire que si $T^{-1}U' = U'$ (à un ensemble de mesure nulle près), alors l'une des deux égalités suivantes est vraie :

$$\begin{cases} \mathrm{mes}_U(U') = 0. \\ \mathrm{mes}_U(U - U') = 0. \end{cases}$$

Dans le cas que nous étudions, la seconde égalité est équivalente à $\mathrm{mes}_U(U') = +1$.

Ce lemme se démontre à partir de la notion de *point de densité* : θ est un point de densité de l'ensemble mesurable U′ si, $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ désignant une suite infinie d'ensembles mesurables contenant θ avec $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{mes}_U(\Delta_n) = 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{mes}_U(U' \cap \Delta_n)}{\mathrm{mes}_U(\Delta_n)} = +1.$$

Un théorème de Lebesgue affirme l'existence d'un point de densité θ sur tout ensemble de mesure positive.

Considérons un sous-ensemble mesurable U′ de U tel que $T^{-1}U' = U'$ à un ensemble de mesure nulle près. Nous allons montrer que l'hypothèse : $\mathrm{mes}_U(U') > 0$, entraîne l'égalité : $\mathrm{mes}_U(U') = 1$. En effet, d'après le théorème de Lebesgue, U′ contient un point de densité $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n, \ldots)$. Appelons Δ_n l'ensemble des suites de la forme :

$$(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, u_1, u_2, \ldots)$$

où la suite $(u_1, u_2, \ldots)$ parcourt tout l'espace U. On a donc $T^n\Delta_n = U$. Par définition du point de densité, à tout nombre

$\varepsilon > 0$, il est possible d'associer un nombre $n(\varepsilon)$ tel que pour tout entier $n > n(\varepsilon)$, on ait :

$$(10) \qquad \frac{\mathrm{mes}_{\mathrm{U}}(\mathrm{U}' \cap \Delta_n)}{\mathrm{mes}_{\mathrm{U}}(\Delta_n)} > 1 - \varepsilon$$

Appelons $\varkappa(u)$ la fonction caractéristique de l'ensemble U′.

$$\mathrm{mes}_{\mathrm{U}}(\mathrm{U}' \cap \Delta_n) = \int_{\Delta_n} \varkappa(u)\, du.$$

Le changement de variable $u = \mathrm{T}^{-n} v$ dans l'intégrale conduit à la formule :

$$\mathrm{mes}_{\mathrm{U}}(\mathrm{U}' \cap \Delta_n) = \mathrm{mes}_{\mathrm{U}}(\Delta_n) \int_{\mathrm{U}} \varkappa(\mathrm{T}^{-n} v)\, dv.$$

Mais U′ est invariant par T, donc

$$\varkappa(\mathrm{T}^{-n} v) = \varkappa(v)$$

et par conséquent :

$$(11) \qquad \mathrm{mes}_{\mathrm{U}}(\mathrm{U}' \cap \Delta_n) = \mathrm{mes}_{\mathrm{U}}(\Delta_n)\, \mathrm{mes}_{\mathrm{U}}(\mathrm{U}')$$

En rassemblant les formules (10) et (11), il vient :

$$\mathrm{mes}_{\mathrm{U}}(\mathrm{U}') > 1 - \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon > 0$$

et par suite : $\mathrm{mes}_{\mathrm{U}}(\mathrm{U}') = 1$. Le lemme 3 est ainsi démontré et la transformation T satisfait donc aux conditions de théorème de Birkhoff.

Soit g une fonction définie sur U par l'égalité

$$g(u) = \exp 2i\pi(u_{k_1} + u_{k_2} + \cdots + u_{k_p} - u_{k'_1} - \cdots - u_{k'_q})$$

où $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ et $(k'_1, k'_2, \ldots, k'_q)$ sont deux suites distinctes d'entiers positifs. Le théorème de Birkhoff montre que presque partout, on a l'égalité :

$$\lim_{\mathrm{N} \to \infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \exp 2i\pi(u_{n+k_1} + \cdots + u_{n+k_p} - u_{n+k'_1} - \cdots - u_{n+k'_q}) = \int_{\mathrm{U}} g(u)\, du.$$

Or l'intégrale du second membre de l'égalité est un produit d'intégrales de la forme :

$$\int_0^1 \exp 2i\pi\, u_k\, du_k = 0.$$

Le théorème 3 est ainsi démontré. Le théorème 3′ se démontre en prenant

$$g(u) = \exp i\pi\, (\widehat{2u_{k_1}} + \cdots + \widehat{2u_{k_p}});\ (k_1 < k_2 < \cdots < k_p).$$

Corollaire 3.1. [3]. — *La fonction $f(t) = \exp 2i\pi\, u_{\hat{t}}$ est k-pseudo-aléatoire pour presque toutes les suites u de l'espace* U. Ce résultat, qui semble avoir été signalé pour la première fois par Hlawka dans [7] découle immédiatement du théorème 3 et du lemme 1.

Soit φ un polynôme W^2. Nous avons déjà indiqué que la fonction $f(t) = \exp 2i\pi\, \varphi(\hat{t})$ était k-pseudo-aléatoire. Ceci nous amène à nous poser la question :
Quelle est la mesure du sous-ensemble U′ de U des suites u telles que $u_k = \underbrace{\varphi(k)}$, où φ parcourt l'ensemble des polynômes W^2? La réponse nous est donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 3.2. — *L'ensemble des suites $u = (\underbrace{\varphi(1)}, \underbrace{\varphi(2)}, \ldots, \underbrace{\varphi(n)}, \ldots)$ où φ parcourt l'ensemble de tous les polynômes, est de mesure nulle.*

Démonstration. — Soit en effet U_ν l'ensemble défini par $U_\nu = \{u \mid u_k = \underbrace{\varphi(k)},\ k = 1,2,\ \ldots;\ \varphi$ polynôme de degré $\nu\}$
Si u est un élément de U_ν, alors la fonction $f(t) = \exp 2i\pi u_{\hat{t}}$ est telle que la corrélation

$$\Gamma\left\{\begin{matrix} (\nu)_1, & (\nu-2)_{C_\nu^2}, & (\nu-4)_{C_\nu^4}, & \ldots \\ (\nu-1)_{C_\nu^1}, & (\nu-3)_{C_\nu^3}, & (\nu-5)_{C_\nu^5}, & \ldots \end{matrix}\right\}$$
$$\equiv \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp 2i\pi\,[\varphi(n+\nu) - C_\nu^1\varphi(n+\nu-1) + C_\nu^2\varphi(n+\nu-2) - \ldots]$$

soit non nulle. (Les nombres C_ν^k sont les coefficients du binôme.) Le théorème 3 montre alors que $\operatorname{mes}_U(U_\nu) = 0$. Par suite

$$\operatorname{mes}_U\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu\right) = 0.$$

III. 2. Applications aux nombres normaux.

A toute suite u de U nous faisons correspondre un nombre x de l'intervalle (0,1) par les égalités

$$(12) \qquad r_n(x) = \exp i\pi\, \widehat{2u_n} \quad (n = 1,2,3, \ldots)$$

ou, ce qui revient au même

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{(2u_n)}}{2^n}.$$

Notons par A la correspondance ainsi définie de sorte que $x = \mathrm{A}u$.

Lemme 4. — *Soit* U′ *un sous-ensemble de U. On a l'implication suivante :*

$$\mathrm{mes}_{\mathrm{U}}(\mathrm{U}') = 1 \Longrightarrow \mathrm{mes}_{\mathrm{I}}(\mathrm{AU}') = 1.$$

Démonstration. — Soit B l'application qui à la suite $u = (u_1, u_2, \ldots)$ associe la suite $v = \mathrm{B}u = (\widehat{2u_1}, \widehat{2u_2}, \ldots)$. B$u$ est donc une suite infinie d'éléments égaux soit à 0, soit à 1. B projette le tore I^{ω} sur l'ensemble $\mathrm{V} = \{(0), (1)\}^{\omega}$ qui peut être considéré comme l'ensemble des sommets du tore infini. A l'ensemble $\{(0), (1)\}$ est associée la mesure de Bernoulli égale à $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ (δ_α est la mesure de Dirac au point α). La mesure sur l'ensemble V est définie comme étant le produit infini des mesures de Bernoulli. Alors, si U′ est un sous-ensemble de U et si BU′ est le sous-ensemble de $\mathrm{V} = \{(0), (1)\}^{\omega}$ transformé par B, on a l'implication suivante :

$$\mathrm{mes}_u(\mathrm{U}') = 1 \Longrightarrow \mathrm{mes}_{\mathrm{V}}(\mathrm{BU}') = 1. \tag{13}$$

Maintenant, soit $v = (v_1, v_2, \ldots)$ un élément de BU′ et soit C l'application définie par :

$$v \to x = \mathrm{C}v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{2^n}.$$

D'après un résultat de Kaczmarz et Steinhaus [8], on peut écrire que

$$\mathrm{mes}_{\mathrm{V}}(\mathrm{BU}') = \mathrm{mes}_{\mathrm{I}}(\mathrm{CBU}'). \tag{14}$$

Les relations (13) et (14) montrent alors que $\mathrm{mes}_{\mathrm{I}}(\mathrm{CBU}') = 1$. Le lemme est ainsi démontré car CB = A.

Le lemme 4 associé au théorème 3′ permet alors d'énoncer le théorème

THÉORÈME 4. — *Pour presque tous les nombres x de l'intervalle* (0,1) *la fonction* $f(t) = r_t(x)$ *admet des corrélations*

$$\Gamma\{\underline{k_1, k_2, \ldots, k_p}\}$$

nulles pour toute suite d'entiers $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ *avec* $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_p$.

En particulier, pour presque tous les nombres x de l'intervalle (0,1), $f(t) = r_t(x)$ *est k-pseudo-aléatoire.*

La dernière partie du théorème est signalée par N. Wiener dans [13].

La comparaison des théorèmes 2 et 4 montre que *presque tous les nombres sont normaux.* On retrouve ainsi un résultat connu de Borel.

En combinant les idées du corollaire 3.2, et du théorème 4, on obtient la proposition suivante [9] :

L'ensemble des nombres réels x de l'intervalle (0,1), *définis par les égalités :*

$$r_n(x) = \exp i\pi\widehat{\varphi(n)}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{15}$$

où φ parcourt l'ensemble des polynômes, est de mesure nulle.

Enfin pour terminer, citons sans démonstration le théorème suivant dû à W. A. Beyer [4] :

L'ensemble des nombres x tels que la fonction $f(k) = r_k(x)$ n'admette pas de moyenne $\Gamma\{0\}$ est de mesure nulle et de dimension de Hausdorff égale à 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BASS, Fonctions pseudo-aléatoires et Fonctions de Wiener, *C. R. Acad. Sc.*, 247, 1958, 1163-1165.

[2] J. BASS, Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, *Bull. Soc. Math. France*, 87, 1959, 1-64.

[3] J.-P. BERTRANDIAS, *Colloque sur la répartition asymptotique mod.* 1 Breukelen, 1962.

[4] W. A. BEYER, Hausdorff Dimension of level sets of some Rademacher series, *Pacific J. Math.*, 12, 1962, 35-46.

[5] P. CIVIN, Multiplicative closure and the Walsh functions, *Pacific J. Math.*, 2, 1952, 291-295.

[6] N. J. FINE, On the Walsh function, *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 65, 1949, 372-414.

[7] E. HLAWKA, Erbliche Eigenschaften in der Theorie der Gleichverteilung, *Publ. Math. Debrecen*, 7, 1960, 181-186.

[8] S. Kaczmarz et H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, *Monografje Matematyczme*, t. V, I.
[9] M. Mendes France, Étude d'une classe de fonctions pseudo-aléatoires. (*Séminaire Théorie des Nombres IHP*, 1962-1963, n° 10).
[10] I. Niven et H. S. Zuckerman, On the definition of Normal Numbers (*Pacific J. Math.*, I, 1951, 103-109).
[11] A. G. Postnikov, Arifmetičeskoe modelirovanie slučajnyhk processov, *Trudy mat. Inst. Stekl.*, 57, 1960, 84; Modèle arithmétique de processus stochastiques (*Service de Documentation et d'Information de l'Aéronautique*, Paris, 1961).
[12] H. Steinhaus, Sur la probabilité de la convergence des séries (*Studia Math.*, 2, 1930, 21-39.
[13] N. Wiener, The spectrum of an array and its application to the study of the translation properties of a simple class of arithmetic functions (*J. of Math. Phys. Mass. Inst. Techn.*, 6, 1927, 145-157.)
[14] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, Seconde édition.