ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GEORGES REEB

Formes de Pfaff polynômes complètement intégrables

Annales de l'institut Fourier, tome 14, nº 1 (1964), p. 37-42

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_1_37_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 1 (1964), 37-42.

FORMES DE PFAFF POLYNOMES COMPLÈTEMENT INTÉGRABLES

par **G. REEB** (Grenoble).

Introduction.

Considérons dans l'espace numérique R^{n+1} (rapporté aux coordonnées $x_1, \ldots, x_n, t$) une forme de Pfaff, complètement intégrable, de classe C_∞ du type :

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 t + \cdots \omega_s t^s - dt$$

où les formes $\omega_0 \ldots \omega_s$ s'expriment à l'aide des seules coordonnées $x_1 \ldots x_n$ et de leurs différentielles $dx_1 \ldots dx_n$. Une telle forme mérite d'être appelée une forme polynôme en t de degré s. Pour la commodité de l'exposé on supposera (dans cette introduction) ω défini en tout point de R^{n+1}.

Dans ces conditions les feuilles de l'équation $\omega = 0$ possèdent la propriété remarquable suivante : ces feuilles rencontrent chaque verticale ($x_i = C^{te}$) tout au plus en un point. On peut exprimer cette propriété en disant que les feuilles sont « uniformes ».

La propriété que nous venons d'énoncer est une conséquence à peu près immédiate d'un théorème fondamental de M. Haefliger. (cf. [1] p. 317 lemme fondamental).

Mais la démonstration du théorème fondamental de M. Haefliger est délicate et demande une étude géométrique profonde (bien que l'idée de la démonstration soit assez simple).

Il m'a semblé qu'il serait intéressant de trouver des démonstrations de nature plus élémentaire et directe pour l'uniformité des feuilles de l'équation $\omega = 0$. Le présent travail montre que, moyennant certaines restrictions, on peut donner une telle démonstration.

Les deux cas les plus simples que nous envisageons sont exposés au chapitre I et concernent les équations linéaires ainsi que l'équation de Riccati (donc ces cas correspondent respectivement à des polynômes de degré 1 ou 2). L'uniformité des feuilles résulte d'un théorème de M. Ehresmann [2]. A dire vrai il s'agit là de résultats bien classiques (cf. [3] chapitre 12, 51) mais on remarquera néanmoins que dans le cas d'une équation linéaire seule l'homologie (de dimension 1) du domaine considéré intervient alors que dans le cas de l'équation de Riccati le raisonnement porte sur le groupe de Poincaré de ce domaine. Il est clair que l'équation linéaire et l'équation de Riccati peuvent être traitées dans le champ complexe. Le chapitre II est consacré au cas où le degré s est un entier pair.

1. Équations linéaires et équation de Riccati dans $V_{2n} \times C$ (champ complexe).

Dans ce chapitre nous considérons donc une variété $V_{2n} \times C$ qui est le produit topologique d'une variété analytique complexe V_{2n} à n dimensions complexes par la droite complexe C; ce produit topologique est évidemment muni de sa structure naturelle de variété analytique complexe à $n+1$ dimensions complexes. On désignera par (x, t) les coordonnées dans $V_{2n} \times C$.

Nous considérons tout d'abord une forme de Pfaff holomorphe ω définie sur $V_{2n} \times C$ et ayant la structure suivante :

$$(1) \qquad \omega \equiv \omega_0 + t\omega_1 - dt$$

où ω_0 et ω_1 sont des formes de Pfaff holomorphes définies sur V_{2n}. Cette forme de Pfaff ω sera supposée complètement intégrable; en d'autres termes on suppose vérifiée l'identité :

$$(2) \qquad \omega \wedge d\omega \equiv 0.$$

Définition 1. — *L'équation de Pfaff (complètement intégrable) $\omega = 0$ dont le premier membre est de la forme* (1) *est appelée une équation de Pfaff linéaire dans* $V_{2n} \times C$.

Un calcul simple montre que la condition de complète intégrabilité (2) implique :

$$(3) \qquad \begin{cases} d\omega_1 = 0, \\ d\omega_0 = \omega_1 \wedge \omega_0. \end{cases}$$

Réciproquement les identités (3) impliquent la condition de complète intégrabilité (2). Supposons maintenant que le nombre de Betti b_1 (V_{2n}) de la dimension un de V_{2n}, soit égal à zéro. Dans ces conditions il existe une fonction holomorphe f sur V_{2n} telle que :

$$\omega_1 = df.$$

Posons $\varphi = \exp(-f)$ et calculons la différentielle extérieure de $\varphi\omega$:

$$d(\varphi\omega) = -\varphi(df(\omega_0 + t\omega_1 - dt) - df \wedge \omega_0 - dt \wedge df) = 0.$$

Ce calcul montre que φ est un facteur intégrant de ω et que $\varphi\omega$ est la différentielle d'une fonction holomorphe sur V_{2n} (compte tenu de l'hypothèse $b_1(V_{2n}) = 0$).

Nous pouvons résumer ceci par le

Théorème 1. — *Soit une équation de Pfaff linéaire dans* $V_{2n} \times C$,

$$\omega = 0$$

où le nombre de Betti de la dimension un $b_1(V_{2n})$ *de* V_{2n} *est nul. Cette équation de Pfaff admet une intégrale première* ψ *où* ψ *est une fonction holomorphe* (*et* $d\psi \neq 0$ *en tout point*) *sur* $V_{2n} \times C$. *D'une façon plus précise :*

l'équation $\omega = 0$ *est équivalente à* $d\psi = 0$.

A partir de maintenant nous considérons une forme de Pfaff holomorphe ϖ définie sur $V_{2n} \times C$ et ayant la structure suivante :

$$\varpi \equiv \varpi_0 + t\varpi_1 + t^2\varpi_2 - dt \tag{$\bar{1}$}$$

où ϖ_0, ϖ_1 et ϖ_2 sont des formes de Pfaff holomorphes définies sur V_{2n}. Comme précédemment on supposera cette forme ϖ complètement intégrable.

Définition 2. — *L'équation de Pfaff* (*complètement intégrable*) $\varpi = 0$ *dont le premier membre est de la forme* ($\bar{1}$) *est appelée une équation* (*de Pfaff du type*) *de Riccati.*

L'intégration d'une équation de Riccati ne peut pas, dans le cas général, être ramenée aux quadratures. (Néanmoins si on connaît une intégrale particulière d'une équation de Riccati, alors l'intégration peut être achevée par des quadratures.)

Il est commode de plonger de la façon naturelle $V_{2n} \times C$ dans $V_{2n} \times P_1(C)$ où $P_1(C)$ est la droite projective complexe (recouverte par l'atlas habituel formé par les deux cartes associées respectivement à la coordonnée t définie ci-dessus et à la coordonnée t' liée à t par $t.t' = 1$).

L'équation $\varpi = 0$ (mieux, le champ de directions défini par $\varpi = 0$) peut être prolongée à $V_{2n} \times P_1(C)$ par la convention suivante : l'expression dans la carte (x, t') de cette équation est

$$\varpi' = 0$$

où

$$\varpi' = \varpi_0 t'^2 + t\varpi_1 + \varpi_2 + dt. \tag{2}$$

(Donc $\varpi' = 0$ est une conséquence de $\varpi = 0$ dans le domaine commun aux coordonnées (x, t) et (x, t').)

Les trajectoires (ou feuilles) du champ de directions défini par $\varpi = 0$ (ou $\varpi' = 0$) sont des revêtements de V_{2n} associées à la projection canonique de $V_{2n} \times P_1$ (C) sur V_{2n} (ceci résulte immédiatement de la compacité du facteur $P_1(C)$ du produit $P_1(C) \times V_{2n}$) en vertu de [2]. On peut donc énoncer en particulier le

Théorème 2. — *Considérons une équation de Riccati dans* $V_{2n} \times P_1(C)$ *et supposons* V_{2n} *simplement connexe. Dans ces conditions les trajectoires de cette équation sont homéomorphes à* V_{2n}, *la projection canonique de* $V_{2n} \times P_1(C)$ *sur* V_{2n} *réalise l'homéomorphie. Il en résulte en particulier que les trajectoires peuvent être représentées par une équation explicite*

$$t = \varphi(x, t_0)$$

où φ *est une fonction méromorphe sur* V_{2n}.

On notera que dans l'étude de l'équation de Riccati c'est bien le groupe de Poincaré de V_{2n} (et non l'homologie de la dimension 1 de V_{2n}) qui intervient.

2. Équations de degré supérieur dans $V_n \times R$.

Conservons provisoirement les hypothèses et notations de 1 et étudions dans $V_{2n} \times C$ une équation polynomiale complètement intégrale de la forme :

$$\omega \equiv \omega_0 + t\omega_1 + t^2\omega_2 + \cdots + t^s\omega_s - dt = 0, \quad s \geqslant 2. \tag{1}$$

Il est bien connu que le procédé — classique — qui réussit pour l'équation de Riccati exposé en 1 ne convient plus dans cette nouvelle situation. En effet le passage de t en t' donne l'équation

$$(2) \qquad t'^{s-2}dt' + \omega_0 t'^s + \omega_1 t'^{s-1} + \cdots + \omega_s = 0.$$

Les feuilles de l'équation (2) ne sont pas transverses aux fibres de $V_{2n} \times P_1(C)$ aux points $t' = 0$ et il n'est donc plus question d'appliquer les résultats de [2].

Nous allons montrer qu'en nous restreignant au champ réel il est possible d'obvier, au moins partiellement, à cet inconvénient.

A partir de maintenant nous considérons donc le produit $V_n \times R$ d'une variété V_n de classe C_∞ par la droite numérique. Dans ce produit nous considérons une forme de Pfaff complètement intégrable polynôme ω

$$(3) \qquad \omega = \omega_0 + \omega_1 t + \cdots + \omega_s t^s - dt,$$

vérifiant les hypothèses suivantes :

i) ω_s ne s'annule en aucun point de V_n,

ii) le degré s est pair : $n = 2p$,

iii) les formes ω_1 $(i = 0, \ldots, s)$ sur V_n sont de classe C_∞.

La première de ces trois hypothèses n'est pas très gênante puisqu'on peut se ramener à cette situation en privant V_n des points singuliers de ω_s; lorsque $n \geqslant 3$ cette opération ne modifie pas le groupe de Poincaré de V_n, du moins si les points singuliers de ω sont isolés. Par contre l'hypothèse ii) est une restriction importante.

Il est naturel de plonger $V_n \times R$ dans le produit $V_n \times T$ de V_n par le cercle T; ce plongement étant réalisé comme ci-dessus au moyen des cartes associées à t et t' (où $t.t' = 1$).

L'équation $\omega = 0$, dans la carte associée à t', est précisément l'équation (2).

Posons (compte tenu de l'exposant impair $s - 1$) :

$$(4) \qquad \begin{aligned} u' &= t'^{s-1} \\ u &= t^{s-1} \end{aligned} \qquad \text{ou } (4') \qquad \begin{aligned} t' &= u'^{\frac{1}{s-1}} \\ t &= u^{\frac{1}{s-1}} \end{aligned}$$

L'équation (2) se met sous la forme

$$(5) \qquad \frac{du'}{s-1} = \omega_0 u'^{\frac{1}{s-1}} + \cdots + \omega_s.$$

Le second membre de (5) n'est pas de classe C_∞. L'équation (5) est complètement intégrable mais le théorème d'unicité des variétés intégrales peut éventuellement être en défaut (pour $u' = 0$). Au premier membre de (5) le coefficient de du' ne s'annule pas.

Les formules (4) et (4') définissent une transformation topologique de $V_n \times R$ sur lui-même. Cette transformation n'est pas de classe C_∞ aux points $t = 0$ et $t' = 0$, dans les deux sens, mais les seconds membres de (4) sont de classe C_∞. Cette circonstance implique en particulier qu'il n'a y pas nécessairement correspondance par la transformation (4) et (4') entre variétés intégrales de l'équation (2) et variétés intégrales de l'équation (5). Mais les variétés intégrales (feuilles) de (2) sont transformées en variétés intégrales de (5) par la transformation (4). Or les variétés intégrales de (5) sont transversales aux fibres de $V_n \times R$. Ce point suffit à établir que la projection canonique de $V_n \times R$ sur V_n définit les feuilles du système (1, 2), comme revêtement de V_n. Ceci nous permet de conclure :

Théorème 2. — *En plus des hypothèses* (i), (ii), (iii) *on suppose* V_n *simplement connexe. Dans ces conditions les variétés intégrales de* (3) *sont uniformes.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Haefliger, Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 32 (1958), p.p. 248-329.

[2] CH. Ehresmann : Les connexions infinitésimales. *Colloque de topologie Bruxelles*, Juin (1950), pp. 29-55.

[3] E. L. Ince : *Ordinary differential equations.* Dover (1946).