

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALFRED AEPPLI

LAWRENCE MARKUS

## Sur l'équivalence des systèmes différentiels

*Annales de l'institut Fourier*, tome 14, n° 1 (1964), p. 83-86

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1964\\_\\_14\\_1\\_83\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_1_83_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR L'ÉQUIVALENCE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

par **A. AEPPLI** et **L. MARKUS**.  
(Fribourg et University of Minnesota.)

---

Nous étudions la structure topologique de la famille de toutes les variétés intégrales d'un système différentiel complètement intégrable sur une variété  $M^n$  de classe  $C^\infty$ .

**DÉFINITION.** — Désignons par  $\omega_1$  et  $\omega_2$  deux champs de plans de dimension  $k$ , de classe  $C^1$  sur  $M^n$ ,  $1 \leq k < n$ .  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont équivalents s'il y a un homéomorphisme  $\Phi$  de  $M^n$  sur lui-même tel que l'image par  $\Phi$  de chaque variété intégrale de  $\omega_1$  est une variété intégrale de  $\omega_2$  et vice versa pour  $\Phi^{-1}$ .

Nous exigeons que le champ de plans  $\omega$  soit de classe  $C^1$  et qu'il n'y ait pas de singularités sur  $M$ . Au cas contraire nous pourrions enlever un ensemble fermé  $D$  de singularités et restreindre  $\omega$  à  $M - D$ .

Nous appliquons la topologie  $C^1$  habituelle à l'ensemble des champs  $\omega$  et nous obtenons l'espace  $V^k(M^n)$  de tous les champs  $\omega$  de plans de dimension  $k$  sur  $M$  comme un espace métrique complet. On a deux relations d'équivalence dans  $V^k(M)$  : 1° l'équivalence déjà définie (ou l'équivalence par homéomorphie) et 2° l'équivalence par homotopie qui correspond d'une manière bien connue à la décomposition de  $V^k(M)$  en composants connexes par arc. Ces notions d'équivalence (par homéomorphie ou homotopie) peuvent être appliquées aux questions de stabilité structurelle et aux problèmes concernant les bifurcations. Un champ de plans  $x \in V^k(M)$  est dit stable (ou plus précisément « la structure de  $x$  est stable ») dans le cas suivant : soit  $H$  un voisinage quelconque de l'identité dans le groupe de tous les homéomorphismes de  $M$  sur lui-même, il existe un voisinage  $N$  de  $x$  dans  $V^k(M)$  tel que tout  $y \in N$  est équivalent à  $x$  par un homéomorphisme de  $H$ .

Ainsi la classe d'équivalence (par homéomorphie) de  $x \in V^k(M)$  contient tout un voisinage de  $x$  dans  $V^k(M)$  pour un  $x$  stable.

Une application continue d'un espace topologique  $\Lambda$  dans  $V^k(M)$  :  $\lambda \rightarrow x_\lambda \in V^k(M)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , est appelée une famille de systèmes différentiels paramétrisée par  $\Lambda$ . Un point  $\lambda_0 \in \Lambda$  est un point régulier pour la famille  $x_\lambda$  s'il y a un voisinage  $L$  de  $\lambda_0$  dans  $\Lambda$  tel que  $x_\lambda$  est équivalent (par homéomorphie) à  $x_{\lambda_0}$  pour tout  $\lambda \in L$ . En cas que  $\lambda_0$  ne soit pas un point régulier  $\lambda_0$  est appelé un point de bifurcation pour la famille  $x_\lambda$ . L'ensemble de tous les points réguliers de  $x_\lambda$  est évidemment ouvert, et l'ensemble des points de bifurcation est fermé dans  $\Lambda$ .

Comme illustration de la théorie générale nous considérons le cas où  $M$  est le tore  $T^2$  défini par le produit de deux cercles :  $T^2 \cong S^1 \times S^1$ , de sorte que nous ayons une base canonique pour le groupe d'homologie à coefficients entiers ;  $H_1(T^2)$ . Alors  $k = 1$  est le seul cas intéressant : nous allons examiner les champs d'éléments linéaires sur  $T^2$ . De plus nous nous restreignons aux champs d'éléments linéaires qui sont orientés ou directés, ce qui veut dire engendrés par des champs de vecteurs partout non nuls sur  $T^2$ . Nous définissons  $V_0(T^2)$  comme l'espace métrique de tous les champs de vecteurs tangents partout non nuls de classe  $C^1$  sur  $T^2$ , muni de la topologie  $C^1$ . Une équivalence (par homéomorphie ou par homotopie) de  $\nu_1$  et  $\nu_2 \in V_0(T^2)$  induit immédiatement une équivalence (par homéomorphie ou par homotopie) entre les champs correspondants des éléments linéaires orientés.

Fixons un difféomorphisme  $T^2 \cong S^1 \times S^1$ . Nous obtenons pour chaque champ de vecteurs  $\nu \in V_0(T^2)$  une application  $S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$  ayant les degrés  $a_1$  et  $a_2$  pour les restrictions à chacun des facteurs  $S^1$ . Le degré de  $\nu$  est la paire ordonnée des entiers  $a_1, a_2$ . Un changement de base d'homologie sur  $T^2$  conduit à une transformation unimodulaire du degré  $(a_1, a_2)$  de  $\nu$ .

Désignons par  $V_0(a, b)$  le sous-espace des champs de vecteurs dans  $V_0(T^2)$  du degré  $(a, b)$  pour une base fixe d'homologie.

**THÉORÈME 1.** — *Nous considérons  $V_0(a, b)$  avec  $d = \{a, b\} =$  le plus grand diviseur commun de  $|a|$  et  $|b|$ ,  $d > 0$ <sup>(1)</sup>; alors il existe un difféomorphisme de  $T^2$  sur lui-même qui induit une*

(1)  $\{0, 0\} = 0$  par définition.

*correspondance biunivoque entre  $V_0(a, b)$  et  $V_0(d, 0)$ . De plus, soient  $d_1, d_2$  deux entiers non négatifs,  $d_1 \neq d_2$ ,  $\nu_1 \in V_0(d_1, 0)$ ,  $\nu_2 \in V_0(d_2, 0)$ ; alors  $\nu_1$  et  $\nu_2$  ne sont pas équivalents (par homéomorphie).*

D'après Théorème 1, nous obtenons une liste complète de toutes les classes d'équivalence dans  $V_0(T^2)$  en énumérant les classes d'équivalence dans chacun des espaces  $V_0(0, 0)$ ,  $V_0(1, 0)$ ,  $V_0(2, 0)$ , ...

Nous décrivons dans le théorème suivant une propriété géométrique des champs  $\nu \in V_0(d, 0)$  qui démontre l'importance de l'entier  $d$  non négatif:  $2d$  est rapporté au nombre des solutions périodiques (nous identifions deux solutions périodiques, l'une obtenue de l'autre par une translation du temps).

**THÉORÈME 2.** — *Si  $\nu \in V_0(d, 0)$ ,  $d \geq 0$ , on a au moins  $2d$  solutions périodiques de  $\nu$  sur  $T^2$ . Il y a des champs  $\nu \in V_0(d, 0)$  qui possèdent exactement  $2d$  solutions périodiques.*

L'espace  $V_0(0, 0)$  est caractérisé par le fait qu'il contient un  $\nu \in V_0(T^2)$  sans solution périodique et aussi par le fait qu'il contient un  $\nu \in V_0(T^2)$  pour lequel toutes les solutions sont périodiques.

**THÉORÈME 3.** — *Pour chaque  $V_0(d, 0)$ ,  $d \geq 0$ , le nombre cardinal des classes d'équivalence est celui du continuum.*

**THÉORÈME 4.** — *L'ensemble des classes d'équivalence dans  $V_0(T^2)$  qui contiennent des systèmes stables est dénombrable.*

**THÉORÈME 5.** — *Soient  $\nu_0$  et  $\nu_1 \in V_0(d, 0)$ ,  $d > 0$ , sur le tore  $T^2 \cong S^1 \times S^1$ . Alors il y a une famille continue de systèmes différentiels  $\nu_\lambda \in V_0(d, 0)$  pour  $\lambda \in I$ :  $0 \leq \lambda \leq 1$ , joignant  $\nu_0$  et  $\nu_1$  de manière que  $\nu_\lambda$  ne contienne qu'un ensemble fini de valeurs de bifurcation dans  $I$ .*

Le problème des bifurcations pour une famille continue  $\nu_\lambda$  joignant  $\nu_0$  et  $\nu_1$  en  $V_0(0, 0)$  est plus difficile et ne sera pas traité ici. Naturellement  $\nu_\lambda$  a un ensemble non dénombrable de points de bifurcation si  $\rho(0) \neq \rho(1)$  et si  $\nu_\lambda$  est restreint au sous-ensemble ouvert de  $V_0(0, 0)$  dans lequel le nombre de rotation  $\rho(\lambda)$  classique est bien défini. C'est une conséquence immédiate de la continuité de  $\rho(\lambda)$  et du fait que  $\nu_\lambda$  a une solution périodique si et seulement si  $\rho(\lambda)$  est rationnel.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. KNESER, Kurvenscharen auf den Ringflächen, *Math. Ann.*, 91 (1924), pp. 133-154.
  - [2] L. MARKUS, Global structure of ordinary differential equations in the plane, *TAMS* 76 (1954), pp. 127-148.
  - [3] L. MARKUS, Structurally stable differential systems, *Ann. of Math.* 73 (1961), pp. 1-19.
  - [4] M. M. PEIXOTO, Structural stability on two-dimensional manifolds, *Instituto de Mat. Pura e Aplicado*, Rio de Janeiro (1961).
  - [5] L. B. REINHART, Line elements on the torus, *Am. J. of Math.*, 81 (1959), pp. 617-631.
-