Annales de l'institut Fourier

Aimée Baillette

Sur la co-indicatrice des produits canoniques

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 1 (1967), p. 109-118

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_1_109_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 1 (1967), 109-118.

SUR LA CO-INDICATRICE DES PRODUITS CANONIQUES

par Aimée BAILLETTE

Etant donné une suite $\Lambda = (\lambda_n)$, positive, croissante, de densité supérieure finie,

$$D^\bullet = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{n}{\lambda_n} < \infty,$$

considérons le produit canonique associé à cette suite

$$C(w) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Dans [1] (p. 99) nous avons introduit la fonction $H(\theta)$, co-indicatrice de $C(w)$:

$$H(\theta) = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{r} \log \left|\frac{1}{C(re^{i\theta})}\right| \qquad \theta \neq k\pi.$$

Nous avons établi quelques propriétés de $H(\theta)$ et nous les avons appliquées à l'étude de la convergence des suites de polynômes de Dirichlet associés à la suite Λ.

Nous nous proposons ici de préciser les propriétés de $H(\theta)$ et en particulier d'évaluer

$$A = \lim_{\theta\to 0} H(\theta)$$

en fonction de la suite Λ. La limite A peut être finie ou infinie. Krasitchkov a donné dans [5] et [6] une condition nécessaire et suffisante pour que $A < \infty$; cependant il n'a pas évalué A en fonction de la suite Λ.

Nous démontrerons les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. — *Soit* $n(t)$ *la fonction de distribution de la suite* Λ, *soit* $\mathrm{D}(t)$ *sa fonction de densité :*

$$n(t) = \sum_{\lambda_n < t} 1, \qquad \mathrm{D}(t) = \frac{n(t)}{t}, \qquad t > 0.$$

On a

$$\mathrm{A} = \lim_{\xi \to 1-0} \limsup_{r \to \infty} 2 \int_0^{\xi} \frac{\mathrm{D}\left(\frac{r}{t}\right) - \mathrm{D}(rt)}{1 - t^2} \, dt.$$

THÉORÈME 2. — *Pour* $\frac{\pi}{4} \leqslant |\theta| \leqslant \frac{3\pi}{4}$, *on a* $\mathrm{H}(\theta) \leqslant -\overline{\mathrm{D}}_{\bullet} |\sin\theta|$,

avec

$$\overline{\mathrm{D}}_{\bullet} = \liminf_{r \to \infty} \frac{1}{r} \int_0^r \mathrm{D}(t) \, dt.$$

THÉORÈME 3. — $\mathrm{A} = 0$ *si et seulement si* $\mathrm{H}(\theta) = -\pi \overline{\mathrm{D}}_{\bullet} |\sin\theta|$.

Ces théorèmes nous permettront en particulier de préciser le domaine d'existence de la fonction somme de la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n z}}{\mathrm{C}'(\lambda_n)}$$

(lorsque cette série a une abscisse de convergence finie) ou de la fonction, limite uniforme dans certains domaines, d'une suite de sommes partielles de cette série.

1. Démonstration du théorème 1.

On peut écrire pour $\theta \neq k\pi$

$$\frac{1}{r} \log \left| \frac{1}{\mathrm{C}(re^{i\theta})} \right| = -\frac{1}{2r} \int_0^{\infty} \log \left(1 - 2\frac{r^2}{\lambda^2} \cos 2\theta + \frac{r^4}{\lambda^4}\right) dn(\lambda).$$

La suite Λ ayant une densité supérieure finie $D^{\bullet}$, on a

$$\limsup_{t \to \infty} D(t) = D^{\bullet}.$$

Il en résulte, selon un calcul classique, en intégrant par parties et en posant $\lambda = rt$, que l'on a

$$\frac{1}{r} \log \left| \frac{1}{C(re^{i\theta})} \right| = 2 \int_0^{\infty} D(rt) \frac{t^2 \cos 2\theta - 1}{t^4 - 2t^2 \cos 2\theta + 1} dt$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{D(rt)(t^2 \cos 2\theta - 1) + D\left(\frac{r}{t}\right)(\cos 2\theta - t^2)}{t^4 - 2t^2 \cos 2\theta + 1} dt.$$

Soit $0 < \xi < 1$. On peut écrire :

$$\frac{1}{r} \log \left| \frac{1}{C(re^{i\theta})} \right| = I_1 + I_2$$

avec

$$I_1 = 2 \int_0^{\xi} \frac{D\left(\frac{r}{t}\right) - D(rt)}{1 - t^2} dt - 2 \int_0^{\xi} \frac{n\left(\frac{r}{t}\right) - n(rt)}{\frac{r}{t}(1 - t^2)} \frac{2 \sin^2 \theta (1 + t^2)}{t^4 - 2t^2 \cos 2\theta + 1} dt$$

$$I_2 = 2 \int_{\xi}^1 \frac{n\left(\frac{r}{t}\right) - n(rt)}{r/t} \frac{\cos 2\theta - t^2}{t^4 - 2t^2 \cos 2\theta + 1} dt - 2 \int_{\xi}^1 D(rt)\, dt.$$

Dans ce qui suit, pour étudier $H(\theta)$ au voisinage de zéro, nous supposerons θ positif ($H(\theta)$ est une fonction paire) et inférieur à $\frac{\pi}{4}$.

1) Pour $\xi = \sqrt{\cos 2\theta}$, on a

$$\frac{1}{r} \log \left| \frac{1}{C(re^{i\theta})} \right| \leqslant 2 \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{D\left(\frac{r}{t}\right) - D(rt)}{1 - t^2} dt.$$

On en déduit

$$H(\theta) \leqslant \limsup_{r \to \infty} 2 \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{D\left(\frac{r}{t}\right) - D(rt)}{1 - t^2} dt.$$

$$A \leqslant \liminf_{\xi \to 1-0} \limsup_{r \to \infty} 2 \int_0^{\xi} \frac{D\left(\dfrac{r}{t}\right) - D(rt)}{1 - t^2} \, dt.$$

2) Pour $\xi = 1 - \sqrt{\theta}$, la suite Λ ayant une densité supérieure finie, on a :

$$-2 \int_0^{\xi} \frac{n\left(\dfrac{r}{t}\right) - n(rt)}{\dfrac{r}{t}(1 - t^2)} \frac{2 \sin^2 \theta \, (1 + t^2)}{t^4 - 2t^2 \cos 2\theta + 1} \, dt \geqslant$$

$$-K_1 \int_0^{\xi} \frac{2 \sin^2 \theta \, (1 + t^2)}{(1 - t^2)(t^4 - 2t^2 \cos 2\theta + 1)} \, dt ,$$

K_1 étant une constante qui ne dépend que de la suite Λ. L'intégrale du second membre est égale à

$$\frac{1}{4} \cos \theta \log \frac{\xi^2 - 2\xi \cos \theta + 1}{\xi^2 + 2\xi \cos \theta + 1} + \frac{1}{2} \sin \theta \left[\operatorname{Arc\,tg} \frac{\xi - \cos \theta}{\sin \theta} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{Arc\,tg} \frac{\xi + \cos \theta}{\sin \theta} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \log \frac{1 + \xi}{1 - \xi} ;$$

pour $\xi = 1 - \sqrt{\theta}$, cette expression tend vers zéro lorsque θ tend vers zéro.

On a aussi :

$$2 \int_{\xi}^{1} \frac{n\left(\dfrac{r}{t}\right) - n(rt)}{\dfrac{r}{t}} \frac{\cos 2\theta - t^2}{t^4 - 2t^2 \cos 2\theta + 1} \, dt$$

$$\geqslant 2 \int_{\sqrt{\cos 2\theta}}^{1} \frac{n\left(\dfrac{r}{t}\right) - n(rt)}{\dfrac{r}{t}} \left(-\frac{1}{2}\right) dt \geqslant -K_2 \theta^2,$$

$$-2 \int_{\xi}^{1} D(rt) \, dt \geqslant -K_3 \sqrt{\theta} ,$$

K_2 et K_3 étant des constantes qui ne dépendent que de la suite Λ.

On en déduit

$$\frac{1}{r} \log \left| \frac{1}{C(re^{i\theta})} \right| \geqslant 2 \int_0^{1-\sqrt{\theta}} \frac{D\left(\frac{r}{t}\right) - D(rt)}{1-t^2} dt + \varepsilon(\theta)$$

$\varepsilon(\theta)$ étant une fonction de θ qui tend vers zéro avec θ. On a donc

$$H(\theta) \geqslant \limsup_{r \to \infty} 2 \int_0^{1-\sqrt{\theta}} \frac{D\left(\frac{r}{t}\right) - D(rt)}{1-t^2} dt + \varepsilon(\theta)$$

$$A \geqslant \limsup_{\xi \to 1-0} \limsup_{r \to \infty} 2 \int_0^{\xi} \frac{D\left(\frac{r}{t}\right) - D(rt)}{1-t^2} dt.$$

Ceci achève de démontrer le théorème 1.

Remarque 1. — Le calcul précédent montre que si $h(\theta)$ est l'indicatrice de la fonction $C(w)$,

$$h(\theta) = \limsup_{r \to \infty} \frac{1}{r} \log \left| C(re^{i\theta}) \right|,$$

on a

$$h(0) = \lim_{\xi \to 1-0} \limsup_{r \to \infty} 2 \int_0^{\xi} \frac{D(rt) - D\left(\frac{r}{t}\right)}{1-t^2} dt.$$

Ce résultat est à rapprocher de ceux de [4] (p. 128).

2. Démonstration du théorème 2.

Nous avons déjà vu que

$$\frac{1}{r} \log \left| \frac{1}{C(re^{i\theta})} \right| = 2 \int_0^{\infty} D(rt) \frac{t^2 \cos 2\theta - 1}{t^4 - 2t^2 \cos 2\theta + 1} dt.$$

Soit $\bar{D}(r)$ la fonction de densité moyenne de la suite Λ

$$\bar{D}(r) = \frac{1}{r}\int_0^r D(t)\,dt.$$

A l'aide d'une intégration par parties, on obtient

$$\frac{1}{r}\log\left|\frac{1}{C(re^{i\theta})}\right| = \int_0^\infty \bar{D}(rt)\,\frac{4t^2(t^4\cos 2\theta - 2t^2 + \cos 2\theta)}{(t^4 - 2t^2\cos 2\theta + 1)^2}\,dt.$$

Soit $\bar{D}_\bullet$ la densité moyenne inférieure de la suite Λ :

$$\bar{D}_\bullet = \liminf_{r\to\infty} \bar{D}(r).$$

Pour $\frac{\pi}{4} \leqslant |\theta| \leqslant \frac{3\pi}{4}$, on a $\cos 2\theta \leqslant 0$, d'où

$$H(\theta) \leqslant \int_0^\infty \bar{D}_\bullet\,\frac{4t^2(t^4\cos 2\theta - 2t^2 + \cos 2\theta)}{(t^4 - 2t^2\cos 2\theta + 1)^2}\,dt = -\pi\bar{D}_\bullet\,|\sin\theta|.$$

Remarque 2. — Soit $\bar{D}^\bullet$ la densité moyenne supérieure de la suite Λ :

$$\bar{D}^\bullet = \limsup_{r\to\infty} \bar{D}(r).$$

Un calcul analogue au précédent, montre que si $\frac{\pi}{4} \leqslant |\theta| \leqslant \frac{3\pi}{4}$, on a

$$h(\theta) \leqslant \pi\bar{D}^\bullet\,|\sin\theta|.$$

3. Démonstration du théorème 3.

La formule de Jensen appliquée à la fonction $C(w)$, peut s'écrire

$$-\pi\bar{D}(r) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r}\log\left|\frac{1}{C(re^{i\theta})}\right| d\theta.$$

D'après [1] (p. 99-100) il existe une constante B, qui ne dépend que de la suite Λ, telle que, pour $0 < \theta < \theta_0$ et $r > r_0(\theta_0)$, l'on ait

$$\frac{1}{r}\log\left|\frac{1}{C(re^{i\theta})}\right| \leqslant B\log\frac{1}{\theta}.$$

D'autre part, pour $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a

$$H(\theta) \leqslant \alpha \cos\theta + H\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\theta.$$

avec

$$\alpha = \frac{H(\theta_0) - H\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\theta_0}{\cos\theta_0}$$

Pour $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $r > r_1(\varepsilon)$, on a donc

$$\frac{1}{r}\log\left|\frac{1}{C(re^{i\theta})}\right| \leqslant \alpha\cos\theta + H\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\theta + \varepsilon.$$

On déduit de la formule de Jensen et des inégalités précédentes, que l'on a

$$-\pi\overline{D}_{\bullet} \leqslant B(\theta_0 - \theta_0\log\theta_0) + \alpha(1 - \sin\theta_0) + H\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta_0.$$

En faisant tendre θ_0 vers zéro et en tenant compte du théorème 2, on obtient

$$-\pi\overline{D}_{\bullet} \leqslant A + H\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqslant A - \pi\overline{D}_{\bullet}$$

Si $A = 0$, on a donc $H\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi\overline{D}_{\bullet}$ et par suite

$$H(\theta) = -\pi\overline{D}_{\bullet}\,|\sin\theta|.$$

Remarque 3. — Il est démontré dans [7] (p. 428) que $h(0) = 0$ si et seulement si $h(\theta) = \pi\overline{D}^{\bullet}\,|\sin\theta|$. Ce résultat permet de démontrer le théorème 3 dans le cas où Λ a une densité maximum finie D_{max} :

$$D_{max} = \lim_{\xi\to 1-0}\ \limsup_{r\to\infty} \frac{n(r) - n(r\xi)}{r(1-\xi)} < \infty.$$

On sait ([2] p. 6) que Λ est alors contenue dans une suite positive, croissante, $\Gamma = (\gamma_n)$, de densité D_{max} (c'est-à-dire telle que $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\gamma_n} = D_{max}$).
Posons

$$C_1(w) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{w^2}{\gamma_n^2}\right) = C(w)\,C_2(w).$$

D'après [2] (p. 138), on a

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log \left| C_1 (re^{i\theta}) \right| = \pi D_{\max} \left| \sin\theta \right| ;$$

d'où

$$H(\theta) = h_2(\theta) - \pi D_{\max} \left| \sin\theta \right|,$$

$h_2(\theta)$ étant l'indicatrice de $C_2(w)$.

On a $A = 0$ si et seulement si $h_2(0) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $h_2(\theta) = -\pi \overline{D}_2^{\bullet} \left|\sin\theta\right|$, $\overline{D}_2^{\bullet}$ étant la densité moyenne supérieure de la suite complémentaire de Λ par rapport à Γ. Le théorème 3 découle de la relation : $\overline{D}_2^{\bullet} = D_{\max} - \overline{D}_{\bullet}$.

4. Applications.

Rappelons tout d'abord la définition du co-diagramme conjugué Q de $C(w)$ ([1], p. 102). C'est la réunion des ensembles Q_1 et Q_2, tels que

$$Q_1 = \{z = x + iy\ ;\quad x\cos\theta - y\sin\theta \leqslant H(\theta) \quad \forall\, \theta \in]0, \pi[\}$$

$$Q_2 = \{z = x + iy\ ;\quad x\cos\theta + y\sin\theta \leqslant H(\theta) \quad \forall\, \theta \in]0, \pi[\}$$

Considérons la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n z}}{C'(\lambda_n)}$$

Nous avons démontré dans [1] (p. 104-105) que cette série possède une suite de sommes partielles qui converge uniformément vers une fonction $f(z)$, dans tout domaine Δ tel que

$$\Delta = \left\{ z = x + iy\ ; \quad x \geqslant x_1 > x_0(\varepsilon) \quad |y| \leqslant \exp\left(\frac{x}{L+\varepsilon}\right)\right\},$$

ε étant un nombre positif arbitraire et L une constante qui ne dépend que de la suite Λ. Nous avons aussi montré que la fonction $f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe à l'extérieur du codiagramme conjugué Q de $C(w)$ et que chaque point extrême de Q est point singulier de $f(z)$.

Lorsque A est fini, $f(z)$ est holomorphe dans le demi-plan $x > A$. En particulier, lorsque la série de Dirichlet considérée a une abscisse de convergence finie, A est son abscisse d'holomorphie.

Supposons que A est fini et que Q possède un point extrême d'ordonnée l sur la droite $x = A$. La fonction $f(z)$ est holomorphe sur un intervalle ouvert de longueur $2|l|$ de la droite $x = A$. Le théorème 2 montre que

$$|l| \geqslant A + \pi \bar{D}_{\bullet}$$

et on sait d'autre part ([1], p. 102) que si Λ a une densité maximum finie

$$|l| \leqslant \pi D_{\max}.$$

On a donc

$$A + \pi \bar{D}_{\bullet} \leqslant |l| \leqslant \pi D_{\max}.$$

Le théorème 3 montre que si $A = 0$ on a $|l| = -\pi \bar{D}_{\bullet}$. Il serait intéressant de savoir pour quelles suites Λ on a $|l| = \pi D_{\max}$ et pour cela d'exprimer l en fonction de la suite Λ. Nous n'avons pu y parvenir.

Remarque 4. — La remarque 2 montre que le diagramme conjugué S de $C(w)$ est contenu dans le carré de sommets $z = \pm \pi \bar{D}^{\bullet}$ et $z = \pm i \pi \bar{D}^{\bullet}$. Il en résulte que si le contour de S contient un segment parallèle à l'axe imaginaire, de longueur $2d$, on a l'inégalité

$$d \leqslant \pi \bar{D}^{\bullet} - h(0).$$

La remarque 3 montre que si $h(0) = 0$ on a l'égalité $d = \pi \bar{D}^{\bullet}$.

D'autre part lorsque Λ a une densité minimum non nulle, $D_{\min}$:

$$D_{\min} = \lim_{\xi \to 1-0} \liminf_{t \to \infty} \frac{n(t) - n(t\xi)}{t(1-\xi)} > 0,$$

on a

$$d \geqslant D_{\min}.$$

En effet, on sait ([2], p. 6) que Λ contient dans ce cas une suite positive, croissante, $\Omega = (\omega_n)$, de densité $D_{\min}$ (c'est-à-dire telle que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\omega_n} = D_{\min}).$$

Posons

$$C_3(w) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w^2}{\omega_n^2}\right)$$

$$C(w) = C_3(w)\, C_4(w).$$

On a ([2] p. 138)

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} \log |C_3(re^{i\theta})| = \pi D_{\min} |\sin \theta| ;$$

d'où

$$h(\theta) = \pi D_{\min} |\sin \theta| + h_4(\theta),$$

$h_4(\theta)$ étant l'indicatrice de $C_4(w)$. Le diagramme conjugué de $C(w)$ est donc la somme de celui de $C_4(w)$ et du segment $[-i\pi D_{\min}, i\pi D_{\min}]$ de l'axe imaginaire; par suite $d \geqslant D_{\min}$.

Il existe cependant des suites de densité minimum nulle, telles que le contour du diagramme conjugué de $C(w)$ contienne un segment parallèle à l'axe imaginaire ; un exemple en est donné dans [3]. Il serait donc intéressant de savoir exprimer d en fonction de la suite Λ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BAILLETTE, Fonctions approchables par des sommes d'exponentielles, *Journal d'Analyse mathématique*, Vol. X (1962-63), 91-115.

[2] R. P. BOAS, Entire functions, *Academic Press* — New York (1954).

[3] J. P. KAHANE and L. A. RUBEL, On Weierstrass products of zero type on the real axis, *Illinois J. Math.*, t. 4 (1960), 584-592.

[4] P. KOOSIS, Sur la non totalité de certaines suites d'exponentielles sur des intervalles assez longs, *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* (1958), 75 (3), 125-152.

[5] I. F. KRASITCHKOV, Estimations inférieures des fonctions entières d'ordre fini et convergence des polynômes de Dirichlet (en russe), *Dokl. Acad. Nauk S.S.S.R.*, (1965), (162), n° 5, 995-996.

[6] I. F. KRASITCHKOV, Estimations inférieures des fonctions entières d'ordre fini (en russe), *Sibirsk. Mat.*, Tome VI, n° 4, (1965), 840-861.

[7] L. A. RUBEL, Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 83 (1956), 417-429.

Manuscrit reçu le 21 octobre 1966.

Aimée BAILLETTE,
Service de Mathématiques,
Collège Scientifique Universitaire,
66 - Perpignan.