Annales de l'institut Fourier

Masanori Kishi

Sur l'énergie en théorie du potentiel par rapport à un noyau non symétrique

Annales de l'institut Fourier, tome 17, nº 1 (1967), p. 119-127

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_1_119_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
17, 1 (1967), 119-127.

SUR L'ÉNERGIE EN THÉORIE DU POTENTIEL PAR RAPPORT A UN NOYAU NON SYMÉTRIQUE

par Masanori KISHI

Introduction.

Soient X un espace localement compact séparé et G un noyau semi-continu inférieurement tel qu'il applique $X \times X$ dans $[0, \infty]$ et $G(x, x)$ soit positif sur la diagonale de $X \times X$ et $G(x, y)$ soit fini continu au moins en dehors de la diagonale. Etant donnée une mesure positive μ, on définit le potentiel et l'énergie de μ par les intégrales suivantes :

$$G\mu(x) = \int G(x, y)\, d\mu(y),$$

$$\|\mu\|_G^2 = \int G\mu(x)\, d\mu(x)$$

respectivement. On examine si l'hypothèse :

$$G\mu(x) \geqslant G\nu(x) \quad \text{dans X et } \mu \text{ d'énergie finie,}$$

implique que l'énergie de ν est finie (sous certaines hypothèses sur la régularité) (1). Quand ceci est vrai, nous disons que G est *héréditaire.* Evidemment tous les noyaux symétriques (2) sont héréditaires.

Dans cet article nous donnons d'abord un exemple d'un noyau G qui n'est pas héréditaire tandis que son adjoint $\check{G}$ (3) est héréditaire, les deux noyaux G et $\check{G}$ satisfaisant aux principes du maximum dilaté (4)

(1) C'est un problème posé par Durier.

(2) Cela veut dire que $G(x, y) = G(y, x)$ sur $X \times X$.

(3) C'est le noyau défini par $\check{G}(x, y) = G(y, x)$.

(4) Nous disons qu'un noyau G satisfait au principe du maximum k-dilaté, quand pour toute mesure positive

$$\sup_{x \in X} G\mu(x) \leqslant k \sup_{x \in S\mu} G\mu(x)$$

où $S\mu$ désigne le support de μ.

et de domination dilaté [5]. Ensuite nous donnons deux conditions suffisantes pour que G soit héréditaire. Enfin une conséquence simple d'une condition suffisante est donnée.

1. Un exemple.

Soit X l'espace compact des points x_n ($n = 1, 2, \ldots$) et x_ω tel que chaque x_n soit isolé et la suite $\{ x_n \}$ converge vers x_ω. Nous posons

$$G\,(x_k, x_l) = \begin{cases} \alpha_l & \text{pour } k > l \\ \gamma_l & \text{pour } k = l \\ \beta_k & \text{pour } k < l \end{cases}$$
$$G\,(x_\omega, x_l) = \alpha_l$$
$$G\,(x_k, x_\omega) = \beta_k$$
$$G\,(x_\omega, x_\omega) = \infty,$$

où les suites de nombres positifs $\{ \alpha_k \}$, $\{ \beta_k \}$, $\{ \gamma_k \}$ sont déterminées de manière que

$$\lim \alpha_k = \lim \beta_k = \lim \gamma_k = \infty$$

$$\sum_1^\infty \alpha_k/2^k = \infty$$

$$\sum_1^{k-1} \alpha_n/2^n + \gamma_k/2^k + \beta_k/2^k = \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\sum_1^\infty \alpha_k/4^k, \quad \sum_1^\infty \beta_k/4^k, \quad \sum_1^\infty \gamma_k/4^k \text{ soient convergentes.}$$

Alors nous avons pour

$$\mu = \sum_1^\infty 2^{-n}\, \varepsilon_{x_n} \quad \text{et } \nu = \varepsilon_{x_\omega},$$

$$G\mu\,(x) = G\nu\,(x) \quad \text{partout sur X}$$

$$\| \mu \|_G^2 \leqslant \sum_1^\infty \alpha_k/4^k + \sum_1^\infty \beta_k/4^k + \sum_1^\infty \gamma_k/4^k < \infty,$$

[5] Nous disons que G satisfait au principe de domination k-dilaté, si le fait que $G\mu(x) \leqslant G\nu(x)$ sur $S\mu$ pour une mesure positive μ d'énergie finie et pour une mesure positive ν implique l'inégalité $G\mu\,(x) \leqslant k\,G\nu\,(x)$ dans X. Quand $k = 1$, ce principe se nomme le principe de domination.

tandis que $\|\nu\|_G = \infty$. Par suite G n'est pas héréditaire.

Pour déterminer $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$ comme ci-dessus nous prenons deux suites $\{b_k\}$, $\{c_k\}$ telles que

$$4/3 < b < b_k < c_k < c < 2.$$

Par récurrence nous déterminons $\{\beta_k\}$ comme suit

$$\beta_1 = 1 \qquad b_k\,\beta_k < \beta_{k+1} < c_k\,\beta_k\,.$$

Alors $\{\beta_k\}$ croît vers ∞ et

$$\sum_1^\infty \beta_k/2^k < \infty\,.$$

Ensuite nous déterminons la suite $\{\alpha_k\}$ par

$$\sum_1^k \alpha_n/2^n = \beta_k.$$

Alors $\{\alpha_k\}$ croît vers ∞ et

$$\sum_1^\infty \alpha_k/4^k \leqslant (c-1)/2 \sum_1^\infty \beta_k/2^k < \infty$$

$$\sum_1^\infty \alpha_k/2^k = \lim \beta_k = \infty\,.$$

Enfin la suite $\{\gamma_k\}$ déterminée par

$$\gamma_k/2^k = (1-2^{-k})\,\beta_k - \beta_{k-1}$$

converge vers ∞ et

$$\sum_1^\infty \gamma_k/4^k \leqslant (c-1)/2 \sum_1^\infty \beta_k/2^k < \infty\,.$$

Par notre choix, il existe un nombre fini A tel que

$$\beta_k \leqslant A\gamma_k, \quad \gamma_k \leqslant \alpha_k \leqslant A\gamma_k$$

pour tous les indices k. Ces dernières propriétés prouvent que G et $\check{G}$ satisfont aux principes du maximum dilaté et de domination dilaté [6]. Après le théorème 1 nous noterons que $\check{G}$ est héréditaire.

[6] Pour cela nous vérifions d'abord que G et $\check{G}$ satisfont au principe de continuité, et que l'inégalité : $G\mu \leqslant G\varepsilon_x$ sur $S\mu$ ($\check{G}\mu \leqslant \check{G}\varepsilon_x$ sur $S\mu$, resp.) pour

2. Quelques remarques sur le noyau satisfaisant au principe du maximum dilaté.

Nous noterons d'abord

LEMME 1. — *Soit* $\hat{G}$ *symétrique. Si* $\hat{G}$ *satisfait au principe du maximum k-dilaté, alors pour toutes mesures positives* μ, ν

$$(\mu, \nu)_{\hat{G}} \leqslant k \, \| \mu \|_{\hat{G}} \, \| \nu \|_{\hat{G}},$$

où

$$(\mu, \nu)_{\hat{G}} = \int \hat{G}\mu\,(x)\, d\nu\,(x).$$

Ceci est obtenu originairement par Ninomiya [7], nous citons aussi Choquet [2].

COROLLAIRE. — *Soit* G *un noyau non-symétrique satisfaisant au principe du maximum k-dilaté tel que le noyau adjoint* $\check{G}$ *y satisfasse aussi. Alors pour toutes mesures positives* μ, ν

$$(\mu, \nu)_G \leqslant 4\,k \, \| \mu \|_G \, \| \nu \|_G.$$

En effet, nous posons $\hat{G}\,(x, y) = G\,(x, y) + \check{G}\,(x, y)$. Puisque G et $\check{G}$ satisfont au principe du maximum k-dilaté, $\hat{G}$ satisfait au principe du maximum 2 k-dilaté. Alors notre inégalité résulte du lemme 1.

LEMME 2. — *Soit* G *un noyau satisfaisant au principe du maximum k-dilaté tel que le noyau adjoint* $\check{G}$ *y satisfasse aussi et soit régulier* (7). *Si* ν *est une mesure positive telle que* $(\nu, \lambda)_G$ *soit fini pour toutes mesures*

une mesure positive μ et pour un point x à l'extérieur de $S\mu$, implique $\int d\mu \leqslant A$. Ceci montre que G ($\check{G}$, resp.) satisfait au principe du maximum A-dilaté (cf. [5], Theorem II.8). Ensuite nous vérifions que l'inégalité ci-dessus implique que $G\mu \leqslant A' \, G\,\varepsilon_x$ sur X, avec $A' = \max(A^2, A+1)$. Ceci montre que G et $\check{G}$ satisfont au principe de domination A'-dilaté (cf. [5], Theorem II.4).

(7) Nous disons qu'un compact L est $\check{G}$-régulier si le fait que $G\,\mu\,(x) \geqslant h\,(x)$ à p.p.p. sur L implique la même inégalité partout sur L pour toute mesure positive μ et pour toute fonction continue positive h.

Quand, pour tout compact K et tout voisinage ω de K, il existe un compact $\check{G}$-régulier L tel que $K \subset L \subset \omega$, nous disons que G est régulier.

positives λ *d'énergie finie, alors ou bien* $\nu = 0$ *ou bien* $S\nu$ *est de capacité positive* (8) (9).

Démonstration. — Nous pouvons supposer que $\nu \neq 0$ et $S\nu$ est compact. Nous démontrerons que $K = S\nu$ est de capacité positive. Nous posons

$$c(K) = \sup \{ \mu(K); \ \underset{G\mu(x) \leqslant 1 \text{ dans } X}{\mu \text{ mesure positive portée par } K} \}.$$

La fonction $c(K)$ de compacts est continue à droite (10), donc si $c(K) = 0$, il existerait, pour une suite $\{ \varepsilon_n \}$ de nombres positifs telle que

$$\sum_1^\infty \varepsilon_n < \infty,$$

des ensembles ouverts ω_n contenant K tels que pour tous les compacts L, $K \subset L \subset \omega_n$, $c(L) < \varepsilon_n$. $\check{G}$ étant régulier nous pouvons prendre des compacts $\check{G}$-régulier L_n tels que $K \subset L_n \subset \omega_n$. Alors par le théorème d'existence (11) il existe des mesures positives μ_n et λ_n portées par L_n telles que

$$\begin{cases} G\mu_n(x) \geqslant 1 \text{ à p.p.p. sur } L_n \ (^{12}) \\ G\mu_n(x) \leqslant 1 \text{ sur } S\mu_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \check{G}\lambda_n(x) \geqslant 1 \text{ sur } L_n \\ \check{G}\lambda_n(x) \leqslant 1 \text{ sur } S\lambda_n. \end{cases}$$

Par le principe du maximum k-dilaté, $G\mu_n(x)$ et $\check{G}\lambda_n(x)$ sont inférieurs à k dans X. Nous notons :

$$\lambda_n(X) \leqslant k^2 c(L_n) \leqslant k^2 \varepsilon_n^2 .$$

En effet,

$$\lambda_n(X) \leqslant \int G\mu_n \, d\lambda_n = \int \check{G}\lambda_n \, d\mu_n$$
$$\leqslant k\, \mu_n(X) \leqslant k^2 c(L_n) \leqslant k^2 \varepsilon_n^2 .$$

(8) Quand un compact K porte au moins une mesure positive non-nulle d'énergie finie, K est dit être de capacité positive ; sinon K est de capacité nulle.

(9) Nous notons que la mesure ν de notre exemple dans le paragraphe 1 possède la propriété : $(\nu, \lambda)_G < \infty$ pour toutes mesures positives λ d'énergie finie, mais $S\nu$ est de capacité nulle, bien que G et $\check{G}$ satisfont au principe du maximum dilaté.

(10) Voir Brelot [1], Part. III, Theorem 7.

(11) Voir [5] (Theorem I.1), [6] et Durier [3] (Lemme 1).

(12) Cela veut dire que l'ensemble exceptionnel $\{x \in L_n ; G\mu_n(x) < 1\}$ ne contient pas de compact de capacité positive.

Nous posons :

$$\lambda = \sum_1^\infty \lambda_n .$$

Alors

$$\lambda(X) = \sum_1^\infty \lambda_n(X) \leqslant k^2 \sum_1^\infty \varepsilon_n^2 < \infty$$

$$\|\lambda\|_G^2 = \sum_{n,m} \int G\lambda_n \, d\lambda_m \leqslant 4\,k \sum_{n,m} \|\lambda_n\|_G \, \|\lambda_m\|_G$$

$$\leqslant 4\,k^4 \left(\sum_1^\infty \varepsilon_n\right)^2 < \infty,$$

tandis que $\check{G}\lambda(x) = \infty$ sur K et $(\nu, \lambda)_G = \infty$. Cette contradiction montre que c (K) est positive et par suite K est de capacité positive.

Du lemme 3 au lemme 6, nous supposons :

[P] tout ensemble ouvert non-vide est de capacité positive ou

[P′] $G(x, y) > 0$ sur $X \times X$.

Lemme 3. — *Soit* $\check{G}$ *un noyau satisfaisant au principe de domination k-dilaté. Alors* G *satisfait localement au principe du maximum dilaté.*

Ceci est une remarque faite par Ninomiya [7].

Lemme 4. — *Soit* G *un noyau non-symétrique tel que* $\check{G}$ *satisfasse au principe de continuité. Si* G *satisfait au principe de domination k-dilaté, alors* $\check{G}$ *y satisfait aussi.*

Voir [5], Theorem II.4.

Lemme 5. — *Soit* G *un noyau non-symétrique satisfaisant au principe de domination k-dilaté tel que le noyau adjoint satisfasse au principe de continuité. Alors pour tout compact* K *il existe un nombre fini* k' *tel que*

$$(\mu, \nu)_G \leqslant k' \, \|\mu\|_G \, \|\nu\|_G$$

pour toutes mesures positives μ, ν, *portées par K.*

Ceci résulte immédiatement du lemme 3, du lemme 4 et du corollaire du lemme 1.

LEMME 6. — *Soit* G *un noyau non-symétrique satisfaisant au principe de domination k-dilaté tel que* $\check{G}$ *soit régulier et satisfasse au principe de continuité. Si* ν *est une mesure positive telle que* $(\nu, \lambda)_G$ *soit fini pour toutes mesures positives* λ *d'énergie finie, alors ou bien* $\nu = 0$ *ou bien* $S\nu$ *est de capacité positive.*

En effet, sans diminuer la généralité nous pouvons supposer que $S\nu$ est compact. Alors ce lemme résulte des lemmes 2 et 5 ([13]).

3. Deux conditions suffisantes.

THÉORÈME 1. — *Soit* G *un noyau non-symétrique satisfaisant au principe du maximum k-dilaté tel que* $\check{G}$ *y satisfasse aussi. Si* $\check{G}$ *est régulier,* G *est héréditaire.*

Démonstration. — Soient μ et ν des mesures positives telles que $G\nu(x) \leqslant G\mu(x)$ dans X et μ soit d'énergie finie. Nous posons :

$$E_n = \{ x \,;\; G\nu(x) \leqslant n \} \qquad n = 1, 2, \ldots$$
$$E_\infty = \{ x \,;\; G\nu(x) = \infty \}.$$

D'abord nous montrons : $\nu(E_\infty) = 0$. En effet, s'il existait un compact K dans E_∞ tel que $\nu(K) > 0$, la mesure ν_K, la restriction de ν à K, posséderait la propriété :

$$(\nu_K, \lambda)_G = \int G\nu_K \, d\lambda \leqslant \int G\nu \, d\lambda$$
$$\leqslant \int G\mu \, d\lambda \leqslant 4\,k \,||\, \mu \,||_G \,||\, \lambda \,||_G < \infty$$

pour toutes mesures positives λ d'énergie finie. C'est contradictoire avec le lemme 2, parce que K est de capacité nulle.

Donc $\nu(E_\infty) = 0$ et la suite $\{ \nu_n \}$ de mesures qui sont les restrictions de ν à E_n converge vaguement vers ν. En restreignant les mesures à des compacts nous obtenons un filtre $\{ \nu_\alpha \}$ de mesures positives croissant

([13]) Nous pouvons le démontrer utilisant la notion de « contenance » et le théorème de Fuglede (cf. [4], Théorème 1.1).

vers ν tel que ν_α soit de masse totale finie et $G\nu_\alpha$ soit borné sur $S\nu_\alpha$. Alors ν_α est d'énergie finie et par le corollaire du lemme 1

$$\| \nu_\alpha \|_{\check{G}}^2 = \int G\nu_\alpha \, d\nu_\alpha \leqslant \int G\nu \, d\nu_\alpha$$
$$\leqslant \int G\mu \, d\nu_\alpha \leqslant 4\,k \, \| \mu \|_G \, \| \nu_\alpha \|_G.$$

Donc

$$\| \nu_\alpha \|_G \leqslant 4\,k \, \| \mu \|_G$$

et

$$\| \nu \|_G = \lim \| \nu_\alpha \|_G \leqslant 4\,k \, \| \mu \|_G < \infty.$$

Ceci prouve que G est héréditaire.

Remarque. — Notre exemple dans le § 1 montre que, bien que G et $\check{G}$ satisfassent au principe du maximum dilaté, G n'est pas nécessairement héréditaire, si $\check{G}$ n'est pas régulier.

Nous notons encore que le noyau $\check{G}$ de notre exemple est héréditaire, parce que G est régulier.

THÉORÈME 2. — *Soit* G *un noyau non-symétrique satisfaisant au principe de domination k-dilaté tel que* $\check{G}$ *soit régulier et satisfasse au principe de continuité. Si tout ouvert non-vide est de capacité positive ou* $G(x, y) > 0$ *dans* $X \times X$, *alors* G *est localement héréditaire* (14).

Démonstration. — Le procédé utilisé dans la démonstration du théorème 1 est applicable grâce aux lemmes 5 et 6.

Nous terminons cet article par une conséquence simple du théorème 2.

COROLLAIRE. — *Soit* G *un noyau non-symétrique satisfaisant aux principes de balayage et de continuité tel que* $\check{G}$ *soit régulier. Si tout ouvert non-vide est de capacité positive ou* $G(x, y) > 0$ *dans* $X \times X$, *alors pour toute mesure* μ *d'énergie finie et à support compact, la mesure balayée sur un compact est d'énergie finie.*

(14) Si $G\mu(x) \geqslant G\nu(x)$ dans X pour des mesures positives à support compact μ, ν, avec μ d'énergie finie, alors ν est d'énergie finie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Brelot, Lectures on potential theory. *Tata Inst. fund. Research,* Bombay (1960).
[2] G. Choquet, L'intégrale d'énergie en théorie du potentiel. *Séminaire de la théorie du potentiel,* 3^e^ année (1958-59), n° 3, p. 11.
[3] R. Durier, Principe des condensateurs pour un noyau dissymétrique. *Séminaire de la théorie du potentiel,* 10^e^ année (1965-66), n° 9, p. 22.
[4] B. Fuglede, Le théorème du minimax et la théorie fine du potentiel. *Ann. Inst. Fourier,* 15 (1965), 65-88.
[5] M. Kishi, Maximum principles in the potential theory. *Nagoya Math. J.,* 23 (1963), 165-187.
[6] M. Kishi, An existence theorem in potentiel theory. *Nagoya Math. J.,* 27 (1966), 133-137.
[7] N. Ninomiya, Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique. *J. Inst. Polyt. Osaka City Univ.,* 6 (1955), 147-179.

Manuscrit reçu le 21 octobre 1966.

Masanori Kishi,
Institut de Mathématiques,
Université de Nagoya,
Nagoya (Japon)