ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVES MEYER
JEAN-PIERRE SCHREIBER

Quelques fonctions moyennes-périodiques non bornées

Annales de l'institut Fourier, tome 19, nº 1 (1969), p. 231-236
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_231_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
19,1 (1969), 231 - 236

QUELQUES FONCTIONS MOYENNES-PÉRIODIQUES NON BORNÉES

par Y. MEYER et J. P SCHREIBER

Soit $D = \{\lambda_n\}_{n \geq 0}$, une suite de nombres réels vérifiant

1) $\lim_{n \to \infty} (n - \lambda_n) = 0.$

2) $\lambda_n \neq n$, pour une infinité de valeurs de n.

On se propose de montrer l'existence de fonctions moyenne. périodiques non bornées, à spectre (simple) dans D.

On désigne par $B(\mathbf{R}^n)$ l'algèbre des transformées de Fourier des mesures bornées sur $\mathbf{R}^n$ et on pose $\|\hat{\mu}\|_{B(\mathbf{R}^n)} = \int d|\mu|$. Pour un fermé E de $\mathbf{R}^n$, B(E) est l'algèbre des restrictions à E des fonctions de $B(\mathbf{R}^n)$, munie de la norme quotient. On rappelle :

DEFINITION. – ([4] déf. 1.2.1). *On dira qu'une partie* Λ *de* $\mathbf{R}$ *possède un compact associé s'il existe un intervalle compact* I *et une constante* K, *tels que pour toute famille* $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *de nombres complexes nuls sauf un nombre fini, on ait*

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x} \right| \leq K \sup_{x \in I} \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x} \right| .$$

PROPOSITION. – ([1] prop. 1). *Si toute fonction moyenne-périodique à spectre dans* Λ *est bornée,* Λ *possède un compact associé.*

On a alors le théorème suivant :

THEOREME 1. – *L'ensemble* D (*défini plus haut*) *ne possède pas de compact associé.*

Démonstration. – Soit l un nombre positif vérifiant

$$2l < \inf_{i,j \in \mathbf{N}} |\lambda_i - \lambda_j|$$

et pour toute fonction f continue sur $\mathrm{D} + [-l, l]$, soit $\tilde{f}$ la fonction continue sur $\mathrm{D} \times [-l, l]$ définie par

$$\tilde{f}(x, y) = f(x + y).$$

Si D avait un compact associé, il existerait une constante C telle que pour toute partie D′ de D, on ait ([4] th. I)

$$\|f\|_{\mathrm{B}(\mathrm{D}' + [-l, l])} \leq \mathrm{C} \, \|\tilde{f}\|_{\mathrm{B}(\mathrm{D}' \times [-l, l])}.$$

Soit N tel que pour $n \geq \mathrm{N}$, on ait $|\lambda_n - n| < \frac{l}{3}$. Prenons $\mathrm{D}' = \{\lambda_n\}_{n \geq \mathrm{N}}$. Pour tout ε positif inférieur à l, considérons la fonction f_ε définie sur $\mathrm{D}' + [-l, l]$ par :

$$\begin{cases} f_\varepsilon(x) = 1 - \dfrac{|x - \lambda_n|}{\varepsilon}, \text{ si } |x - \lambda_n| \leq \varepsilon ; \\ f_\varepsilon(x) = 0, \text{ pour les autres valeurs de } x . \end{cases}$$

Il est clair que $\tilde{f}_\varepsilon$ possède un prolongement à $\mathbf{R}^2$ dont la norme dans $\mathrm{B}(\mathbf{R}^2)$ ne dépend pas de ε ; par conséquent $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_{\mathrm{B}(\mathrm{D}' \times [-l, l])}$ est majorée indépendamment de ε et donc aussi $\|f\|_{\mathrm{B}(\mathrm{D}' + [-l, l])}$. Si g est une fonction de $\mathrm{B}(\mathbf{R})$ valant 1 sur $\mathbf{Z} + \left[-\frac{l}{3}, \frac{l}{3}\right]$ et nulle hors de $\mathbf{Z} + \left[-\frac{2l}{3}, \frac{2l}{3}\right]$, le produit de g avec des prolongements de f_ε en des fonctions de $\mathrm{B}(\mathbf{R})$ donne une famille de fonctions h_ε vérifiant :

$$\begin{cases} \|h_\varepsilon\|_{\mathrm{B}(\mathbf{R})} \leq \mathrm{K} \\ h_\varepsilon(\lambda_n) = 1 \quad \text{si} \quad \lambda_n \in \mathrm{D}' \\ h_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin \mathrm{D}' + [-\varepsilon, \varepsilon]. \end{cases}$$

Ces fonctions h_ε sont les transformées de Fourier de mesures de masse inférieure à K qui, considérées comme des mesures sur le compactifié de Bohr de $\mathbf{R}$, ont pour valeur d'adhérence faible, quand ε tend vers 0, une mesure μ dont la transformée de Fourier est la fonction caractéristique de D'. La mesure μ est semi-idempotente et, d'après Kessler ([3]), D' doit être l'intersection avec $[0, +\infty[$ d'un élément de l'anneau des classes du groupe **R** discret.

On sait qu'un ensemble E, discret, de **R** qui appartient à l'anneau des classes du groupe discret **R** s'écrit $\bigcup_{i=1}^{n} (\tau_i \mathbf{Z} + \beta_i)\backslash F$ où les τ_i et β_i sont réels et F un ensemble fini. On voit facilement que la démonstration ([5], p. 71) s'applique au cas où l'on sait seulement que $E \cap [0, +\infty[$ est discret. Mais les hypothèses faites sur D interdisent à D' d'avoir cette forme, ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. — *Il existe des fonctions moyennes-périodiques non bornées de la forme* : $f \sim \sum_{n \geq 0} a_n \sin \lambda_n x$ *et de la forme*

$$g \sim \sum_{n \geq 0} b_n \cos \lambda_n x .$$

Posons $\Delta = D \cup (-D)$. Le corollaire résulte en fait seulement de l'existence d'une fonction moyenne périodique non bornée à spectre dans Δ et de ce que $\delta = \inf_{\substack{\lambda \in \Delta \\ \lambda' \in \Delta}} |\lambda' - \lambda| > 0$.

L'existence d'une telle fonction équivaut en effet à l'existence d'une suite de polynômes trigonométriques

$$P_\nu(x) = \sum_{\lambda \in \Delta} a_\lambda(\nu)\, e^{i\lambda x} \quad , \ \nu = 1,2, \dots$$

vérifiant :

a) $\sup_{x \in \mathbf{R}} |P_\nu(x)| = 1$

b) $P_\nu(x) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$ uniformément sur tout compact.

Si on considère alors les polynômes trigonométriques

$$C_\nu(x) = P_\nu(x) + P_\nu(-x)$$

$$S_\nu(x) = P_\nu(x) - P_\nu(-x)$$

on voit qu'en se restreignant au besoin à une sous suite et en multipliant au besoin ces polynômes par des constantes, on a les propriétés a) et

b) soit pour les polynômes C_ν soit pour les polynômes S_ν. Supposons par exemple qu'on ait

$$\begin{cases} C_\nu(x) = \sum\limits_{n \leqslant N_\nu} c_n(\nu) \cos \lambda_n x \\ \sup\limits_{x \in \mathbf{R}} |C_\nu(x)| = 1 \\ C_\nu(x) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 \text{ uniformément sur tout compact.} \end{cases}$$

On peut dès lors affirmer l'existence de fonctions moyennes-périodiques paires non bornées à spectre dans Δ. Pour les fonctions impaires considérons

$$\begin{aligned} D_\nu(x, h) &= C_\nu(h + x) - C_\nu(h - x) \\ &= -2 \sum_{n \leqslant N_\nu} c_n(\nu) \sin \lambda_n h \sin \lambda_n x . \end{aligned}$$

Pour tout h, $D_\nu(x, h)$ converge aussi uniformément sur tout compact vers 0. De plus on peut trouver une valeur de h, une suite $\{\nu_i\}$ et un nombre $\eta > 0$ tels que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |D_{\nu_i}(x, h)| > \eta \quad \text{pour tout } i .$$

En effet, sinon on aurait pour tout $T > 0$ et tout $h \in [0, T]$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |D_\nu(x + h, h) + D_\nu(h - x, h)| \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 .$$

c'est-à-dire

$$4 \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \sum_{n \leqslant N_\nu} c_n(\nu) \sin^2 \lambda_n h \cos \lambda_n x \right| \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$$

cette suite restant d'ailleurs majorée par 4 pour toute valeur de h. Mais

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqslant N_\nu} c_n(\nu) \cos \lambda_n x = &\sum_{n \leqslant N_\nu} c_n(\nu) \cos 2\lambda_n h \cos \lambda_n x \\ &+ 2 \sum_{n \leqslant N_\nu} c_n(\nu) \sin^2 \lambda_n h \cos \lambda_n x \end{aligned}$$

d'où en intégrant par rapport à h sur $[0, T]$ et en utilisant l'inégalité de Schwarz

$$T\left|\sum_{n\leqslant N_\nu} c_n(\nu)\cos\lambda_n x\right| \leqslant \left\{\sum_{n\leqslant N_\nu} |c_n(\nu)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{n\leqslant N_\nu}\frac{1}{\lambda_n^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\int_0^T 2\left|\sum_{n\leqslant N_\nu} c_n(\nu)\sin^2\lambda_n h\cos\lambda_n x\right| dh.$$

La régularité de Δ entraîne d'une part que les sommes $\sum\limits_{n\leqslant N_\nu}\frac{1}{\lambda_n^2}$ sont bornées et d'autre part, par l'inégalité d'Ingham ([2] p. 94).

$$\sum |c_n(\nu)|^2 \leqslant k\int_0^{\frac{2\pi}{\delta}}\left|\sum_{n\leqslant N_\nu} c_n(\nu)\cos\lambda_n x\right|^2 dx \leqslant k\,\frac{2\pi}{\delta}$$

Comme, pour toute valeur de T et de x l'intégrale du 2e membre tend vers 0 lorsque ν tend vers l'infini et comme un choix convenable de x donne au 1er membre une valeur arbitrairement voisine de T, on obtient une contradiction dès que T est supérieur à

$$(2\pi\,\delta^{-1})^{\frac{1}{2}}\left(\sum\frac{1}{\lambda_n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi donc nous avons aussi prouvé l'existence de fonctions moyennes-périodiques impaires à spectre dans Δ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.P. KAHANE, Sur les fonctions moyennes-périodiques bornées, *Ann. Inst. Fourier*, VII, (1957) (p. 293-314).

[2] J.P. KAHANE, Pseudo-périodicité et séries de Fourier lacunaires, *Ann. Ec. Norm.* 79 (1962).

[3] I. KESSLER, Semi idempotent measures on abelian groups, *Bull. Am. Math. Soc.* 73 (1967) p. 258.

[4] Y. MEYER, Isomorphisme entre certaines algèbres de restrictions. *Ann. Inst. Fourier* 18, 2 (1968), 73-86.

[5] H.P. ROSENTHAL, Projections on to invariant subspaces of $L^p(G)$, *Mémoirs of the Am. Math. Soc.* (1966) (n° 63).

Manuscrit reçu le 26 décembre 1968

Y. MEYER et J.P. SCHREIBER
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
91 – Orsay