

ARNAUD DE LA PRADELLE

**Remarque sur la valeur d'un potentiel à support ponctuel polaire en son pôle en théorie axiomatique**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 19, n° 1 (1969), p. 275-276

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1969\\_\\_19\\_1\\_275\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_275_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## REMARQUE SUR LA VALEUR D'UN POTENTIEL A SUPPORT PONCTUEL POLAIRE EN SON PÔLE EN THÉORIE AXIOMATIQUE

par Arnaud de la PRADELLE

Dans notre mémoire ([2]) sur la quasi-analyticité paru dans ces Annales (1967 t. 17 p. 383), nous utilisons en axiomatique Brelot complétée par la théorie des fonctions adjointes, dans le lemme 4, la propriété qu'un potentiel à support ponctuel, noté  $p_{x_0}$  (<sup>1</sup>), prend la valeur  $+\infty$  en  $x_0$  quand  $\{x_0\}$  est polaire ; nous avons omis d'indiquer que l'on supposait l'identité de l'effilement et de l'effilement adjoint, ce qui se trouvait vérifié dans les applications en vue. Nous montrons ici que  $p_{x_0}(x_0)$  est égal à  $+\infty$  s'il y a identité des deux effilements seulement pour une classe particulière d'ensembles.

On a plus précisément un équivalent. Notons par  $\Omega$  l'espace de base muni d'une base dénombrable d'ouverts.

PROPOSITION. — *Supposons les axiomes 1, 2, 3, l'existence d'un potentiel  $> 0$  dans  $\Omega$ , l'existence d'une base de domaines complètement déterminants<sup>(2)</sup> la proportionnalité des potentiels et des potentiels adjoints à support ponctuel. Alors pour un point polaire  $x_0$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1)  $p_{x_0}(x_0) = +\infty$

2) *Pour toute fonction  $\varphi$  finie continue dans  $\Omega$ , l'effilement en  $x_0$  (s'il a lieu) de l'ensemble  $\{p_{x_0} > \varphi\}$  entraîne l'effilement adjoint en  $x_0$  de cet ensemble.*

3) *Même énoncé avec l'ineffilement.*

(<sup>1</sup>)  $p_y$  désigne toujours un potentiel à support ponctuel situé dans une base fixée du cône  $S^+$  des fonctions surharmoniques positives.

(<sup>2</sup>) Un ouvert  $\delta$  est complètement déterminant (c.d.) si pour tout potentiel  $P > 0$  dans  $\Omega$ , harmonique dans  $\delta$  on a  $R_P^\delta = P$ . Les ouverts c.d. sont les ouverts réguliers de la théorie adjointe.

*Démonstration.*

1) entraîne 2) et 3). En effet  $x_0$  est alors intérieur à  $p_{x_0} > \varphi$  et il y a ineffilement et ineffilement adjoint.

2) ou 3) entraînent 1). Supposons que  $p_{x_0}(x_0)$  soit fini et soit  $h$  une fonction positive, harmonique dans  $\Omega$  et vérifiant :

$$h(x_0) > p_{x_0}(x_0).$$

L'ouvert  $\omega = \{p_{x_0} > h\}$  est non vide et effilé en  $x_0$  ( $p_{x_0}$  est non borné supérieurement au voisinage de  $x_0$ , sinon il serait harmonique, d'après [1], p. 20, propriété 5c).

Par suite, d'après 2),  $\omega$  est effilé adjoint en  $x_0$  et  $\mathcal{C}\omega$  est non effilé adjoint en  $x_0$ .

De même d'après 3)  $\mathcal{C}\omega$  est non effilé en  $x_0$  et donc encore  $\mathcal{C}\omega$  est non effilé adjoint en  $x_0$ .

Comme l'ineffilement adjoint de  $\mathcal{C}\omega$  en  $x_0$  est caractérisé par

$$\hat{R}_{p_{x_0}}^{\mathcal{C}\omega} \equiv p_{x_0} \quad ([1], \text{th. } 32,5)$$

on a 
$$h \geq R_{p_{x_0}}^{\mathcal{C}\omega} \geq \hat{R}_{p_{x_0}}^{\mathcal{C}\omega} \equiv p_{x_0} \quad \text{dans } \Omega$$

ce qui est contradictoire. On conclut que  $p_{x_0}(x_0) = +\infty$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.M. HERVE, *Thèse, Ann. Institut Fourier* t. 12 (1962) 514-571.  
 [2] A. de LA PRADELLE, Approximation et caractère de quasi-analyticité dans la théorie axiomatique des fonctions harmoniques. *Ann. Institut Fourier* t. 17 (1967) 383-399.

Manuscrit reçu le 10 janvier 1969

Arnaud de LA PRADELLE  
 Institut Henri Poincaré  
 11, rue Pierre Curie  
 Paris 5e