

NICOLAS TH. VAROPOULOS

**Un problème d'extension linéaire dans les
algèbres uniformes**

Annales de l'institut Fourier, tome 21, n° 3 (1971), p. 263-269

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_3_263_0

© Annales de l'institut Fourier, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN PROBLÈME D'EXTENSION LINÉAIRE DANS LES ALGÈBRES UNIFORMES

par Nicolas Th. VAROPOULOS

Soit X un espace compact et soit $A \subset C(X)$ une algèbre uniforme sur X . On dira que $E \subset X$, un sous-ensemble compact, est un ensemble de type $I(1)$ (cf. [1]) si pour tout $f \in C(E)$ il existe une $\tilde{f} \in A$ telle que $\tilde{f}|_E = f$ et $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. On dira que E est un ensemble d'interpolation isométrique si pour tout $f \in C(E)$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe une \tilde{f} telle que $\tilde{f}|_E = f$ et $\|\tilde{f}\| \leq \|f\| + \varepsilon$.

On notera aussi par $A(E)$ l'algèbre $A(E) = A/I(E) \subset C(E)$; $I(E) = \{f \in A ; f^{-1}(0) \supset E\}$ munie de sa norme quotient.

Dans cette note on va partiellement généraliser les résultats de A. Pelczynski et Michael (cf. [2], [3]) et on va démontrer les deux théorèmes suivants.

THEOREME 1. — *Soient X un espace compact, A une algèbre uniforme sur X et E un ensemble métrisable de type $I(1)$, alors il existe une application linéaire*

$$T : C(E) \rightarrow A \quad ; \quad \|T\| \leq 1$$

telle que $Tf|_E = f, \forall f \in C(E)$.

THEOREME 2. — *Soient X un espace compact, A une algèbre uniforme sur X et $E \subset X$ un sous-ensemble compact métrisable qui est d'interpolation isométrique. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une application linéaire*

$$T = T_\varepsilon : C(E) \rightarrow A \quad ; \quad \|T\| \leq 1 + \varepsilon$$

telle que $Tf|_E = f, \forall f \in C(E)$.

Démonstration du théorème 1.

Soit $D_j = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1\}$, $j = 1, 2, \dots$, une suite de disques complexes ; en utilisant alors les hypothèses, on peut trouver une suite de fonctions $\{f_j \in A ; \|f_j\| \leq 1, j = 1, 2, \dots\}$ telle que l'application

$$F : SpA \rightarrow D = \prod_{j=1}^{\infty} D_j \quad ; \quad F(x) = \{f_j(x)\}_{j=1}^{\infty} \quad x \in SpA$$

est biunivoque sur E et envoie E dans un ensemble $F(E)$ qui est pic interpolation pour l'algèbre $A(D)$ (des fonctions "analytiques" sur D). En utilisant alors le théorème de [3] on obtient une application linéaire isométrique $S : C(F(E)) \rightarrow A(D)$ telle que composée avec $\check{F} : A(D) \rightarrow A$ (le calcul symbolique induit par F) donne l'application cherchée $T = \check{F} \circ S \circ I_F$ où $I_F : C(E) \rightarrow C(F(E))$ est l'identification de $C(E)$ et de $C(F(E))$ induite par F .

Avant d'aborder la preuve du théorème 2 on va démontrer la proposition suivante

PROPOSITION 1. — Soit X un espace compact et soit $E \subset X$ un sous-ensemble fermé de X et $A \subset C(X)$ une algèbre uniforme sur X , soit aussi $f \in A(E)$ une fonction à valeurs ± 1 ($f(e) = \pm 1 \forall e \in E$) telle que $\|f\|_{A(E)} = 1$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\tilde{f} \in A$ telle que

$$\|\tilde{f}\| \leq 1 \quad ; \quad \sup_{x \in X} |\operatorname{Im} \tilde{f}(x)| \leq \varepsilon ; \sup_{e \in E} |\tilde{f}(e) - f(e)| \leq \varepsilon .$$

La proposition 1 est une conséquence immédiate du théorème de Hahn-Banach et du lemme suivant (pour le passage du lemme 1 à la proposition 1 cf. [4], § 6).

LEMME 1. — Soient X, E, A, f comme dans la proposition 1 et $\mu \in M^+(X)$ une mesure de Radon positive sur X , il existe alors un filtre de fonctions $\{\tilde{f}_\gamma \in A_1 (= \text{la boule unité de } A)\}_{\gamma \in \Gamma}$ tel que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tilde{f}_\gamma &\xrightarrow{\gamma \in \Gamma} 0 \text{ pour la topologie } \sigma(L^\infty(X; \mu) ; L^1(X; \mu)) \\ \tilde{f}_\gamma|_E &\xrightarrow{\gamma \in \Gamma} f \text{ pour la topologie } \sigma(L^\infty(E; \mu|_E) ; L^1(E; \mu|_E)) . \end{aligned}$$

Preuve du lemme 1. — Notons par Θ l'adhérence pour la topologie faible $\sigma = \sigma(L^\infty ; L^1)$ de A_1 dans $L^\infty(X; \mu)$; $\Theta \subset L^\infty(X; \mu)$ est

alors convexe, compact pour la topologie σ , il est contenu dans U , la boule unité de $L^\infty(X; \mu)$ et il est fermé par multiplication ponctuelle i.e. Θ est un demi-groupe multiplicatif. (Pour vérifier ce dernier point, observons dans un premier temps que $A_1 \cdot \Theta \subset \Theta$ et que ceci entraîne que $\Theta \cdot \Theta \subset \Theta$).

Notons alors que

$$\Theta_1 = \{f \in \Theta ; f(e) = 1 \quad (p. p. \mu) \quad e \in E\}$$

est un sous-demi-groupe fermé de Θ .

En utilisant alors un théorème de [4] (dans [4] § 4 le théorème est donné seulement pour un Θ autoadjoint, mais il est valable dans le cas général cf. [5], Ch. IX § 3.3) on obtient une décomposition de X en deux sous-ensembles boréliens disjoints $X_1, X_2 \subset X$

$$(X_1 \cap X_2 = \emptyset, X_1 \cup X_2 = X)$$

tels que

$$\forall \varphi \in \Theta_1 \quad \varphi(x_1) = 1 \quad (p. p. \mu) \quad x_1 \in X_1 \quad (1)$$

$$\exists \varphi_0 \in \Theta_1 \quad \varphi_0(x_2) = 0 \quad (p. p. \mu) \quad x_2 \in X_2. \quad (2)$$

Soit alors $\psi_0 \in \Theta$ une fonction telle que $\psi_0(e) = f(e)$ ($p. p. \mu$) $e \in E$. (Une telle fonction existe toujours à cause de notre hypothèse $\|f\|_{A(E)} = 1$), on a alors $\psi_0^2 \in \Theta_1$ et par conséquent (1) et (2) entraînent que, si on pose $\theta = \psi_0 \varphi_0 \in \Theta_1$, on a $\text{Im } \theta(x) = 0$ ($p. p. \mu$ $x \in X$). Pour satisfaire toutes les conditions du lemme, il suffit donc de prendre pour notre filtre $\{\tilde{f}_\gamma \in A_1\}_{\gamma \in \Gamma}$ un filtre qui converge pour la topologie $\sigma(L^\infty; L^1)$ vers θ ($\tilde{f}_\gamma \xrightarrow{\gamma \in \Gamma} \theta$).

COROLLAIRE 1. — Soient X un espace compact, $A \subset C(X)$ une algèbre uniforme sur X et $E \subset X$ un sous-ensemble métrisable d'interpolation isométrique de A . Alors pour tout $u \in C_{\mathbb{R}}(E)$ fonction continue réelle sur E et tout $\varepsilon > 0$ il existe $f \in A$ telle que :

$$\|f\| \leq \|u\| + \varepsilon ; \sup_{x \in X} |\text{Im } f(x)| \leq \varepsilon ; f|_E = u.$$

On déduit facilement le corollaire 1 à partir de la proposition 1 en utilisant Hahn-Banach et le fait que toute mesure sur un espace compact métrisable s'approche en norme par des mesures de support totalement disconnecté.

Remarque. — La proposition 1 aussi bien que son corollaire est valable dans le cadre plus général d'une algèbre de Banach $A \subseteq C(X)$ (munie d'une norme plus fine que $\| \cdot \|_\infty$).

Démonstration du théorème 2. — Soit X, E, A comme dans le théorème 2. On va supposer pour la démonstration que $SpA = X$ et on va fixer une fois pour toutes G un groupe abélien compact métrisable et $\varphi : E \rightarrow G$ une application telle que pour tout caractère de G , $\chi \in \hat{G}$ il existe une fonction $u = u_\chi \in C_{\mathbb{R}}(E)$ telle que

$$\exp[i u(e)] = \chi(\varphi(e)) \quad e \in E. \quad (3)$$

(Ceci est toujours possible : il suffit par exemple de prendre $G = \mathbb{T}^N$ et d'identifier E à un compact de

$$\mathbb{I}^N = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \subset \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \dots = \mathbb{T}^N).$$

On va démontrer alors le lemme suivant :

LEMME 2. — Soient X, E, A, G et φ comme ci-dessus alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe :

$$\{\alpha_{\chi, j} \in A ; \chi \in \hat{G}, j = 1, 2, \dots\},$$

$$\{\mu_{x, j} \in M(G) ; x \in X, j = 1, 2, \dots\}$$

tels que

- i) $\text{Card} \{\chi \in \hat{G} ; \alpha_{\chi, j} \neq 0 \in A\} < +\infty ; \forall j = 1, 2, \dots$
- ii) $\|\mu_{x, j}\| \leq 1 + \varepsilon ; x \in X, j = 1, 2, \dots$
- iii) $\alpha_{\chi, j}(x) = \int_G \chi(g) d\mu_{x, j}(g) ; x \in X, j = 1, 2, \dots, \chi \in \hat{G}$
- iv) $\alpha_{\chi, j}(e) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \chi(\varphi(e))$ uniformément pour $e \in E ; \forall \chi \in \hat{G}$
- v) $\sum_{j=1}^{\infty} \|\alpha_{\chi, j+1} - \alpha_{\chi, j}\| < +\infty ; \forall \chi \in \hat{G}$.

Démonstration du lemme 2. — Pour alléger les notations, on va donner ici la preuve dans le cas $G \cong \mathbb{T} = \mathbb{R} \pmod{2\pi}$, ce cas est parfaitement typique, le cas général (e.g. $G \cong \mathbb{T}^N$) se traite d'une manière tout à fait analogue ; on a alors $\hat{G} \cong \mathbb{Z}$ en posant

$$\chi_m(t) = e^{imt} \quad ; \quad \chi_m \in \hat{G} \quad m \in \mathbb{Z} .$$

En utilisant (3) et le corollaire 1 on peut choisir alors une suite $\{\beta_j \in A\}_{j=1}^\infty$ telle que

$$\beta_j(e) = \chi_{2^j}(\varphi(e)) (= \exp(i2^j \varphi(e))) \quad ; \quad \|\beta_j(x) - 1\| \leq \frac{\delta}{2^j} \quad ; \quad e \in E, x \in X, \\ j = 1, 2, \dots \quad (4)$$

où $\delta > 0$ est à choisir plus tard.

On va construire alors, à partir de $\{\beta_j\}$, une suite double $\{\gamma_m^{(j)} \in A \ ; \ m \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, \dots\}$ de la manière suivante : pour tout $j \geq 1$ on peut développer tout $0 \leq m \leq 2^{j+1} - 1$ d'une manière unique

$$m = \sum_{k=0}^j \varepsilon_k(m) 2^k \quad \varepsilon_k(m) = 0, 1 \quad (k = 0, 1, \dots, j) .$$

On posera alors :

$$\gamma_m^{(j)} = \prod_{k=0}^j \beta_k^{\varepsilon_k(m)} \quad , \quad j = 1, 2, \dots \quad ; \quad 0 < m \leq 2^{j+1} - 1 .$$

On posera aussi (en utilisant (4) et l'hypothèse que $SpA = X$) :

$$\gamma_m^{(j)} = (\gamma_m^{(j)})^{-1} \quad j = 1, 2, \dots \quad ; \quad 1 - 2^{j+1} \leq m < 0$$

$$\gamma_m^{(j)} = 0 \quad j = 1, 2, \dots \quad ; \quad |m| \geq 2^{j+1} .$$

$$\gamma_0^{(j)} = 1 \quad j = 1, 2, \dots$$

(4) entraîne alors que :

$$\|\gamma_m^{(j)}\| \leq e^\delta \quad ; \quad \gamma_m^{(j)}(e) = \chi_m(\varphi(e)) \quad ; \quad j = 1, 2, \dots ,$$

$$|m| \leq 2^{j+1} - 1 . \quad (5)$$

Posons finalement :

$$\alpha_m^{(j)} = \frac{1}{2^{j+2} - 1} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \gamma_{m-p}^{(j)} \gamma_p^{(j)} \quad ; \quad m \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, \dots \quad (6)$$

En notant alors

$$\gamma^{(j)}(x) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^{j+2} - 1}} \gamma_m^{(j)}(x) \right\}_{m=-\infty}^{+\infty} \quad (x \in X, j = 1, 2, \dots) ,$$

on obtient tout de suite, à partir de (5) et (6) que :

$$\begin{aligned} \gamma^{(j)}(x) \in L^2(\mathbf{Z}) ; \|\gamma^{(j)}(x)\|_{L^2} \leq e^\delta ; \alpha^j(x) &= \{\alpha_m^{(j)}(x)\}_{m=-\infty}^{+\infty} = \\ &= \gamma^{(j)}(x) * \gamma^{(j)}(x) ; x \in X, j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

(la convolution $*$ ayant lieu sur le groupe $\hat{G} = \mathbf{Z}$) ; et ceci entraîne que, pour tout $x \in X$ et tout $j = 1, 2, \dots$, il existe une mesure $\mu_{x,j} \in M(\mathbf{T})$ telle que

$$\|\mu_{x,j}\| \leq e^{2\delta} ; \alpha_m^{(j)}(x) = \int_{\mathbf{T}} e^{imt} d\mu_{x,j}(t), m \in \mathbf{Z}. \quad (7)$$

(Cette idée de convolution pour obtenir une fonction de la classe $A(\mathbf{Z})$ a paru pour la première fois dans les travaux de Drury, cf. [6], cf. aussi [4] addendum, [7]).

D'autre part, en utilisant la définition de $\gamma_m^{(j)}$ et (5) et en faisant un calcul facile on voit que, pour tout $m \in \mathbf{Z}$ fixé, on a :

$$\|\alpha_m^{(j+1)} - \alpha_m^{(j)}\| = 0(2^{-j}) ; \quad (8)$$

$\alpha_m^{(j)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \chi_m(\varphi(e))$ uniformément $e \in E$ et que $\alpha_m^{(j)} = 0$ dès que

$$|m| \geq 2^{j+10}.$$

En combinant alors (7) et (8), on voit qu'il suffit de poser $\alpha_{\chi_m, j} = \alpha_m^{(j)}$ et de définir $\mu_{x,j}$ comme dans (7) ($m \in \mathbf{Z}, x \in X, j = 1, 2, \dots$) pour satisfaire toutes les conditions du lemme (quitte à bien choisir δ).

Conclusion de la démonstration du théorème 2.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque et choisissons

$$\{\alpha_{\chi, j} \in A, \mu_{x, j} \in M(G) ; x \in X, \chi \in \hat{G}, j = 1, 2, \dots\}$$

qui satisfont les conditions i) – v) avec cet ε ; en utilisant alors i), ii) et iii) on voit qu'on peut définir une suite d'applications linéaires :

$$L_j : C(G) \rightarrow A ; \|L_j\| \leq 1 + \varepsilon \quad (j = 1, 2, \dots)$$

par les conditions :

$$L_j(\chi) = \alpha_{\chi, j} \in A ; \chi \in \hat{G}, j = 1, 2, \dots$$

En utilisant iv) et v) on voit alors que les L_j convergent vers une application linéaire $L = L_\varepsilon : C(G) \rightarrow A$ de norme inférieure ou égale à $1 + \varepsilon$ telle que l'élément $F_\chi = L(\chi) \in A$ satisfait :

$$F_\chi(e) = \chi(\varphi(e)) ; \forall e \in E , \forall \chi \in \hat{G}$$

ceci entraîne que l'élément $F_f = L(f) \in A$ satisfait :

$$F_f(e) = f(\varphi(e)) ; \forall e \in E , \forall f \in C(G) .$$

Considérons alors

$$Q : C(E) \rightarrow C(G) ; Q : f \rightarrow Q_f \in C(G) , f \in C(E)$$

une application linéaire telle que

$$\|Q\| \leq 1 ; Q_f(\varphi(e)) = f(e) \quad \forall f \in C(E)$$

(cf. [8]) et posons $T = T_\varepsilon = L_\varepsilon \circ Q$. On voit alors que T satisfait toutes les conditions de notre théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. Th. VAROPOULOS, *C.R.A.S.* t. 272 (1971), 950-952 (A).
- [2] A. PELCZYNSKI, *Studia Math.*, vol. 4 (1966), 285-304.
- [3] E. MICHAEL et A. PELCZYNSKI, *Ill. J. Math.* 11 (1967), 563-579.
- [4] N. Th. VAROPOULOS, *Acta Math.*, vol. 125 (1970), 109-154.
- [5] Institut Mittag-Leffler 1969-70 : Seminars on Thin sets in Harmonic Analysis.
- [6] S. DRURY, *C.R.A.S.* t. 271 (1970), 162-163.
- [7] N. Th. VAROPOULOS, *C.R.A.S.* t. 272 (1971), 866-867 (A).
- [8] K. BORSUK, *Bull. Inst. Acad. Polon. Sci.* 1933, 1-10.

Manuscrit reçu le 30 avril 1971

Nicolas Th. VAROPOULOS
 Service de Mathématiques
 Université de Paris XI
 91 - Orsay