

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GILLES CHATELET

HAROLD ROSENBERG

Un théorème de conjugaison des feuilletages

Annales de l'institut Fourier, tome 21, n° 3 (1971), p. 95-106

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_3_95_0

© Annales de l'institut Fourier, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN THÉORÈME DE CONJUGAISON DES FEUILLETAGES

par G. CHATELET et H. ROSENBERG

Introduction.

Dans [7], H. Rosenberg et R. Roussarie ont montré que si V est une variété compacte, orientable de dimension 3 (le bord éventuel étant constitué de tores) et admettant un feuilletage par plans (les composantes connexes du bord étant les seules feuilles compactes), de classe C^2 , transversalement orientable, V est difféomorphe soit à $D^2 \times S^1$, soit à $T^2 \times [0, 1]$ ou enfin à T^3 . Nous appellerons "feuilletages de Reeb", les feuilletages répondant aux conditions énoncées ci-dessus. Ceci pose la question de la classification de tels feuilletages sur ces variétés.

DEFINITION. — Soient (V_1, \mathcal{F}_1) et (V_2, \mathcal{F}_2) deux variétés munies de "feuilletages de Reeb" et H une application de V_1 sur V_2 . Nous dirons que H est une conjugaison de (V_1, \mathcal{F}_1) sur (V_2, \mathcal{F}_2) si H est un homéomorphisme de V_1 sur V_2 et si H envoie les feuilles de \mathcal{F}_1 sur les feuilles de \mathcal{F}_2 . Nous dirons alors que (V_1, \mathcal{F}_1) et (V_2, \mathcal{F}_2) sont conjuguées. Les résultats rappelés auparavant montrent alors que l'on peut se limiter à la recherche des classes de conjugaison des "feuilletages de Reeb" sur les variétés $D^2 \times S^1$, $T^2 \times [0, 1]$, T^3 .

Dans [4], Novikov a montré que $(D^2 \times S^1, \mathcal{F})$ est conjugué à $(D^2 \times S^1, \mathcal{F}_{\text{REEB}})$ où \mathcal{F} est un "feuilletage de Reeb" de $D^2 \times S^1$ et $\mathcal{F}_{\text{REEB}}$ est le feuilletage classique de Reeb [5] ; ce qui justifie la terminologie.

Le cas de T^3 est examiné dans (8).

Nous montrerons ici que les feuilletages de $T^2 \times [0, 1]$ sont conjugués à des feuilletages donnés par les orbites d'actions de \mathbf{R}^2 , localement libres que nous définissons dans le paragraphe suivant.

Définition des actions Φ_α^0 et Φ_α^1 de \mathbb{R}^2 sur $T^2 \times [0, 1]$.

Sur $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$, nous définissons d'abord les champs de vecteurs suivants :

$$X^0 = (\cos(2\pi x(1-x)), 0, \sin 2\pi x(1-x))$$

$$X^1 = (1, 0, \sin 2\pi x(1-x))$$

$$Y^0 = (1, \alpha, 0)$$

$$Y^1 = (1, \alpha, 0)$$

(Nous avons pris x dans $[0, 1]$ et α irrationnel).

On vérifie immédiatement que $[X^0, Y^0] = [X^1, Y^1] = 0$. Les champs définis ci-dessus sont invariants par le groupe engendré par les translations

$$\tau_1 : (y, z, x) \mapsto (y + 1, z, x) \text{ et } \tau_2 : (y, z, x) \mapsto (y, z + 1, x).$$

Par passage au quotient, nous avons ainsi défini des actions Φ_α^0 et Φ_α^1 , localement libres, sur $T^2 \times [0, 1]$. α étant irrationnel, celles-ci induisent bien "un feuilletage de Reeb", les feuilles planes étant d'ailleurs partout denses.

Nous énonçons maintenant la proposition démontrée ici

PROPOSITION. — Soit $(T^2 \times [0, 1], \mathfrak{F})$ un feuilletage de Reeb de $T^2 \times [0, 1]$. Il existe i et α ($i \in \{0, 1\}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) tel que $(T^2 \times [0, 1], \mathfrak{F})$ soit conjugué à $(T^2 \times [0, 1], \Phi_\alpha^i)$.

D'autre part, si $H : T^2 \times [0, 1] \rightarrow T^2 \times [0, 1]$ est une conjugaison, homotope à l'identité de $(T^2 \times [0, 1], \Phi_\alpha^i)$ sur $(T^2 \times [0, 1], \Phi_{\alpha'}^{i'})$, alors $i = i'$ et $\alpha = \alpha'$.

Les lemmes qui suivent vont permettre de prouver la proposition énoncée.

LEMME 1. — Soit $(T^2 \times [0, 1], \mathfrak{F})$ un feuilletage de Reeb de $T^2 \times [0, 1]$. Il existe deux tores T' et T'' satisfaisant aux conditions suivantes :

a) T' et T'' sont transverses à \mathfrak{F} et isotopes à $T^2 \times (0)$. Ils sont de plus transverses aux "rayons" $(\theta) \times (\theta') \times [0, 1]$.

b) Si W désigne la variété (difféomorphe à $T^2 \times [0, 1]$) bordée par T' et T'' , les rayons $(\theta) \times (\theta') \times [0, 1]$ sont transverses à \mathfrak{F} dans le complémentaire de W .

Preuve. — $T^2 \times (0)$ et $T^2 \times (1)$ étant des feuilles compactes, il résulte de la définition même des feuilletages que l'on peut trouver, deux voisinages tubulaires U_0 et U_1 de $T^2 \times (0)$ et $T^2 \times (1)$ respectivement, tels que les rayons $(\theta) \times (\theta') \times [0, 1]$ soient transverses à \mathcal{F} dans U_0 et U_1 . Soient x_0 un élément de $S^1 \times (0) \times [0, 1] \cap U_0$ et $\rho_{x_0} = (\theta_0) \times (0) \times [0, 1]$ le rayon passant par x_0 . \mathcal{F} étant transverse à l'anneau $S^1 \times (0) \times [0, 1]$ dans U_0 , le feuilletage induit sur cet anneau est donné par les orbites d'un champ X sans singularités. Nous pouvons supposer choisi X de telle sorte que l'orbite positive $\Omega^+(x_0)$ de x_0 rencontre ρ_{x_0} en un point x'_0 de $S^1 \times (0) \times [0, 1] \cap U_0$. L'arc $\sigma_{x_0 x'_0} \subset \Omega^+(x_0)$ permet alors, par un procédé classique de construire un cercle C_0 de classe C^2 , contenu dans $A \cap U_0$, transverse à \mathcal{F} et aux rayons $(\theta) \times (0) \times [0, 1]$. (cf. fig. 1).

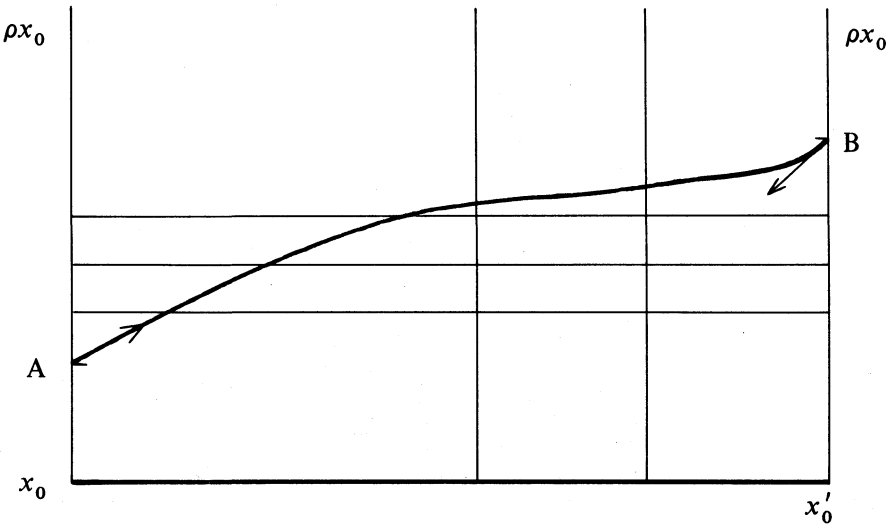


Figure 1

(Dans la figure 1, A est identifié avec B).

Pour chaque rayon $(\theta) \times (0) \times [0, 1]$, soit f_θ le difféomorphisme d'holonomie associé au générateur d'homotopie α de $(\theta) \times S^1 \times (0)$ celui-ci étant choisi de telle sorte que f_θ soit contractant. Si x est dans $S^1 \times (0) \times [0, 1] \cap U_0$, $f(x)$ est différent de x et appartient à $S^1 \times (0) \times [0, 1] \cap U_0$. Appelons γ_x le chemin relèvement de α au point x . γ_x a donc x et $f(x)$ pour extrémités et $\Gamma = \bigcup_{x \in C_0} \gamma_x$ est un

cylindre tel que $\partial\Gamma \subset S^1 \times (0) \times [0, 1] \cap U_0$. Nous pouvons alors utiliser le procédé précédent et construire une courbe fermée C_x de classe C^2 , contenue dans $(\theta) \times S^1 \times [0, 1] \cap U_0$, transverse à \mathcal{F} et aux rayons $(\theta) \times (\theta') \times [0, 1]$; $T' = \bigcup_{x \in C_0} C_x$ est alors un tore satisfaisant aux conditions du lemme.

On peut évidemment supposer que la dépendance en x de la famille de plongements $(C_x)_{x \in C_0}$ est de classe C^2 de telle sorte que T' est un plongement de T^2 de classe C^2 . La construction de T'' est évidemment identique.

Remarque. — $\mathcal{F} \cap T''$ et $\mathcal{F} \cap T'$ sont des feuilletages sans singularités du tore. Soit Ω un ensemble minimal pour $\mathcal{F} \cap T'$. D'après [2], $\Omega = T'$ ou $\Omega = C$ où C est une orbite compacte. C ne peut être homotope à zéro car il y aurait une singularité pour $\mathcal{F} \cap T'$; C borde un disque sur sa feuille et donc dans T' puisque l'application

$$\bar{i} : \pi_1(T') \rightarrow \pi_1(T^2 \times [0, 1])$$

est injective. L'hypothèse $\Omega = C$ est donc à rejeter. Ω est donc T' tout entier (resp $\Omega = T''$) et $\mathcal{F} \cap T'$ (resp $\mathcal{F} \cap T''$) est un feuilletage C^2 du tore. Il existe donc α' , $\alpha' \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ tel que $\mathcal{F} \cap T'$ (resp α'' tel que $\mathcal{F} \cap T''$) soit conjugué au "flot de Denjoy" sur T^2 donné par le champ $(1, \alpha)$.

Rappelons maintenant le lemme suivant (démontré en détail dans [6] ou [8]).

LEMME 2. — Soit (V, Φ) un feuilletage par plans d'une variété à bord, orientable, de dimension 3. Soit A une sous-variété de V , diffeomorphe à $S^1 \times [0, 1]$, telle que $\partial A \subset \partial V$ et A transverse à ∂V , l'inclusion $i : A \subset V$ induisant une injection $\bar{i} : \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(V)$.

Alors il existe une isotopie de A , laissant fixe un voisinage de ∂A et qui rend A transverse aux feuilles de \mathcal{F} .

Remarque. — Etudions le feuilletage induit par \mathcal{F} sur l'anneau A \mathcal{F} étant transverse à A et C^2 transversalement orientable, $\mathcal{F} \cap A$ est donné par les orbites d'un champ de vecteurs X , sans singularités. Le théorème de Poincaré-Bendixon [3] nous apprend qu'elles sont constituées de plongements de droites et de cercles, les ensembles-limites

des trajectoires étant des cercles. S'il existe une orbite compacte à l'intérieur de A , celle-ci porte de l'holonomie : ce qui est impossible puisque les feuilles sont simplement connexes. L'intérieur de A ne possède aucune orbite compacte et les cercles C_0 et C_1 du bord de A sont les seuls ensembles limites des orbites de X . Nous supposons désormais que $A = S^1 \times (0) \times [0, 1]$ et que X est choisi tel que l'ensemble ω^+ -limite des orbites est $S^1 \times (0) \times (0)$ (resp. l'ensemble ω^- -limite est $S^1 \times (0) \times (1)$).

LEMME 3. — *Les notations et les hypothèses étant celles des deux lemmes précédents, il existe sur W un champ Y , tangent aux feuilles de \mathcal{F} satisfaisant à la condition suivante :*

a) Si $(t, x) \mapsto Y(t, x)$ pour x dans W et t dans \mathbf{R} , désigne l'action de \mathbf{R} induite sur W par Y , alors $Y(1, T') = \bigcup_{x \in T'} Y(1, x) = T''$.

b) Y conjugue donc $(T', \mathcal{F} \cap T')$ et $(T'', \mathcal{F} \cap T'')$ et en particulier $\alpha' = \alpha''$.

Preuve. — $S^1 \times (0) \times [0, 1]$ étant transverse à \mathcal{F} , nous coupons W par $S^1 \times (0) \times [0, 1] \cap W$ et obtenons ainsi une variété W' , difféomorphe à $S^1 \times [0, 1] \times [0, 1]$ et munie d'un feuilletage transverse aux bords. Montrons que ce feuilletage est conjugué au feuilletage

$$(S^1 \times [0, 1] \times [0, 1], \bigcup_{\theta \in S^1} (\theta) \times [0, 1] \times [0, 1]).$$

En arrondissant les angles, nous pouvons supposer qu'il s'agit d'un feuilletage de $D^2 \times S^1$, transverse aux bords. Le feuilletage induit sur le bord est composé de droites ou de cercles ne portant pas d'holonomie, de sorte que s'il comporte un cercle, il comporte uniquement des cercles. Supposons qu'il n'y ait aucun cercle. Toutes les feuilles sont alors des droites. Le cercle $\partial D^2 \times (0)$ est un générateur de $\pi_1(\partial(D^2 \times S^1))$ et est homotope à zéro dans $D^2 \times S^1$. En utilisant l'analogie, en dimension 2, du lemme 1 (c'est alors en fait le lemme de Denjoy pour le tore), on peut le supposer transverse à toutes les droites en éliminant les singularités. $\partial D^2 \times (0)$ est ainsi transverse aux feuilles de $D^2 \times S^1$, (qui sont simplement connexes) et est homotope à zéro dans $D^2 \times S^1$. Ceci contredit le théorème de Haefliger [2]. Le feuilletage induit sur le bord est donc constitué de cercles. Ces cercles bordent un disque dans leur famille. Prenons un cercle qui borde un

disque D tel $\text{int } D \cap \partial W' = \emptyset$. Montrons que $\text{int } D \subset W'$. Dans le cas contraire, il existerait dans $\overline{C_{W'}}$, une feuille compacte simplement connexe i.e. D . En appliquant le théorème de stabilité de Reeb, $\overline{C_{W'}}$ serait homéomorphe à $D \times S^1$ ce qui est impossible.

Prenant alors un champ d'orientation de classe C^2 , il est alors facile de construire une conjugaison (de classe C^2) de ce feuilletage sur le feuilletage naturel $(D^2 \times S^1, \bigcup_{\theta \in S^1} D^2 \times \{0\})$. $(W', \mathfrak{F} \cap W')$ est donc C^2 conjugué à $(S^1 \times [0, 1] \times [0, 1], \bigcup_{\theta \in S^1} (\theta) \times [0, 1] \times [0, 1])$.

On construit ensuite sur W' un champ Y , tangent aux feuilles, tel que $Y(T', 1) = T''$. D'autre part, Y peut être choisi de telle sorte qu'il "passe au quotient" lors de l'identification qui permet d'obtenir W à partir de W' .

LEMME 4. — Soit G le groupe des germes de difféomorphismes de classe C^2 de \mathbb{R}^+ , laissant fixe l'origine et χ une représentation de $\pi_1(T^2)$ dans G vérifiant les hypothèses suivantes :

a) $\chi(a)(x_0) = x_0$, où $x_0 \neq 0$ entraîne $a = 0$ dans $\Pi_1(T^2)$.

b) il existe deux générateurs a_1 et a_2 de $\pi_1(T^2)$ tels que $\chi(a_1)$ et $\chi(a_2)$ soient contractants (i.e. il existe des représentants f_1 et f_2 de $\chi(a_1)$ et $\chi(a_2)$ tels que $f_1(x) < x$ et $f_2(x) < x$ si $x > 0$). (Ce sera le cas de la représentation d'holonomie des feuilles compactes de \mathfrak{F} car les feuilles ouvertes sont simplement connexes).

Alors, il existe H , germe d'homéomorphisme de \mathbb{R}^+ conservant l'origine et $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}$ tels que

$$\chi(a_1) = H\rho_\alpha H^{-1}$$

$$\chi(a_2) = H\rho_1 H^{-1}$$

où ρ_1 et ρ_α désignent les classes dans G des homographies :

$$x \mapsto \frac{x}{x+1} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{x}{\alpha x+1}.$$

Preuve. — Désignons par $\tau, \tau_\alpha, \sigma$ respectivement les applications $x \mapsto x+1, x \mapsto x+\alpha, x \mapsto \frac{1}{x}$ et par f_1 et f_2 deux représentants de $\chi(a_1)$ et $\chi(a_2)$. L'hypothèse b) du lemme montre alors que $\sigma f_2 \sigma^{-1}$

est un difféomorphisme C^2 , défini sur un voisinage U de $+\infty$ et tel que $f_2^n(x) \rightarrow +\infty$ si $n \rightarrow +\infty$. On construit alors facilement un difféomorphisme h , de classe C^2 tel que $\sigma f_2 \sigma^{-1} = h^{-1} \tau h$. (On définit h sur $[x, f(x)]$ où $x \in U$, avec les relations de compatibilité nécessaires pour l'extension de h sur $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} [f^p(x), f^{p+1}(x)]$). D'autre part, f_1 et f_2 commutent, $h \sigma f_1 \sigma^{-1} h^{-1}$ commute avec τ ce qui montre que $h \sigma f_1 \sigma^{-1} h^{-1}$ induit un difféomorphisme φ , C^2 sur S^1 .

On remarque que φ est sans points périodiques. Un calcul simple montre en effet qu'un tel point implique l'existence d'un entier m tel que $f_1(x_0) = f_2^m(x_0)$ (avec $x_0 > 0$). Ceci contredit l'hypothèse a).

La classification de Denjoy [1] permet alors d'affirmer que φ est conjugué à une rotation r_α d'angle irrationnel. En relevant dans U , on écrit alors :

$$(h\sigma) f_1 (\sigma^{-1} h^{-1}) = h' \tau_\alpha h'^{-1}$$

où h' est le relèvement d'un homéomorphisme de S^1 (commutant donc avec τ) et τ_α la translation relèvement de r_α . Il vient finalement :

$$(1) \quad \begin{aligned} f_2 &= (\sigma^{-1} h^{-1} h') \tau (h'^{-1} h \sigma) \\ f_1 &= (\sigma^{-1} h^{-1} h') \tau_\alpha (h'^{-1} h \sigma) . \end{aligned}$$

En faisant apparaître les facteurs $\sigma \tau \sigma^{-1}$ et $\sigma \tau_\alpha \sigma^{-1}$, on en déduit la réduction canonique du lemme.

Interprétation de α . — Soient x'_0 , t strictement positifs, appartenant au domaine de définition de f_1 et f_2 . Comme $f_1^m(x'_0)$ et $f_2^{m'}(x'_0)$ tendent vers 0 lorsque m et m' tendent vers $+\infty$, on peut définir

$$M_1(x'_0, t) = \inf_{m \in \mathbb{N}} f_1^m(x'_0) \leq t$$

$$M_2(x'_0, t) = \inf_{m' \in \mathbb{N}} f_2^{m'}(x'_0) \leq t$$

La formule (1) montre alors que :

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{M_2(t, x'_0)}{M_1(t, x'_0)}$$

LEMME 5. — *Gardant les notations précédentes, nous dirons que deux représentations χ et χ' sont conjuguées s'il existe un élément H*

du groupe des germes d'homéomorphisme de \mathbf{R}^+ conservant l'origine tel que

$$H\chi(a)H^{-1} = \chi'(a) \quad \text{avec} \quad a \in \pi_1(\mathbf{T}^2)$$

(resp. χ et χ' sont transposées si $H\chi(a)H^{-1} = [\chi'(a)]^{-1}$).

Nous montrons maintenant que si χ_0 et χ_1 désignent les représentations d'holonomie associées à $\mathbf{T}^2 \times (0)$ et $\mathbf{T}^2 \times (1)$, χ_0 et χ_1 sont conjuguées ou transposées.

Preuve. — Nous poserons dans toute la suite

$$\begin{aligned} x_0 &= (0) \times (0) \times (0) \quad , \quad x'_0 = (0) \times (0) \times [0, 1] \cap \mathbf{T}' \quad , \\ (0) \times (0) \times (1) &= x_1 \quad , \quad x'_1 = (0) \times (0) \times [0, 1] \cap \mathbf{T}'' \quad . \end{aligned}$$

S est le chemin d'origine x_0 et d'extrémité x_1 , S_0 le chemin d'origine x_0 et d'extrémité x'_0 .

Il existe des générateurs e_1 et e_2 de $\pi_1(S_1 \times (0) \times (0), x_0)$ et $\pi_1((0) \times S^1 \times (0), x_0)$ tels que $\chi_0(e_1)$ et $\chi_0(e_2)$ soient tous deux contractants. En utilisant l'orientation, il est facile de voir que

$$\chi_1(S e_1 S^{-1}) \quad \text{et} \quad \chi_1(S e_2 S^{-1})$$

sont tous deux contractants ou tous deux dilatants. En utilisant le lemme précédent, on peut écrire

$$H_0 \chi_0(e_1) H_0^{-1} = \tau_{\alpha_0}$$

$$H_0 \chi_0(e_2) H_0^{-1} = \tau$$

$$H_1 \chi_1(e'_1) H_1^{-1} = \tau_{\alpha_1}$$

$$H_1 \chi_1(e'_2) H_1^{-1} = \tau$$

avec $e'_i = \varepsilon e_i$ ($i = 1, 2$; $\varepsilon = \pm 1$).

Nous allons montrer que $\alpha_0 = \alpha_1$, ce qui donne le résultat annoncé. Rappelons (lemme 3) que $\mathcal{F} \cap \mathbf{T}'$ et $\mathcal{F} \cap \mathbf{T}''$ sont respectivement conjugués aux feuilletages donnés par les orbites des flots de Denjoy sur \mathbf{T}^2 :

$$t \cdot (\theta e_1 + \theta' e_2) = (\theta + t) e_1 + (\theta' + \frac{\dot{\alpha}' t}{\alpha'} e_2) ;$$

$$t \cdot (\theta e_1 + \theta' e_2) = (\theta + t) e_1 + (\theta' + \frac{\dot{\alpha}'' t}{\alpha''} e_2) ,$$

et que d'ailleurs $\alpha' = \alpha''$. Il suffit donc de prouver que

$$\alpha_0 = |\alpha'| = |\alpha''| = \alpha_1 .$$

Cette égalité va résulter de l'interprétation de α_0 et α' (resp. α_1 et α'').

Soit Z le champ de vecteurs sur T^2 associé au feuilletage $\mathcal{F} \cap T'$. Construisons deux éléments C_1 et C_2 de $\pi_1(T', x'_0)$ tels que $\Gamma_i = S_0 e_i S_0^{-1}$ dans $\pi_1(T', x'_0)$ et transverses aux orbites de Z (c'est en fait le lemme 2 en dimension 2). Soit ψ le difféomorphisme

$$T^2 \times (0) \rightarrow T' : x \mapsto \psi(x) = \{x\} \times [0, 1] \cap T' .$$

Soit $E = \{s, s \in \mathbf{R}^+ \mid Z(x'_0, s) \in C_1 \cup C_2\}$. Si $s \in E$ et si $x(s)$ désigne l'extrémité de $\Psi^{-1}(Z(x'_0, s))$ il est possible de construire un chemin $\gamma_s \subset \Psi^{-1}(C_1 \cup C_2)$, $t \mapsto \gamma(t)$ avec $\gamma_s(0) = x(s)$, $\gamma_s(1) = x_0$. $\Psi^{-1}(Z(x'_0, s)) \cup \gamma_s$ est alors un élément $a(s)$ de $\pi_1(T^2 \times (0), x_0)$ qui peut s'écrire :

$$a(s) = N_1(s) e_1 + N_2(s) e_2 .$$

Le théorème de Denjoy montre alors que :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{N_2(s)}{N_1(s)} = \alpha' .$$

Maintenant, t étant choisi et les notations étant celles du lemme précédent, il existe $s(t) \in E$ tel que

$$a(s(t)) = N_1(s(t)) e_1 + N_2(s(t)) e_2 \quad \text{avec}$$

$$\varepsilon_i N_i(s(t)) = M_i(x'_0, t) \quad \varepsilon_i = \pm 1, \quad i = 1, 2 .$$

Si t tend vers 0, $s(t)$ tend vers $+\infty$ et

$$|\alpha'| = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left| \frac{N_2}{N_1} \right| (s) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{M_2}{M_1} (t, x'_0) = \alpha_0 .$$

Construction explicite de l'homéomorphisme.

La détermination des paramètres (i, α) du candidat Φ_α^i à la conjugaison s'effectue ainsi :

a) Si χ_0 est conjuguée à χ_1 , nous prenons $i = 0$ (resp. si χ_1 est la transposée de χ_0 , nous prenons $i = 1$).

b) Soient e_1 et e_2 , les courbes fermées dans

$$T^2 = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \quad t \mapsto (t, \dot{0}) \quad \text{et} \quad t \mapsto (\dot{0}, t).$$

Ce sont des générateurs canoniques de $\pi_1(T^2)$. Il existe ε_i ($i = 1, 2$) tels que les $\chi_0(\varepsilon_i e_i)$ soient contractants. On peut alors écrire (notations du lemme 4)

$$\begin{aligned} H^{-1} \chi_0(\varepsilon_1 e_1) H &= \rho_\beta \\ H^{-1} \chi_0(\varepsilon_2 e_2) H &= \rho_1 \end{aligned} \quad \beta \in \mathbf{R}^+ - \mathbf{Q}$$

Nous choisissons alors $\alpha = -\beta$.

Ces choix sont justifiés par la considération géométrique suivante ; retournant à la définition des Φ_α^i , on voit que le feuilletage induit sur les tores $T^2 \times \{x\}$, $0 < x < 1$, est le feuilletage des orbites du flot de Denjoy : $t \cdot (\theta e_1 + \theta' e_2) = (\theta + t) e_1 + (\theta' + \dot{\alpha} t) e_2$. De plus, si $\chi_j^{(\alpha, i)}$ ($i = 0, 1$) ($j = 0, 1$) désigne la représentation d'holonomie de $T^2 \times \{j\}$ associée à Φ_α^i la construction (p. 3) des Φ_α^i montre que $\chi_0^{(\alpha, 1)}(e_1)$ et $\chi_0^{(\alpha, 1)}(e_2)$ sont contractants si $\alpha < 0$. $\chi_1^{(\alpha, i)}(e_1)$ et $\chi_1^{(\alpha, i)}(e_2)$ sont alors contractants ou dilatants selon que $i = 0$ ou 1. Ces remarques et le lemme 5 permettent d'écrire si $\alpha < 0$.

$$\begin{aligned} H'^{-1} \chi_0^\alpha(e_1) H' &= \rho_{-\alpha} \\ H'^{-1} \chi_0^\alpha(e_2) H' &= \rho_1 \\ H''^{-1} \chi_1^\alpha((-1)^i e_1) H'' &= \rho_{-\alpha} \\ H''^{-1} \chi_1^\alpha((-1)^i e_2) H'' &= \rho_1 \end{aligned}$$

(avec $i = 0$ ou 1).

Le choix des paramètres permet alors de trouver H_0 et H_1 tels que :

$$\begin{aligned} (2) \quad H_0^{-1} \chi_0(\varepsilon_k e_k) H_0 &= \chi_0^{(\alpha, i)}(e_k) \\ H_1^{-1} \chi_1(\varepsilon_k e_k) H_1 &= \chi_1^{(\alpha, i)}(e_k). \end{aligned}$$

(2) va permettre de construire la conjugaison dans U_0 et U_1 .

a) Construction dans U_0 et U_1 .

Sur $T^2 \times (0)$, H est un homéomorphisme du tore tel que $H(\varepsilon_k e_k) = e_k$ avec $H(x_0) = (0) \times (0) \times (0)$.

Sur S_0 (notations du lemme 5), la formule (2) exprime en particulier que l'on peut trouver un homéomorphisme h'' de \mathbf{R}^+ avec $h''(0) = 0$, tel que $h''[S_0] = [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, h'' conjuguant les difféomorphismes d'holonomie. Nous prenons alors $H = h''$ sur S_0 .

Soit maintenant x quelconque dans U_0 , x s'écrit $(\theta) \times (\theta') \times (\lambda)$ [θ et θ' calculés sur e_1 et e_2]. Soit γ le chemin de

$$T^2 \times (0) : t \mapsto (\overline{\theta t}, \overline{\theta' t}, 0).$$

γ est d'origine x_0 et d'extrémité $(\theta, \theta', 0)$. Il existe sur S_0 , un seul point $\pi(x)$ tel que le chemin γ' , relevé par holonomie du chemin γ en $\pi(x)$, ait pour origine $\pi(x)$ et x pour extrémité (cf. fig. 2). H a un sens en $\pi(x) \in S_0$, $H(x)$ est alors défini comme l'extrémité du relèvement du chemin $H(\gamma)$ au point $H(\pi(x))$.

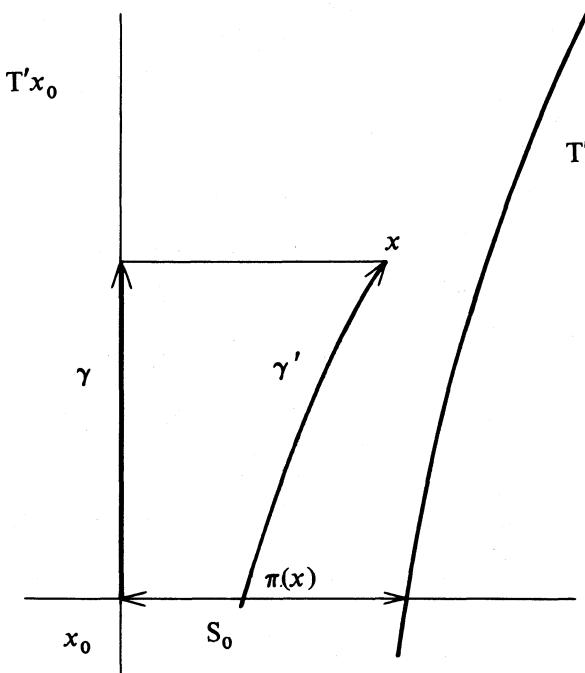


Figure 2

Nous procédons de façon tout à fait identique dans U_1 . H , ainsi défini, est bijectif (c'est évident) et continu car h'' conjugue les difféomorphismes d'holonomie.

b) Construction dans W .

H étant défini sur T' , la conjugaison est immédiate dans W car nous disposons du champ Y du lemme 3. Les définitions de H sur T'' (par le relèvement d'holonomie et par Y) différant d'un homéomorphisme homotope à l'identité, il est possible en modifiant Y (sans renoncer aux propriétés du lemme 3) de les rendre compatibles.

Ceci termine la première partie de la proposition de la page 2. La deuxième partie se montre immédiatement. Il suffit de remarquer qu'une conjugaison de feuilletage induit une conjugaison des holonomies au sens du lemme 5. L'interprétation des paramètres i et α (lemme 5) conduit alors au résultat.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DENJOY, Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *Journal de Math.* 11 (1932).
- [2] HAEFLIGER, Variétés feuilletées — *Annales E.N.* série 3-16 (1962).
- [3] HARTMANN, Ordinary differential equations.
- [4] NOVIKOV, Topology of foliations, *Trudy Mosk. Maths.* 14-513-83.
- [5] REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. Hermann.
- [6] ROSENBERG, Foliations by planes, *Topology* 7 (1968).
- [7] ROSENBERG-ROUSSARIE, Reeb Foliations, *Annals of maths.* (1970) 1-25.
- [8] ROSENBERG-ROUSSARIE, Topological equivalence of Reeb foliations (*Topology* Vol. 9, 231-242-(1970).
- [9] R. ROUSSARIE, Thèse, Faculté des Sciences d'Orsay (Nov. 69).

Manuscrit reçu le 1^{er} décembre 1970

G. CHATELET et H. ROSENBERG
 Département de Mathématiques
 91 — ORSAY