

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HOWARD OSBORN

## **La géométrie différentielle dans la catégorie $PL$**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 23, n° 2 (1973), p. 127-134

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1973\\_\\_23\\_2\\_127\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_2_127_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DANS LA CATÉGORIE PL

par Howard OSBORN

Dans le sens global la géométrie différentielle d'une variété  $V$  du type  $C^\infty$  consiste en l'étude des  $C^\infty(V)$ -modules qui s'attachent aux fibrés vectoriels sur  $V$ : à l'aide de la construction de Chern et de Weil on obtient les classes caractéristiques des  $C^\infty(V)$ -modules, à valeurs dans la cohomologie de de Rham, et on y trouve de tels résultats que le théorème de Gauss-Bonnet, la formule de l'indice de Hirzebruch, etc. Est-ce qu'on peut faire une étude analogue dans le cas d'une variété  $M$  du type PL (linéaire par morceaux)? Voilà le but de cette conférence. (Voir [1], [2], [3], [4] pour d'autres exposés qui se rapportent au même sujet.)

Soit  $M$  une variété du type PL. Alors, l'algèbre  $A(M)$  de [1], analogue à l'algèbre  $C^\infty(V)$ , consiste en fonctions continues  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifient une condition locale en chaque  $P \in M$ . Dans ce qui suit il suffit de considérer le cas  $M = \mathbb{R}^n$ , le point  $P \in M$  étant l'origine  $0 \in \mathbb{R}^n$ .

Soient  $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}^n$  les 0-simplexes d'une triangulation de  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ , et pour chaque simplexe  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$  soit  $\{x_{i_1}e_{i_1} + \dots + x_{i_p}e_{i_p} \mid x_{i_1} > 0, \dots, x_{i_p} > 0\}$  le coin qui en résulte. La réunion de ces coins est précisément  $\mathbb{R}^n$ , et une telle partition de  $\mathbb{R}^n$  en coins sera notée  $\alpha$ .

Il y a un difféomorphisme  $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  à valeurs  $\varphi(x) = \exp \sinh \ln x$ , dont  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi^{(q)}(x) = 0$  pour chaque dérivée  $\varphi^{(q)}$ . Les applications composées  $\varphi_N = \varphi \circ \dots \circ \varphi$  ( $N$  fois) vérifient les mêmes conditions: chaque  $\varphi_N$  est un difféomorphisme  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi_N^{(q)}(x) = 0$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$ . Alors, si l'on se donne une partition  $\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  en coins et un entier  $N \geq 0$ , il existe un homéo-

morphisme  $\Phi_{\alpha, N}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  à valeurs

$$\Phi_{\alpha, N}(x_i e_i + \dots + x_p e_p) = \varphi_N(x_i) e_i + \dots + \varphi_N(x_p) e_p$$

en chaque coin. D'ailleurs, quoique  $\Phi_{\alpha, N}$  soit partout lisse, son inverse  $\Phi_{\alpha, N}^{-1}$  ne l'est pas.

**DÉFINITION.** — Une fonction continue  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est lissable en  $O \in \mathbb{R}^n$  s'il existe une partition  $\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  en coins et un entier  $N \geq 0$  tels que le germe en  $O$  de  $f \circ \Phi_{\alpha, N}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  soit le germe d'une fonction du type  $C^\infty$ .

Soient  $\alpha$  et  $\alpha'$  deux partitions de  $\mathbb{R}^n$  en coins, telles que  $\alpha'$  soit plus fine que  $\alpha$ , et soit  $N' > N$ . On peut démontrer que l'homéomorphisme  $\Phi_{\alpha, N}^{-1} \circ \Phi_{\alpha', N'}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est lisse, bien que son inverse ne le soit pas. Il s'ensuit que si  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont lissables en  $O$  il en est de même des  $f + g$  et  $fg$ . De plus, si  $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un homéomorphisme du type PL tel que  $\Psi(0) = 0$ , alors  $f \circ \Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est lissable en  $O$  si et seulement si  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  l'est aussi. Donc, si l'on se donne un point  $P$  d'une variété quelconque  $M$  du type PL, on peut considérer l'algèbre de fonctions  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  lissables en  $P$ .

**DÉFINITION.** — L'algèbre  $A(M)$  de fonctions lissables sur une variété  $M$  du type PL consiste en toute fonction  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  qui est lissable en chaque point  $P \in M$ .

Si l'on note par  $A_{\alpha, N}$  l'algèbre de germes en  $O$  des fonctions  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f \circ \Phi_{\alpha, N}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  soient lisses, on peut regarder  $\Phi_{\alpha, N}$  comme isomorphisme  $A_{\alpha, N} \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)_0$ . Donc il existe une dérivation évidente  $d_{\alpha, N}: A_{\alpha, N} \rightarrow E_{\alpha, N}$  à valeurs dans un  $A_{\alpha, N}$ -module  $E_{\alpha, N}$  libre de rang  $n$ . De plus, puisque l'application composée  $\Phi_{\alpha, N}^{-1} \circ \Phi_{\alpha', N'}$  entraîne un monomorphisme  $\rho(\alpha', N'; \alpha, N): A_{\alpha, N} \rightarrow A_{\alpha', N'}$  chaque fois que  $\alpha'$  est plus fine que  $\alpha$  et  $N' > N$ , on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_{\alpha, N} & \xrightarrow{\rho(\alpha', N'; \alpha, N)} & A_{\alpha', N'} \\ d_{\alpha, N} \downarrow & & \downarrow d_{\alpha', N'} \\ E_{\alpha, N} & \xrightarrow{\sigma(\alpha', N'; \alpha, N)} & E_{\alpha', N'} \end{array}$$

l'application  $\sigma(\alpha', N'; \alpha, N)$  étant l'application jacobienne de  $\Phi_{\alpha, N}^{-1} \cdot \Phi_{\alpha', N'}$ . Or, la limite inductive  $\lim_{\alpha, N} A_{\alpha, N}$  est l'algèbre  $A(\mathbb{R}^n)_0$  de germes des fonctions lissables en  $O \in \mathbb{R}^n$ , et par ce moyen-ci on définit une dérivation  $d_0$  :

$$A(\mathbb{R}^n)_0 \rightarrow E(\mathbb{R}^n)_0$$

de  $A(\mathbb{R}^n)_0$  dans un  $A(\mathbb{R}^n)_0$ -module  $E(\mathbb{R}^n)_0 = \lim_{\alpha, N} E_{\alpha, N}$ . En outre, cette dérivation s'étend à un complexe

$$(\Lambda_{A(\mathbb{R}^n)_0} E(\mathbb{R}^n)_0, d_0).$$

Notons par  $R_{\alpha, N}^n$  la source de l'homéomorphisme  $\Phi_{\alpha, N}$ . Alors on peut regarder  $A(\mathbb{R}^n)_0$  et  $E(\mathbb{R}^n)_0$  comme limites inductives  $\lim_{\alpha, N} C^\infty(R_{\alpha, N}^n)_0$  et  $\lim_{\alpha, N} E(C^\infty(R_{\alpha, N}^n))_0$ , et il s'ensuit du lemme de Poincaré que  $(\Lambda_{A(\mathbb{R}^n)_0} E(\mathbb{R}^n)_0, d_0)$  est acyclique; c'est-à-dire, le lemme de Poincaré est également valable dans le cas PL. De plus, si l'on se donne une variété  $M$  quelconque du type PL on peut construire une dérivation évidente  $d$  :  $A(M) \rightarrow E(M)$  dont les dérivations localisées sont de la forme  $d_0 : A(\mathbb{R}^n)_0 \rightarrow E(\mathbb{R}^n)_0$ , ce qui implique l'existence d'un complexe  $(\Lambda_{A(M)} E(M), d)$  de de Rham.

**PROPOSITION.** — *L'homologie du complexe  $(\Lambda_{A(M)} E(M), d)$  est isomorphe à  $H^*(M; \mathbb{R})$ .*

*Démonstration* (Voir [1]). — L'existence des partitions  $\{h_i\}$  de l'unité sur  $M$  est évidente, les fonctions  $h_i$  étant membres de  $A(M)$ , et on se sert du lemme de Poincaré comme d'habitude.

Au lieu de l'algèbre  $A(M)$  des fonctions lissables sur  $M$  on peut également considérer le faisceau  $\mathcal{A}(M)$  de germes de cette algèbre, dont  $A(M) = \Gamma(\mathcal{A}(M))$ . En effet, la bonne définition du module  $E(M)$  utilise un faisceau  $\mathcal{E}(M)$  analogue de modules sur  $\mathcal{A}(M)$ , dont  $E(M) = \Gamma(\mathcal{E}(M))$ . (En outre, la bonne construction d'un tel faisceau se fait par moyen d'un « antéfaisceau »; voir [2] et [4]. Toutefois, la plupart de la définition de  $\mathcal{E}(M)$  se fait par la donnée du module  $E(\mathbb{R}^n)_0$  sur  $A(\mathbb{R}^n)_0$ .)

De la même manière on introduit un faisceau  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}(M)$

d'algèbres sur  $M$  par la donnée d'une algèbre  $S^{-1}A(\mathbb{R}^n)_0$  sur  $A(\mathbb{R}^n)_0$ . Soit  $S(\mathbb{R}^n)_0$  le sous-ensemble multiplicatif de  $A(\mathbb{R}^n)_0$  engendré par les déterminants jacobiens

$$\det(\sigma(\alpha', N'; \alpha, N)),$$

et soit  $S^{-1}A(\mathbb{R}^n)_0$  l'anneau  $S(\mathbb{R}^n)_0^{-1}A(\mathbb{R}^n)_0$  de fractions qui en résulte. Pour un faisceau  $\mathcal{F}$  quelconque de modules sur le faisceau  $\mathcal{A}(M)$  la définition analogue du faisceau  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{F}$  de modules sur  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}(M)$  est évidente, et on note par  $[\mathcal{F}]$  la classe d'équivalence du faisceau  $\mathcal{F}$  par rapport à la relation suivante:  $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$  veut dire que  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{F}$  et  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{G}$  sont isomorphes en tant que faisceaux de modules sur  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}(M)$ .

**DÉFINITION.** — Soient  $M$  une variété du type PL et  $\mathcal{F}$  un faisceau de modules sur  $\mathcal{A}(M)$  de sorte que  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{F}$  soit localement libre sur  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}(M)$ . Dans ce cas-là, la classe  $[\mathcal{F}]$  d'équivalence est une classe de PL-faisceaux sur  $M$ .

Par exemple, soit  $\mathcal{E}$  un fibré vectoriel sur  $M$  et soit  $\mathcal{F}$  le  $\mathcal{A}(M)$ -module des germes de sections qui en résulte. Alors  $\mathcal{F}$  est localement libre sur  $\mathcal{A}(M)$ , et il s'ensuit que  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{F}$  est localement libre sur  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}(M)$ ; c'est-à-dire,  $[\mathcal{F}]$  est une classe de PL-faisceaux sur  $M$ . Mais il existe d'autres exemples, dont le plus important est la classe  $[\mathcal{E}(M)]$ . Bien que le faisceau  $\mathcal{E}(M)$  ne soit jamais localement libre sur  $\mathcal{A}(M)$ , on montre facilement que  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{E}(M)$  est localement libre sur  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}(M)$ ; donc  $[\mathcal{E}(M)]$  est une classe de PL-faisceaux sur  $M$ , lui aussi.

Les classes de PL-faisceaux forment une catégorie fibrée sur la catégorie des variétés  $M$  du type PL, analogue à la catégorie des fibrés vectoriels sur la catégorie des variétés  $V$  du type  $C^\infty$ . De plus, selon la remarque précédente chaque variété  $M$  possède un objet tangent  $[\mathcal{E}(M)]$  qui joue un rôle analogue au rôle du fibré tangent  $\tau_V$  d'une variété  $V$  du type  $C^\infty$ .

Maintenant soient

$$S^{-1}A(M) = \Gamma(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}(M)) \quad \text{et} \quad S^{-1}E(M) = (\mathcal{S}^{-1}\mathcal{E}(M)),$$

$M$  étant une variété quelconque du type PL. Alors la déri-

vation  $d: A(M) \rightarrow E(M)$  entraîne une dérivation  $d$ :

$$S^{-1}A(M) \rightarrow S^{-1}E(M)$$

qui s'étend à un complexe modifié de de Rham

$$(\Lambda_{S^{-1}A(M)}S^{-1}E(M), d).$$

PROPOSITION (théorème modifié de de Rham). — Sauf en dimensions 0 et 1 l'homologie du complexe

$$(\Lambda_{S^{-1}A(M)}S^{-1}E(M), d)$$

est isomorphe à  $H^*(M; R)$ .

Ce résultat nous amène à la construction des classes caractéristiques qui s'attachent aux classes  $[\mathcal{F}]$  de PL-faisceaux sur une variété  $M$ . Rappelons d'abord l'existence des partitions de l'unité sur  $M$  et le fait que  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{F}$  est localement libre sur  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}(M)$  pour toute classe  $[\mathcal{F}]$  de PL-faisceaux. Il s'ensuit pour le  $S^{-1}A(M)$ -module  $S^{-1}F = \Gamma(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{F})$  qu'on peut construire un produit

$$\langle, \rangle: S^{-1}F \otimes_{S^{-1}A(M)} S^{-1}F \rightarrow S^{-1}A(M),$$

symétrique et non-dégénéré, ainsi qu'une connexion

$$D: S^{-1}F \rightarrow S^{-1}E(M) \otimes S^{-1}F$$

vérifiant la règle  $\langle Ds, t \rangle + \langle s, Dt \rangle = d\langle s, t \rangle$ .

Soit  $\underline{F}$  le  $\Lambda S^{-1}E(M)$ -module  $\Lambda S^{-1}E(M) \otimes_{S^{-1}A(M)} S^{-1}F$  à gauche. Alors le produit  $\langle, \rangle$  s'étend à un produit

$$\langle, \rangle: \underline{F} \otimes \underline{F} \rightarrow \Lambda S^{-1}E(M)$$

dans le sens évident, et la connexion  $D$  s'étend à une application  $D: \underline{F} \rightarrow \underline{F}$  linéaire sur  $R$  vérifiant les règles

$$D(\theta \cdot u) = d\theta \cdot u + (-1)^{p\theta} \cdot Du$$

et  $\langle Du, v \rangle + (-1)^q \langle u, Dv \rangle = d\langle u, v \rangle$

lorsque  $\theta \in \Lambda^p S^{-1}E(M)$  et  $u$  appartient à  $\Lambda^q S^{-1}E(M) \otimes S^{-1}F$ . On vérifie que l'application composée  $D \circ D$  est linéaire sur  $\Lambda S^{-1}E(M)$ : c'est l'application  $K: \underline{F} \rightarrow \underline{F}$  de courbure qui s'attache à  $D$ .

Voici une présentation algébrique de la construction de Chern et de Weil, qui ne dépend que des données du paragraphe précédent :

**PROPOSITION.** — i) L'élément  $\det \left( I - \frac{1}{2\pi} K \right) \in \Lambda S^{-1}E(M)$  est fermé.

ii) Si l'on note par  $h(M)$  la cohomologie du complexe modifié  $(\Lambda S^{-1}E(M), d)$  de de Rham, alors  $\left[ \det \left( I - \frac{1}{2\pi} K \right) \right] \in h^{4*}(M)$ .

iii) La classe  $\left[ \det \left( I - \frac{1}{2\pi} K \right) \right]$  est indépendante du choix de  $D$ .

*Démonstration.* — Voir [4].

Il en résulte les classes  $p([\mathcal{F}])$  de Pontrjagin qui s'attachent à chaque  $[\mathcal{F}]$  :

**PROPOSITION.** — A chaque classe  $[F]$  de PL-faisceaux sur une variété  $M$  du type PL il existe une classe

$$p([\mathcal{F}]) \in H^{4*}(M; \mathbb{R})$$

vérifiant les axiomes suivants :

i) Si  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{F}$  est localement libre du rang  $n$  sur  $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}(M)$  alors  $p([\mathcal{F}]) = 1 + p_1([\mathcal{F}]) + \dots + p_{\lfloor n/2 \rfloor}([\mathcal{F}])$ , dont

$$p_j([\mathcal{F}]) \in H^{4j}(M; \mathbb{R}).$$

ii)  $p(\Xi^![\mathcal{F}]) = \Xi^*p([\mathcal{F}]) \in H^{4*}(M'; \mathbb{R})$  pour toute application  $\Xi: M' \rightarrow M$  du type PL.

iii)  $p([\mathcal{F}] \oplus [\mathcal{G}]) = p([\mathcal{F}]) \cup p([\mathcal{G}])$ .

iv) Si  $\mathcal{F}$  est le  $\mathcal{A}(M)$ -module des germes de sections d'un fibré vectoriel  $\xi$  (ce qui implique que  $[\mathcal{F}]$  est une classe de PL-faisceaux), alors  $p([\mathcal{F}])$  est la classe classique  $p(\xi)$  de Pontrjagin.

*Démonstration.* — Grâce au théorème modifié de de Rham on peut regarder  $\left[ \det \left( I - \frac{1}{2\pi} K \right) \right]$  comme élément  $p([\mathcal{F}])$  de  $H^{4*}(M; \mathbb{R})$ , et la vérification des axiomes i), ii), iii), iv) est assez facile. (Voir [4].)

Les données d'une géométrie différentielle ayant été créées dans le cas PL, on se demande s'il y a des résultats analogues aux résultats du cas classique. Voici, par exemple, le théorème de l'indice de Hirzebruch :

PROPOSITION. — Soit  $I(M)$  la signature d'une variété  $M$  du type PL et de dimension  $4n$ , compacte et orientée, et soit  $L(M)$  l'indice de Hirzebruch, construit à l'aide de la classe  $p([\mathcal{E}(M)])$  et de l'extension multiplicative de  $\frac{\sqrt{z}}{\tanh \sqrt{z}}$  d'une façon analogue à la construction classique ; alors  $I(M) = L(M)$ .

Démonstration. — (Voir [3].) Dans la suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega_q \rightarrow \Omega_q^{\text{PL}} \rightarrow \Omega_q^{\text{PL}}/\Omega_q \rightarrow 0$$

des classes de cobordisme de dimension  $q$  le groupe  $\Omega_q^{\text{PL}}/\Omega_q$  est fini (voir [6]), ce qui entraîne  $\Omega_* \otimes \mathbb{R} = \Omega_*^{\text{PL}} \otimes \mathbb{R}$ . Donc  $\Omega_*^{\text{PL}} \otimes \mathbb{R}$  est engendré par variétés du type  $C^\infty$ , et il s'ensuit du théorème classique de Hirzebruch et de l'axiome iv) que  $I = L : \Omega_*^{\text{PL}} \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

COROLLAIRE. — Soient  $M$  une variété quelconque du type PL et  $H^*(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(M; \mathbb{R})$  l'homomorphisme induit par  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ; alors la classe  $p([\mathcal{E}(M)]) \in H^{4*}(M; \mathbb{R})$  est l'image de la classe totale de Pontrjagin définie par Thom dans [5].

Démonstration (Voir [3]). — Thom prouve l'unicité (et l'existence) des classes vérifiant trois axiomes, dont le premier et le deuxième sont conséquences immédiates des propriétés des classes  $p([\mathcal{F}])$ ; le troisième axiome de Thom est la formule de Hirzebruch.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. OSBORN, Function algebras and the de Rham theorem in PL, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77 (1971), 386-391.
- [2] H. OSBORN, PL sheaves and their characteristic classes, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78, (1972) 787-791.
- [3] H. OSBORN, Pontrjagin classes of PL sheaves, *Bull. Amer. Math. Soc.* 79, (1973).



- [4] H. OSBORN, Differential geometry in PL, University of Illinois, 1972, (notes multigraphiées).
- [5] R. ТНОМ, Les classes caractéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées, Symposium internacional de topología algebraica, 54-67, Universidad Internacional Autónoma de México et U.N.E.S.C.O., Mexico, 1958.
- [6] R. E. WILLIAMSON, Cobordism of combinatorial manifolds, *Ann. of Math.* (2) 83 (1966), 1-33.

Howard OSBORN,  
Department of Mathematics,  
University of Illinois,  
Urbana, Illinois 61801 (USA).