ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

XAVIER FERNIQUE

Minorations des fonctions aléatoires gaussiennes

Annales de l'institut Fourier, tome 24, n° 2 (1974), p. 61-66

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_2_61_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24, 2 (1974), 61-66.

MINORATIONS DES FONCTIONS ALÉATOIRES GAUSSIENNES

par Xavier FERNIQUE.

---

0. Cet exposé ne contient à proprement parler aucun résultat nouveau. Il vise à réfléchir sur des résultats connus, à simplifier et unifier leurs démonstrations, à en dégager une ligne directrice qui semble prometteuse à l'auteur.

Soit $X = X(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$ une fonction aléatoire gaussienne centrée séparable, on pose :

$$\Delta_X(s, t) = E\{|X(s) - X(t)|^2\}.$$

Les conditions nécessaires portant sur Δ_X pour que X ait ses trajectoires presque sûrement bornées utilisent toutes dans leurs démonstrations l'inégalité de Slepian [4]. Nous en donnons une nouvelle forme et une preuve simple. Actuellement, dans la littérature, ces conditions sont de deux sortes différentes établies par des méthodes différentes : dans le cas stationnaire en dimension 1 [4], elles utilisent la méthode des séries trigonométriques lacunaires mise en évidence par l'auteur [3]; dans le cas général, les résultats proposés par Dudley [2] et établis par Sudakov [5] et Chevet [1] nécessitent des études géométriques fines et des mesures auxiliaires relativement étrangères à la question. Dans l'un et l'autre cas, on utilise donc des astuces qui me semblent voiler leur unité profonde et nuire au développement des recherches.

1. *L'inégalité de Slepian.*

La forme donnée ici à l'inégalité de Slepian n'est pas entièrement nouvelle puisqu'on peut la découvrir avec un décryptage approprié dans les travaux de Mlle Chevet. Si elle n'y est pas énoncée, c'est essentiellement parce que Mlle Chevet n'utilise pas les propriétés d'intégrabilité des vecteurs gaussiens, ses exposés visant à les redémontrer.

Inégalité de Slepian-Chevet.

Soient X *et* Y *deux fonctions aléatoires gaussiennes centrées séparables sur* T; *on suppose que* :

$$(1.0) \qquad \forall (s, t) \in T \times T, \qquad \Delta_Y(s, t) \leqslant \Delta_X(s, t).$$

Dans ces conditions, on a :

$$(1.1) \quad E\left\{ \sup_{s,t \in T \times T} |Y(s) - Y(t)| \right\} \leqslant E\left\{ \sup_{s,t \in T\times T} |X(s) - X(t)| \right\}.$$

$$(1.2) \qquad E\left\{\sup_{t \in T} Y(t)\right\} \leqslant E\left\{\sup_{t\in T} X(t)\right\}$$

Remarques. — L'inégalité (1.1) ne diffère qu'en apparence de l'inégalité (1.2); les membres respectifs sont simplement doublés. Dans l'inégalité (1.1), les valeurs absolues ne jouent aucun rôle. Par contre si on introduisait des valeurs absolues dans l'inégalité (1.2) on écrirait une inégalité fausse, comme on le vérifie en substituant $Y + \eta A$ à Y, η étant une variable gaussienne centrée indépendante de $Y : \Delta_Y(s, t)$ n'est pas modifiée, $E\left\{\sup_{t\in T} Y(t)\right\}$ non plus puisque η est centrée; par contre $E\left\{\sup_{t\in T} |Y(t)|\right\}$ tend vers l'infini avec A. Ceci montre en particulier qu'on peut espérer des inégalités du genre (1.1) pour les moments d'ordre supérieur, mais non pas du genre (1.2).

Démonstration. — Quant au fond, elle est identique aux démonstrations classiques de l'inégalité de Slepian; on se place d'abord dans la situation particulière où T est fini et les lois de X et Y sont définies par des densités, c'est-à-dire les plus petites valeurs propres de leurs covariances minorées par ε strictement positif. Les théorèmes de convergence dominée et de Fubini justifieront alors toutes les dérivations sous le signe somme et les permutations d'intégrales utilisées.

Nous supposons X et Y réalisés indépendamment et posons sur $[0, 1]$:

$$Z_\alpha = \sqrt{\alpha} X + \sqrt{1 - \alpha} Y,$$

de sorte que $X = Z_1$ et $Y = Z_0$ et nous calculons

$$\frac{d}{d\alpha} \mathrm{E}\left[\sup_{t\in \mathrm{T}} Z_\alpha(t)\right]$$

pour obtenir son signe.

La loi de Z_α est définie par une densité g_α sur $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$ puisque la plus petite valeur propre de sa covariance est elle aussi minorée par ε; on obtient :

$$4\frac{d}{d\alpha}\left[\left\{\sup_{t\in \mathrm{T}} Z_\alpha(t)\right\}\right] = \sum_{\substack{(s,\,t)\in \mathrm{T}\times \mathrm{T}\\ s\neq t}} \frac{d}{d\alpha}\left[\Delta_{Z_\alpha}(s,\,t)\right]\int \frac{dx}{dx_s\,dx_t}\int g_\alpha(x)\,du,$$

la dernière intégration étant effectuée dans le domaine :

$$x_s = x_t = \sup x_i = u.$$

On en déduit que la dérivée calculée est positive d'où le résultat dans le cas particulier.

Supposons encore T fini et (X, Y) vérifiant la relation (1.0). Notons U un vecteur gaussien normal sur T indépendant de X et Y. Pour tout ε strictement positif, $(X + \varepsilon U, Y + \varepsilon U)$ vérifie la relation (1.0) et les plus petites valeurs propres des covariances de $(X + \varepsilon U)$ et $(Y + \varepsilon U)$ sont minorées par ε; on a donc, par la démonstration ci-dessus :

$$\mathrm{E}\left\{\sup_{t\in \mathrm{T}}\left[Y(t) + \varepsilon U(t)\right]\right\} \leqslant \mathrm{E}\left\{\sup_{t\in \mathrm{T}}\left[X(t) + \varepsilon U(t)\right]\right\}.$$

On en déduit l'inégalité (1.2) en faisant tendre ε vers zéro.

La séparabilité donne alors le résultat dans le cas général.

2. *Les minorations des fonctions aléatoires gaussiennes.*

Nous commençons par donner une nouvelle démonstration des conditions de Sudakov basée sur l'analyse de la méthode des séries trigonométriques lacunaires. Bien entendu, nous utilisons les théorèmes d'intégrabilité des vecteurs gaussiens de sorte que pour établir des conditions nécessaires pour qu'une fonction aléatoire gaussienne séparable ait des trajectoires presque sûrement bornées, il suffit d'établir des minorations de $\mathrm{E}\left\{\sup_{s,\,t\in \mathrm{T}\times \mathrm{T}} |X(t) - X(s)|\right\}$ où $\{X(t),\ t \in \mathrm{T}\}$ est un vecteur gaussien de dimension finie.

2.1. *Minoration de Sudakov.*

Soit X *une fonction aléatoire gaussienne centrée séparable sur* T; *pour toute partie finie* S *de* T, *on a* :

$$E\left\{\sup_{s,t\in T\times T}|X(s)-X(t)|\right\} \geqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{\ln \operatorname{Card} S}{\ln 2}-1\right)\inf_{\substack{s,t\in S\times S\\ s\neq t}}\Delta_X(s,t)}$$

Démonstration. — On numérote les éléments de S et on les confond avec leurs indices : on note S′ le plus grand intervalle $[0, 2^n - 1]$ contenu dans S et on utilise la numération dyadique (à n termes) des éléments de S′ :

$$\forall s \in S', \qquad s = \sum_1^n \varphi_k(s)2^{k-1}$$

a) introduisant une suite gaussienne normale $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on construit une fonction aléatoire gaussienne auxiliaire sur S′ :

$$Y(s) = C \sum_1^n \varphi_k(s)\lambda_k;$$

on a alors

$$\Delta_Y(s, t) \leqslant nC^2;$$

on peut donc choisir C de sorte que sur S′ les fonctions X et Y soient liées par les hypothèses de l'inégalité de Slépian

$$C^2 = \frac{1}{n}\inf_{\substack{s,t\in S'\times S\\ s\neq t}}\Delta_X(s,t).$$

b) Il est facile de calculer $E\left\{\sup_{s,t\in S'\times S'}|X(s)-Y(t)|\right\}$. En effet les φ_k sont *indépendantes pour la mesure équirépartie sur* S′; il existe donc pour tout ω un couple (s, t) indépendant de k tel que $(\varphi_k(s) - \varphi_k(t))\lambda_k(\omega)$ soit égal à $|\lambda_k(\omega)|$ pour tout rang k; on en déduit :

$$E\left\{\sup_{s,t\in S'\times S'}|Y(s)-Y(t)|\right\} = nC\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

L'application de l'inégalité de Slépian, l'expression de C et celle de n en fonction du cardinal de S donnent alors immédiatement le résultat.

2.2. *Généralisation de l'inégalité de Sudakov.*

Soit X une fonction aléatoire gaussienne centrée séparable sur T; soient μ une probabilité sur T et (φ_k) une suite de fonctions définies μ-presque partout et μ-indépendantes sur T. On suppose que :

$$\Delta_X(s, t) \geqslant \Sigma(\varphi_k(s) - \varphi_k(t))^2 \quad \mu \otimes \mu \quad \text{p.p.}$$

Dans ces conditions on a :

$$E\left\{\sup_{s,t \in T \times T} |X(s) - X(t))\right\} \geqslant \Sigma \|\varphi_k(s) - \varphi_k(t)\|_{L^\infty(\mu \otimes \mu)}$$

La preuve suit exactement la preuve (2.2).

2.3. *Seconde généralisation.*

On peut remarquer que l'argument (2.2 *b*) est très voisin de l'argument utilisé par Szidon dans ses premières études sur les séries trigonométriques lacunaires. Ceci amène à rechercher une formule unique qui baserait simultanément les propriétés de Sudakov dans le cas général et les propriétés de Marcus dans le cas stationnaire. Elle sera fondée sur la notion de suite de fonctions fortement multiplicativement orthogonale dont les suites indépendantes centrées et les suites trigonométriques lacunaires constituent des cas particuliers.

Définition. — *Soit* (T, μ) *un espace probabilisé; soit de plus* $(\varphi_k)_{k \in K}$ *une suite de fonctions sur* T, *appartenant à* $L^p(\mu)$ *pour tout* p; *on dit qu'elle est fortement, multiplicativement orthogonale si pour tout couple* K_1, K_2 *de parties finies et différentes de* K, *on a* :

$$\int \left(\prod_{k \in K_1} \varphi_k\right)\left(\prod_{k \in K_2} \varphi_k\right) d\mu = 0$$

On démontre alors comme ci-dessus la propriété suivante :

Soit X une fonction aléatoire gaussienne centrée séparable sur T; soient de plus μ une probabilité sur T et (φ_k) une suite de fonctions fortement multiplicativement μ-orthogonale; on suppose que :

$$\Delta_X(s, t) \geqslant \Sigma[\varphi_k(s) - \varphi_k(t)]^2.$$

On a alors :

$$E\left\{\sup_{s,t\in T\times T}|X(s)-X(t)|\right\} \geqslant 2\Sigma \frac{\int \varphi_k^2\, d\mu}{\|\varphi_k\|_{L^\infty(\mu)}}$$

3. *Conclusion.*

On peut constater que les méthodes ci-dessus révèlent une parenté étroite avec celles utilisées par Garsia, Preston, Boulicaut et l'auteur pour obtenir des majorations sur les fonctions aléatoires gaussiennes. Dans l'un ou l'autre cas, l'outil essentiel est une probabilité, diffuse ou atomique, sur T ou sur $T \times T$, éventuellement une suite de probabilités. Dans l'état actuel des recherches, on utilise dans l'un ou l'autre cas des mesures simples, mesure de Lebesgue ou mesure équirépartie. On peut penser que les analyses plus fines des fonctions aléatoires gaussiennes reposeraient essentiellement sur la construction des mesures sur $T \times T$ liées à la covariance $\Gamma(s, t)$ dans le cas réduit où T est fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Chevet, Séminaire Clermont, 1972.
[2] R. M. Dudley, *J. Funct. Analysis*, 1 (1967), 290-330.
[3] X. Fernique, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 258 (1964), 6058-6060.
[4] M. B. Marcus et L. A. Shepp, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1970.
[5] Sudakov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 185 n° 1, 1969.

Xavier Fernique,
Département de Mathématiques,
7, rue René-Descartes,
67-Strasbourg.