ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CHRISTIAN DEUTSCH

Deux remarques sur les séries et les polynômes de Dirichlet

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 3 (1974), p. 165-169

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_3_165_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24, 3 (1974), 165-169

DEUX REMARQUES SUR LES SÉRIES ET LES POLYNÔMES DE DIRICHLET

par Christian DEUTSCH

Cette note contient, d'une part un théorème sur l'abscisse d'absolue convergence de l'inverse d'une série de Dirichlet, d'autre part une remarque sur les zéros de certains polynômes de Dirichlet. Ces deux résultats sont en fait conséquences d'une proposition que l'on démontre en utilisant des théorèmes classiques de la théorie des fonctions presque-périodiques analytiques.

1. Soit Λ un semi-groupe multiplicatif de nombres réels $\geqslant 1$, contenant 1, et tel que pour tout x réel l'ensemble des éléments λ de Λ, $\lambda \leqslant x$, soit fini. L'ensemble $\mathcal{A}(\Lambda)$ des applications de Λ dans $\mathbf{C}$ muni d'une addition, d'une multiplication et d'un produit par les scalaires définis par :

$$\forall a, b \in \mathcal{A}(\Lambda) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \Lambda :$$

$$(a + b)(\lambda) = a(\lambda) + b(\lambda)$$

$$(a * b)(\lambda) = \sum_{\substack{\mu \cdot \nu = \lambda \\ \mu, \nu \in \Lambda}} a(\mu)\, b(\nu)$$

$$\forall a \in \mathcal{A}(\Lambda),\ \forall z \in \mathbf{C} : (z \cdot a)(\lambda) = z \cdot a(\lambda)$$

est une algèbre commutative unitaire sur $\mathbf{C}$. Un élément a de $\mathcal{A}(\Lambda)$ est inversible si et seulement si $a(1) \neq 0$, et le sous-ensemble $l^1(\Lambda)$ de $\mathcal{A}(\Lambda)$ formé des éléments a tel que $\sum_{\lambda \in \Lambda} |a(\lambda)| < +\infty$ est une algèbre de Banach.

A chaque fonction a de $\mathcal{A}(\Lambda)$ on associe la série de Dirichlet

$$f_a(s) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a(\lambda)\, \lambda^{-s}$$

et on note σ_a son abscisse d'absolue convergence.

Dans le cas particulier où $\Lambda = \mathbf{N}^*$ (l'ensemble des entiers $\geqslant 1$) E. Hewitt et J.H. Williamson [3] obtinrent à l'aide de la Théorie des algèbres de Banach le résultat suivant :

THEOREME. – *Un élément a de $l^1(\Lambda)$ a son inverse dans $l^1(\Lambda)$ si et seulement si* $\inf_{\text{Réel } s \geqslant 0} |f_a(s)| > 0$.

Il est facile de voir que la démonstration de Hewitt et Williamson reste valable pour un semi-groupe Λ à décomposition unique, cependant dans le cas général nous ne savons pas si ce théorème est encore vrai.

2. En abordant ce problème sous un angle différent nous obtenons des résultats, qui, bien que plus faibles que le théorème précédent, donnent dans le cas général des indications sur le comportement de l'inverse d'un élément de $l^1(\Lambda)$.

PROPOSITION. – *Soit $a \in l^1(\Lambda)$. On suppose qu'il existe $r \geqslant 0$ tel que* $\inf_{\text{Réel } s \geqslant r} |f_a(s)| > 0$. *Alors quel que soit $\epsilon > 0$ on a*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |a^{-*}(\lambda)|^2 \lambda^{-2(r+\epsilon)} < +\infty \tag{1}$$

où a^{-*} est l'inverse pour le produit de convolution de a dans $\mathfrak{A}(\Lambda)$.

Il est clair que les hypothèses de la proposition permettent d'affirmer que a^{-*} existe dans $\mathfrak{A}(\Lambda)$. Dans le cas particulier où $r = 0$ on obtient que quel que soit $\epsilon > 0$:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |a^{-*}(\lambda)|^2 \lambda^{-\epsilon} < +\infty . \tag{2}$$

La relation (2) n'implique pas le théorème de E. Hewitt et J.H. Williamson, mais nous permet d'obtenir :

THEOREME 1. – *Soit a un élément de $l^1(\Lambda)$. Si* $\inf_{\text{Réel } s \geqslant 0} |f_a(s)| > 0$ *alors $\sigma_{a^{-*}}$, l'abscisse d'absolue convergence de l'inverse de a, est inférieure ou égale à la moitié de l'abscisse d'absolue convergence de la fonction identiquement égale à 1 sur Λ ($\sigma_{a^{-*}} \leqslant \sigma_1/2$).*

THEOREME 2. – *Soit $\mathrm{P}(s)$ un polynôme de Dirichlet non constant de la forme :*

$$P(s) = 1 + \sum_{k=2}^{N} a_k \lambda_k^{-s} \qquad (*)$$

où les a_k sont des entiers relatifs et les λ_k des nombres réels distincts > 1. Alors quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un nombre complexe $s = s(\epsilon)$ tel que Réel $s > -\epsilon$ *et* $P(s) = 0$.

Le théorème 1 est une conséquence immédiate de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de la relation (2).

Pour le théorème 2, il suffit de considérer le semi-groupe multiplicatif Λ engendré par $\lambda_2, \ldots, \lambda_N$ et de supposer que pour

$$\epsilon > 0 \quad \inf_{\text{Réel } s \geqslant -\epsilon} |f_a(s)| > 0$$

où a est la fonction définie sur Λ par

$$a(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda = 1 \\ a_k & \lambda = \lambda_k \quad k = 2, \ldots, N \\ 0 & \text{dans les cas contraires.} \end{cases}$$

En appliquant (2) à la fonction b telle que $b(\lambda) = a(\lambda)\,\lambda^{\epsilon}$ on a en particulier :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |a^{-*}(\lambda)|^2 < +\infty . \qquad (3)$$

Comme $a(1) = 1$ et que a est à valeurs entières, a^{-*} est à valeurs entières. On déduit de (3) que $a^{-*}(\lambda)$ est nulle sauf pour un nombre fini d'éléments de Λ.

Le théorème 2 résulte alors du fait que l'inverse d'un polynôme de Dirichlet non constant de la forme $(*)$ ne peut pas être un polynôme de Dirichlet de la forme $(*)$ et du corollaire 1 du théorème 9 [1] qui nous permet d'affirmer que si pour $\eta > 0$ $P(s)$ ne s'annule pas dans la bande Réel $s > -\eta$ alors $\inf_{\text{Réel } s > -\eta/2} |P(s)| > 0$.

3. Démontrons à présent la proposition du paragraphe 2. Comme nous l'avions annoncé dans l'introduction, nous démontrons cette proposition en utilisant des théorèmes classiques de la théorie des fonctions presque périodiques analytiques. On peut trouver un exposé de cette théorie dans les deux livres cités en références [1] et [2].

En particulier les notations et les théorèmes que nous utilisons ci-après sont ceux du chapitre III du livre de Besicovitch [1].

D'après le corollaire du théorème 6 (p. 144) la fonction $f_a(s)$ est u.a.p. dans la bande $< 0, +\infty >$. Il en résulte, ainsi que des hypothèses faites sur r et du corollaire 2 du théorème 9 (p. 145), que dans la bande $< r, +\infty >$ la fonction $g_a(s) = 1/f_a(s)$ est aussi u.a.p.

D'après le théorème fondamental (p. 148) on a :

$$g_a(s) \sim \sum_{n \in \mathbf{N}^*} b_n e^{\beta_n s}$$

avec

$$\mathrm{M}_t(|g_a(\sigma + it)|^2) = \sum_{n \in \mathbf{N}^*} |b_n|^2 e^{2\beta_n \sigma} \quad \text{pour tout} \quad \sigma \in]r, +\infty[. \tag{4}$$

or pour $\sigma =$ Réel s assez grand on a aussi

$$g_a(s) = 1/f_a(s) = \frac{1}{a(1)} \sum_{k=0}^{+\infty} ([f_a(s)/a(1)] - 1)^k$$

où la série $\sum_{k=0}^{+\infty} ([f_a(s)/a(1)] - 1)^k$ est absolument convergente.

On en déduit que pour $\sigma =$ Réel s assez grand on a :

$$g_a(s) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a^{-*}(\lambda) \lambda^{-s} \quad \text{avec} \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} |a^{-*}(\lambda)| \lambda^{-\sigma} < +\infty .$$

Le théorème 1 et le théorème d'unicité (p. 148) en montrant que

$$g_a(s) \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} a^{-*}(\lambda) \lambda^{-s}$$

achèvent avec (4) la démonstration de la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.S. BESICOVITCH, Almost periodic functions (Dover Publications, inc). Chapter III, Analytic Almost Periodic Functions.

[2] C. CORDUNEANU, Almost periodic functions (Interscience Publisher). Chapter III, Analytic Periodic Functions.

[3] E. HEWITT, J.H. WILLIAMSON, Note on absolutely convergent Dirichlet series, *Proc. Am. Math. Society*, (1957) N° 8.

Manuscrit reçu le 17 juillet 1973
accepté par J.P. Kahane

Christian DEUTSCH,
Batiment 425
Centre d'Orsay
Université Paris-Sud
91 – Orsay.