ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CLAUDE ALBERT

# Structures lisses

*Annales de l'institut Fourier*, tome 24, nº 3 (1974), p. 307-315

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_3_307_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24,3 (1974), 307-315

# STRUCTURES LISSES

par Claude ALBERT

Dans un article paru en 1973 au "Journal of Differential Geometry" [6] P. Molino introduisait, dans le cadre d'une étude sur les classes caractéristiques, la notion de G-structure lisse. Plus récemment [3] P. Molino et l'auteur ont précisé en utilisant une approche différente, la notion de variété lisse. Dans le langage des G-structures et des pseudogroupes de Lie, on donne ici quelques propriétés de ces structures lisses, et on montre comment elles réunissent dans une même théorie structures plates et structures de groupes de Lie.

Dans la suite, la différentiabilité est entendue au sens $C^\infty$. Les variétés considérées seront toujours réelles, paracompactes, connexes, et sans bord.

On désigne par $\mathfrak{k}$ une algèbre de Lie réelle de dimension $n$ rapportée à une base $e_1, \ldots, e_n$. On note $\tau$ le crochet de $\mathfrak{k}$ :

$$[e_i, e_j] = \tau(e_i \wedge e_j) = \tau_{ij}^k e_k \qquad i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

DEFINITION. – *Si* V *est une variété de dimension n, on dit que* V *est une variété lisse de type* $\mathfrak{k}$ *si*

i) *Le fibré tangent* TV *est muni d'une structure de fibré en algèbres de Lie de fibre-type* $\mathfrak{k}$.

ii) *Pour tout point* $x \in V$, *il existe un voisinage* U *de* $x$ *et* $n$ *champs de vecteurs* $X_1, \ldots, X_n$ *linéairement indépendants en tout point de* U *et tels que si* $y \in U$ *et* $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$[\![X_i(y), X_j(y)]\!] = [X_i, X_j](y) = \tau_{ij}^k X_k(y)$$

Dans la relation précédente, on note $[\![\ ,\ ]\!]$ le crochet défini dans chaque fibre par la condition i), et par $[\ ,\ ]$ le crochet usuel des champs de vecteurs.

La donnée sur V d'une structure de variété lisse de type $\mathfrak{k}$ est celle d'une $AUT(\mathfrak{k})$-structure, où $AUT(\mathfrak{k})$ est le sous-groupe de Lie de $GL(\mathfrak{k})$ formé des automorphismes d'algèbres de Lie de $\mathfrak{k}$. Par suite, si G est un sous-groupe de Lie de $AUT(\mathfrak{k})$, on parlera de G-structure lisse de type $\mathfrak{k}$ pour désigner toute G-structure subordonnée à la précédente et formée de repères distingués de TV.

*Exemple 1.* – Soit $\mathfrak{k} = \mathbf{R}^n$, c'est-à-dire $\tau = 0$. Alors toute variété est lisse de type $\mathbf{R}^n$, et une G-structure lisse de type $\mathbf{R}^n$ est une G-structure plate.

*Exemple 2.* – Soit K un groupe de Lie connexe dont $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie. La base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathfrak{k}$ définit sur K une $\{e\}$-structure lisse de type $\mathfrak{k}$. Si G est un sous-groupe de $AUT(\mathfrak{k})$, on obtient alors sur K une G-structure lisse de type $\mathfrak{k}$ en "agrandissant" par G le parallélisme précédent. Cette G-structure $E_0 = E_0(K, G)$ sera dans la suite la G-structure lisse standard sur K. On notera d'ailleurs que $E_0$ s'identifie de façon naturelle au produit semi-direct $K \times G$ où G agit sur K par

$$a(\exp u) = \exp(au) \qquad (a \in G,\ u \in \mathfrak{k})$$

En particulier, $E_0$ est naturellement muni d'une structure de groupe de Lie dont K est un sous-groupe distingué.

Toute la suite est centrée sur ces deux exemples : l'exemple 2 fournit le modèle local d'étude, et les propriétés des structures lisses que l'on donne ici généralisent de très près des propriétés analogues des structures plates.

## 1. Quelques propriétés élémentaires des G-structures lisses.

Dans la suite, K est un groupe de Lie connexe dont $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche.

Soit $E(V, G)$ une G-structure lisse de type $\mathfrak{k}$. Tout ouvert U de V vérifiant la condition ii) est difféomorphe (éventuellement après restriction) à un ouvert de K par un difféomorphisme échangeant les champs de vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Par suite, la G-structure E est localement équivalente à $E_0$, et donc :

PROPOSITION. – a) E *est une* G-*structure transitive.*

b) E *est munie de connexions locales sans courbure et dont le tenseur de torsion est égal à* $-\tau \in \Lambda^2\, \mathfrak{k}^* \otimes \mathfrak{k}$. *En particulier, le tenseur de structure de* E *est égal à* $-\tau$ *mod* $\partial(\mathfrak{k}^* \otimes \mathfrak{g})$.

Il résulte en particulier du point b) que E admet un prolongement canonique $E^{(1)}$ (au sens de Singer-Sternberg) formé de tous les espaces horizontaux dont la torsion est égale à $-\tau$.

LEMME. – *Le prolongement canonique* $E^{(1)}$ *est stable par l'action de* G *sur le fibré des repères de* E.

Cela résulte du fait que G laisse invariant le tenseur $\tau$. Un corollaire est que le groupe de la fibration principale $E^{(1)} \to V$ est le produit semi-direct $G \times G^{(1)}$. Par suite le fibré principal $E^{(1)}/G \to V$ est de fibre vectorielle, et donc admet des sections, qui définissent sur $E \to V$ des connexions dont le tenseur de torsion est égal à $-\tau$. Ces connexions sont les connexions admissibles de la G-structure lisse E. (leur existence s'obtient aussi en notant que E est, au sens de [4] définie par le tenseur $\tau$). La variété V est à un revêtement près un ouvert d'un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ si et seulement si il existe sur E une connexion admissible sans courbure. En particulier, une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que toutes les classes caractéristiques de la G-structure E soient nulles.

On va maintenant définir une notion de prolongement adaptée à la lissité. On se place pour cela sur la G-structure standard $E_0 = E_0(K, G)$. Au-dessus de tout point $x \in K$, on a en $r \in E_0$ un espace horizontal canonique $H_0$ défini par la section $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit $H_1$ un autre espace horizontal en $r$ ; il est défini par une application $S_{H_0 H_1}$ : $T_x K \to T_r E_0$, donc par un tenseur $S \in \mathfrak{k}^* \otimes (\mathfrak{k} \otimes \mathfrak{g})$. On dira que $H_1$ est distingué si S est un cocycle pour la cohomologie d'algèbre de Lie de $\mathfrak{k}$ à valeurs dans $\mathfrak{k} \otimes \mathfrak{g}$. Ceci revient, pour l'algèbre $\mathfrak{g}$ à introduire le prolongement strict $\mathfrak{g}^{[1]}$ en posant

$$\mathfrak{g}^{[1]} = \mathfrak{k}^* \otimes \mathfrak{g} \cap \ker (d : \mathfrak{k}^* \otimes (\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g}) \to \Lambda^2\, \mathfrak{k}^* \otimes (\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g}))$$

et puisque si $u,\ v \in \mathfrak{k}$, $\alpha \in \mathfrak{k}^* \otimes \mathfrak{g}$

$$(d\alpha)(u \wedge v) = (\partial\alpha)(u \wedge v) - \alpha[u, v]$$

on obtient $$\mathfrak{g}^{[1]} = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathrm{Nul}([\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]) .$$

DEFINITION. – *On appellera prolongement strict de* $E_0 \to K$ *la* $G^{[1]}$*-structure* $E_0^{[1]}$ *sur* $E_0$ *formée de tous les espaces horizontaux distingués aux divers points de* $E_0$.

Par suite, sur toute variété V, munie d'une G-structure lisse, on aura localement une notion de prolongement strict associé à une famille de champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_n$ sur un ouvert U vérifiant ii). Ceci conduit à poser la définition suivante :

DEFINITION. – *On dira qu'une* G*-structure lisse* E(V , G) *est stricte s'il existe sur* V *un atlas* $(U^\alpha ; X_1^\alpha, \ldots, X_n^\alpha)_\alpha$ *vérifiant* ii) *et pour lequel les fonctions de transition* $g^{\alpha\beta} : U^\alpha \cap U^\beta \to G$ *définies par*

$$X_i^\alpha(x) = g^{\alpha\beta}(x) \,.\, X_i^\beta(x) \qquad (x \in U^\alpha \cap U^\beta, \; 1 \leqslant i \leqslant n)$$

*vérifient* $\quad [X_i^\alpha, X_j^\alpha]\, g^{\alpha\beta} = 0 \qquad i, j \in \{1, \ldots, n\}$ .

On peut ainsi définir pour les G-structures strictes, un prolongement global strict $E^{[1]}$. L'intérêt de cette notion apparaît au paragraphe suivant.

On notera que les prolongements stricts d'ordre supérieur de $\mathfrak{g}$ se définissent de façon analogue. Mais il n'y a plus lieu d'imposer des conditions supplémentaires sur la variété car si $i \geqslant 1$ :

$$\mathfrak{g}^{[i+1]} = \mathfrak{g}^{[1](i)} \subset \mathfrak{g}^{(i+1)} .$$

## 2. Pseudogroupes de Lie lisses.

Soit $\mathfrak{Z}_0$ le pseudogroupe de Lie des automorphismes de la G-structure lisse standard $E_0$ ; la pseudoalgèbre de Lie associée $\mathcal{M}_0$ est le faisceau des germes de champs de vecteurs X sur K tels qu'il existe en chaque point $x \in K$ où X est défini un $A(x) \in \mathfrak{g}$ pour lequel, si $u \in \mathfrak{k}$ :

$$[X, u](x) = A(x) \,.\, u(x) .$$

Si $\mathfrak{M}$ est l'algèbre formelle de $\mathcal{M}_0$, $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}$. Plus précisément

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{M}_1$$

où pour tout $j \geqslant 0$, on note $\mathfrak{M}_j$ le sous-espace de $\mathfrak{M}$ des champs de vecteurs formels nuls à l'ordre $j$.

Il serait agréable de disposer sur $\mathfrak{M}$ d'une "presque-graduation" analogue à la graduation des pseudogroupes plats, c'est-à-dire d'une décomposition

$$\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{k} + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}^1 + \cdots + \mathfrak{g}^j + \cdots \quad \text{où } \mathfrak{g}^j = \mathfrak{M}_j/\mathfrak{M}_{j+1}$$

avec $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}$ et $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{k}]$ = contraction naturelle.

Or il n'en est pas ainsi en général, car $\mathfrak{M}$ est d'ordre 2(*), c'est-à-dire $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}^{(1)}$, et si $A^1 \in \mathfrak{g}^{(1)}$ et $u, v \in \mathfrak{k}$, l'identité de Jacobi aurait pour conséquence

$$[A^1, [u, v]] = 0$$

ce qui est faux en général. Cette obstruction algébrique à la graduation de $\mathfrak{M}$ conduit à s'intéresser à la sous-algèbre $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{M}$ construite en utilisant pour $\mathfrak{g}$ les prolongements stricts. En fait, soit K$'$ le sous-groupe analytique de K ayant pour algèbre de Lie $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$. Il définit sur K un feuilletage $\mathcal{F}'$ invariant par $\mathfrak{Z}_0$, et sur $E_0$ un feuilletage $\mathcal{F}'_0$ plus fin que le feuilletage relevé de $\mathcal{F}'$ mais se projetant sur $\mathcal{F}'$. Alors :

Proposition. – *Le sous-pseudogroupe $\mathcal{R}_0$ de $\mathfrak{Z}_0$ formé des transformations qui laissent invariant $\mathcal{F}'_0$ est un pseudogroupe de Lie transitif sur* K *d'algèbre formelle*

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{k} + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}^{[1]} + \cdots + \mathfrak{g}^{[j]} + \cdots$$

*presque gradué au sens défini plus haut.*

En particulier, si on note $\mathcal{L}_0$ la pseudoalgèbre de Lie associée à $\mathcal{R}_0$, l'orbite de $\mathcal{L}_0$ dans $E_0^{(1)}$ est égale à $E_0^{[1]}$.

D'une façon plus générale, on peut montrer (voir [1]) :

Theoreme. – *Etant donné une suite* $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1, \ldots, \mathfrak{g}^p$ $(p \geqslant 0)$ *telle que :*

a) $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de dérivation de* $\mathfrak{k}$ ;

b) $\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{g}^{[i]}$ *si* $1 \leqslant i \leqslant p$ ;

c) $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}$ *si* $i, j, i+j \leqslant p$

*alors, il existe un sous-pseudogroupe analytique* $\mathcal{R}_0(\mathfrak{g}, \ldots, \mathfrak{g}^p)$ *de* $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(\mathfrak{g})$ *sur* K *dont l'algèbre formelle soit presque graduée et égale à* $\mathfrak{k} + \mathfrak{g} + \cdots + \mathfrak{g}^p + \mathfrak{g}^{p[1]} + \cdots + \mathfrak{g}^{p[j]} + \cdots$

(*) Tout au moins si $\mathfrak{g} \supset ad\mathfrak{k}$.

Ceci conduit à poser la définition suivante :

DEFINITION. – *On dit qu'un pseudogroupe de Lie* $\mathcal{P}$ *sur* V *est lisse de type* $\mathfrak{k}$ *s'il est localement équivalent à un pseudogroupe* $\mathcal{P}_0(\mathfrak{g}, \ldots, \mathfrak{g}^p)$ *(pour une suite* $\mathfrak{g}, \ldots, \mathfrak{g}^p$ *convenable) sur* K.

La G-structure associée à un tel pseudogroupe est donc une G-structure lisse stricte de type $\mathfrak{k}$.

Une propriété fondamentale des pseudogroupes lisses est la suivante :

THEOREME D'EQUIVALENCE LOCALE. – *Soit* $\mathcal{P}$ *un pseudogroupe de Lie lisse sur* K. *Alors toute presque* $\mathcal{P}$*-structure est une* $\mathcal{P}$*-structure.*

Ce théorème est une conséquence du théorème de platitude relative de Molino (voir [7]) puisque l'algèbre formelle $\mathfrak{L}$ de $\mathcal{P}$ est plate relativement à la sous-algèbre $\mathfrak{k}$.

On a aussi :

THEOREME DE REDUCTION. – *Soit* $\mathcal{P}$ *un pseudogroupe de Lie lisse sur* V *d'algèbre formelle* $\mathfrak{L} = \mathfrak{k} + \mathfrak{g} + \cdots + \mathfrak{g}^j + \cdots$ *et soit*

$$\mathfrak{g}_\infty = \mathfrak{g}_{\infty, \mathfrak{L}} = \bigcap_j [\ldots[\mathfrak{g}^j, \mathfrak{k}]\underbrace{\ldots}_{j}] \subset \mathfrak{g}$$

*l'idéal infini de* $\mathfrak{g}$ *relativement à* $\mathfrak{L}$. *Alors, il existe un sous-pseudogroupe lisse de* $\mathcal{P}$ *d'algèbre formelle*

$$\mathfrak{k} + \mathfrak{g}_\infty + \cdots + \mathfrak{g}_\infty^j + \cdots$$

*où* $\mathfrak{g}_\infty^j = \mathfrak{g}_\infty^{(j)} \cap \mathfrak{g}^j$.

Il en résulte en particulier que si $\mathcal{P}$ est de type fini, V est, à un revêtement près, un ouvert du groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. La démonstration de ce théorème, qui généralise une propriété des pseudogroupes plats [2] utilise les propriétés des feuilletages invariants par $\mathcal{P}$ (voir [1]). L'utilisation de ces feuilletages permet d'ailleurs d'obtenir la description locale des variétés lisses :

PROPOSITION. – *Soit* V *une variété munie d'un pseudogroupe lisse* $\mathcal{P}$ *de type* $\mathfrak{k}$. *Alors* V *est munie d'un feuilletage invariant par* $\mathcal{P}$ *et correspondant sur le groupe* K *au feuilletage* $\mathcal{F}'$. *Si* F' *est une feuille de ce feuilletage,* $\mathcal{P}$ *induit sur* F' *un pseudogroupe de type fini* *correspondant localement à l'action du groupe de Lie* $K' \times G'$ *(produit semi-direct),* $G'$ *étant la restriction à* $K'$ *du groupe* $G$ *d'isotropie linéaire de* $\mathcal{P}$. *Si* W *est une variété transverse locale au feuilletage, le pseudogroupe défini par projection de* $\mathcal{P}$ *le long des feuilles est un pseudogroupe plat sur* W.

### 3. Un exemple : les champs d'éléments lisses.

Soit $\mathcal{C}$ un champ d'éléments de contact de codimension $q$ sur une variété V de dimension $n$. On dira que $\mathcal{C}$ est lisse s'il existe une G-structure lisse d'un certain type $\mathfrak{k}$ subordonnée à la H-structure définissant le champ d'éléments.

*Exemple 1.* – Tout champ d'éléments intégrable est lisse.

*Exemple 2.* – Soit $\mathfrak{m}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{k}$, algèbre de Lie des champs invariants à gauche sur le groupe de Lie K. Alors $\mathfrak{m}$ définit sur K un champ d'éléments de contact $\mathcal{C}$ de codimension $q = \mathrm{codim}_{\mathfrak{k}}\, \mathfrak{m}$, lisse de type $\mathfrak{k}$. Si $\mathfrak{m}$ n'est pas une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{k}$, $\mathcal{C}$ n'est pas intégrable.

On va se borner ici à noter que, du point de vue des classes caractéristiques, les champs d'éléments lisses ressemblent beaucoup aux champs d'éléments intégrables. La référence de base pour cette section est [6].

THEOREME DE BOTT. – *Soit* Q *le fibré vectoriel normal d'un champ d'éléments lisse de codimension* $q$ *sur* V. *Alors* $\mathrm{Pont}^k(Q) = 0$ *si* $k > 2q$.

La démonstration de ce théorème utilise un théorème dû à Molino :

THEOREME. – *Soit* $\alpha \in I^p(\mathfrak{g})$, *polynôme de degré* $p$ *sur* $\mathfrak{g}$ *invariant par ad* G, et $\Omega \in \Lambda^2\, \mathfrak{k}^* \otimes \mathfrak{g}$. *On note* $\alpha(\Omega) \in \Lambda^{2p}\, \mathfrak{k}^*$ *la 2p-forme obtenue en substituant* $\Omega$ *aux arguments de* $\alpha$ *et antisymétrisant. Alors, si* $\alpha(\Omega) = 0$ *pour tout* $\Omega \in \partial(\mathfrak{k}^* \otimes \mathfrak{g}^{(1)})$, *la classe caractéristique* $\chi_\alpha$ *définie par* $\alpha$ *pour toute* G*-structure lisse est nulle.*

On utilise pour montrer ce théorème une connexion admissible définie par une section $\sigma$ de $E^{(1)} \to E$. Si $\Omega_r$ est la valeur en $r \in E$ de la courbure de cette connexion, $\sigma(r) : \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g} \to T_r E$ envoie

$$\Omega r \in \Lambda^2 T_r^* E \otimes \mathfrak{g}$$

sur un élément contenu dans $\partial(\mathfrak{k}^* \otimes \mathfrak{g}^{(1)})$.

On démontre alors ainsi le théorème de Bott : soit E la G-structure lisse définissant le champ d'éléments $\mathcal{C}$, $E_T$ le fibré des repères transverses. La projection $E \to E_T$ correspond sur les groupes de Lie à la projection $G \to G_T$, et sur les algèbres de Lie à $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_T$, qui induit une injection

$$\rho^* : I(\mathfrak{g}_T) \to I(\mathfrak{g})$$

Or on vérifie facilement que si $\beta \in I^p(\mathfrak{g}_T)$ est tel que $p > 2q$ et si $\lambda \in \mathfrak{k}^* \otimes \mathfrak{g}^{(1)}$, alors $(\rho^*\beta)(\partial\lambda) = 0$. D'où le théorème.

On notera que les connexions basiques de la théorie de Bott sont ici remplacées par les connexions admissibles. Or l'ensemble des connexions admissibles est un ensemble convexe. On peut donc recopier intégralement la construction de Bott pour les feuilletages (voir [5]) et en utilisant un couple (connexion riemannienne, connexion admissible) obtenir, pour les champs d'éléments lisses, une théorie des classes caractéristiques exotiques.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Albert, Feuilletages invariants et pseudoalgèbres de Lie lisses, *Cahiers de Top. et Géom. Diff.*, XIII-3 (1972), 309-323.

[2] C. Albert et P. Molino, Réduction des G-structures formellement plates, *C.R.S.*, t. 270 (1970), 384-387.

[3] C. Albert et P. Molino, Variétés lisses. Faisceau structural et cohomologie, à paraître.

[4] D. Bernard, Sur la géométrie différentielle des G-structures, *Ann. Inst. Fourier*, 10 (1960), 151-170.

[5] R. Bott, Lectures on characteristic classes and foliations, *Lectures Notes in Mathematics*, 279 (1972).

[6] P. Molino, Sur quelques propriétés des G-structures, *J. of Diff. Geom.*, n° 7 (3-4) (1973).

[7] P. Molino, Platitude relative et problème d'équivalence pour les structures infinitésimales transitives, *C.R.A.S.*, t. 276 (1973), 293-296.

Manuscrit reçu le 8 juin 1973
accepté par G. Reeb.

Claude Albert,
Faculté des Sciences
Mathématiques
34000 – Montpellier.