MARC DE WILDE

Doubles limites ordonnées et théorèmes de minimax

Annales de l'institut Fourier, tome 24, nº 4 (1974), p. 181-188

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1974__24_4_181_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
24, 4 (1974), 181-188.

DOUBLES LIMITES ORDONNÉES ET THÉORÈMES DE MINIMAX

par Marc DE WILDE

DÉFINITION 1. — *Soient* X *un ensemble non vide et* B *une partie de* $\overline{\mathbf{R}}^{\mathrm{X}}$ *(c'est-à-dire de l'ensemble des fonctions réelles sur* X, *qui peuvent prendre les valeurs* $\pm\infty$*). On dit que* B *et* X *ont la propriété des doubles limites ordonnées, ce qu'on note* $\mathrm{B} \prec \mathrm{X}$, *si*

$$\lim_m \lim_i f_m(x_i) \leqslant \lim_i \lim_m f_m(x_i)$$

chaque fois que les limites considérées existent (au sens de $\overline{\mathbf{R}}$*).*

DÉFINITION 2. — *Soient* X *et* Y *deux ensembles non vides et* f *un élément de* $\overline{\mathbf{R}}^{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}}$. *Désignons par* $\mathcal{F}(\mathrm{X})$ *et* $\mathcal{F}(\mathrm{Y})$ *l'ensemble des parties finies de* X *et de* Y. *Nous appelons relation de minimax pour* f, *l'égalité*

$$\inf_{y\in\mathrm{Y}} \sup_{x\in\mathrm{X}} f(x, y) = \sup_{x\in\mathrm{X}} \inf_{y\in\mathrm{Y}} f(x, y)$$

et relation de maximinimax l'inégalité

$$\inf_{\mu\in\mathcal{F}(\mathrm{Y})} \sup_{x\in\mathrm{X}} \inf_{y\in\mu} f(x, y) \leqslant \sup_{\nu\in\mathcal{F}(\mathrm{X})} \inf_{y\in\mathrm{Y}} \sup_{x\in\nu} f(x, y).$$

Il est bien connu et d'ailleurs très facile à vérifier que

$$(1)\quad \sup_{x\in\mathrm{X}} \inf_{y\in\mathrm{Y}} f(x, y) \leqslant \left\{ \begin{array}{c} \inf\limits_{\mu\in\mathcal{F}(\mathrm{Y})} \sup\limits_{x\in\mathrm{X}} \inf\limits_{y\in\mu} f(x, y) \\ \sup\limits_{\nu\in\mathcal{F}(\mathrm{X})} \inf\limits_{y\in\mathrm{Y}} \sup\limits_{x\in\nu} f(x, y) \end{array} \right\} \leqslant \inf_{y\in\mathrm{Y}} \sup_{x\in\mathrm{X}} f(x, y).$$

Lemme 1. — *Soit* X *un ensemble non vide. Quels que soient* $x_i \in \mathrm{X}$ $(i \in \mathbf{N})$ *et* $f_m \in \overline{\mathbf{R}}^{\mathrm{X}}(m \in \mathbf{N})$, *il existe une sous-suite* $x_{i_j}(j \in \mathbf{N})$ *de* $x_i(i \in \mathbf{N})$ *et une sous-suite* $f_{m_k}(k \in \mathbf{N})$ *de* $f_m(m \in \mathbf{N})$ *telles que les limites*

$$\lim_k \lim_j f(x_{i_j}, y_{m_k}) \quad et \quad \lim_j \lim_k f(x_{i_j}, y_{m_k})$$

existent.

Démonstration. — Par extraction diagonale, on détermine une sous-suite $f_{m_k}(k \in \mathbf{N})$ des $f_m(m \in \mathbf{N})$ telle que chacune des suites $f_{m_k}(x_i)(k \in \mathbf{N})$ converge. On extrait par la même méthode une sous-suite $x_{i_j}(j \in \mathbf{N})$ de $x_i(i \in \mathbf{N})$ telle que chaque suite $f_{m_k}(x_{i_j})(j \in \mathbf{N})$ converge, ainsi que

$$\lim_k f_{m_k}(x_{i_j})(j \in \mathbf{N}).$$

Enfin, on extrait une nouvelle sous-suite $f_{m'_k}(k \in \mathbf{N})$ de $f_{m_k}(k \in \mathbf{N})$ telle que $\lim_j f_{m'_k}(x_{i_j})(k \in \mathbf{N})$ converge. En substituant les $f_{m'_k}$ aux f_{m_k}, on ne modifie pas la convergence des $f_{m_k}(x_i)(k \in \mathbf{N})$, ni leur limite, donc les suites ainsi obtenues répondent à la question.

Le théorème suivant fournit un critère de maximinimax à partir de la propriété des doubles limites ordonnées.

Théorème 1. — *Si* $f \in \overline{\mathbf{R}}^{\mathrm{X}\times\mathrm{Y}}$ *est tel que* $f(.,\mathrm{Y}) \prec \mathrm{X}$, *alors* f *vérifie la relation de maximinimax.*

Démonstration. — Posons

$$\mathrm{I} = \inf_{\mu \in \mathfrak{J}(\mathrm{Y})} \sup_{x \in \mathrm{X}} \inf_{y \in \mu} f(x, y)$$

et

$$\mathrm{S} = \sup_{\nu \in \mathfrak{J}(\mathrm{X})} \inf_{y \in \mathrm{Y}} \sup_{x \in \nu} f(x, y).$$

On doit prouver que $\mathrm{I} \leqslant \mathrm{S}$. C'est évident si $\mathrm{I} = -\infty$ ou $\mathrm{S} = +\infty$, donc on peut exclure ces deux possibilités. On construit alors par récurrence des suites $x_m(m \in \mathbf{N})$ et $y_m(m \in \mathbf{N})$ formées respectivement d'éléments de X et de Y, de la façon suivante. On fixe x_1 arbitrairement. Connaissant

$x_1, \ldots, x_m$, on choisit $y_m \in \mathrm{Y}$ tel que

$$\sup_{i \leqslant m} f(x_i, y_m) \leqslant \mathrm{S}_m,$$

où $\mathrm{S}_m = \mathrm{S} + 2^{-m}$ si $\mathrm{S} \neq -\infty$ et $-m$ si $\mathrm{S} = -\infty$. Un tel y_m existe, vu la définition de S. Connaissant

$$y_1, \ldots, y_m,$$

on choisit $x_{m+1} \in \mathrm{X}$ tel que

$$\inf_{i \leqslant m} f(x_{m+1}, y_i) \geqslant \mathrm{I}_m,$$

où $\mathrm{I}_m = \mathrm{I} - 2^{-m}$ si $\mathrm{I} \neq +\infty$ et m si $\mathrm{I} = +\infty$.

Par le lemme 1, on peut extraire une sous-suite $x_{i_j} (j \in \mathbf{N})$ de $x_i (i \in \mathbf{N})$ et une sous-suite $y_{m_k} (k \in \mathbf{N})$ de $y_m (m \in \mathbf{N})$ de sorte que les limites

$$\lim_k \lim_j f(x_{i_j}, y_{m_k}) \quad \text{et} \quad \lim_j \lim_k f(x_{i_j}, y_{m_k})$$

existent. Comme $f(., \mathrm{Y}) \prec \mathrm{X}$, elles sont telles que

$$\lim_k \lim_j f(x_{i_j}, y_{m_k}) \leqslant \lim_j \lim_k f(x_{i_j}, y_{m_k}).$$

Il est trivial que

$$\lim_j f(x_{i_j}, y_{m_k}) \geqslant \mathrm{I}, \ \forall k \in \mathbf{N}$$

et

$$\lim_k f(x_{i_j}, y_{m_k}) \leqslant \mathrm{S}, \ \forall j \in \mathbf{N}.$$

Dès lors

$$\mathrm{I} \leqslant \lim_k \lim_j f(x_{i_j}, y_{m_k}) \leqslant \lim_j \lim_k f(x_{i_j}, y_{m_k}) \leqslant \mathrm{S},$$

d'où la conclusion.

Moyennant des hypothèses de convexité sur f, on peut ramener la relation de minimax à celle de maximinimax.

THÉORÈME 2. — *Soit* $f \in \mathbf{R}^{\mathrm{X} \times \mathrm{Y}}$ *bornée supérieurement* (resp. *inférieurement) sur* X (resp. *sur* Y) *pour tout* $y \in \mathrm{Y}$

(resp. $x \in X$). *Supposons que*

$$(H)\begin{cases} \textit{pour tous } x_1, x_2 \in X, \textit{ il existe } x \in X \textit{ tel que} \\ \qquad f(x_1, y) + f(x_2, y) \leqslant 2f(x, y), \forall y \in Y; \\ \textit{pour tous } y_1, y_2 \in Y, \textit{ il existe } y \in Y \textit{ tel que} \\ \qquad f(x, y_1) + f(x, y_2) \geqslant 2f(x, y), \forall x \in X. \end{cases}$$

Alors,

$$\inf_{\mu \in \mathfrak{J}(Y)} \sup_{x \in X} \inf_{y \in \mu} f(x, y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y)$$

et

$$\sup_{\nu \in \mathfrak{J}(X)} \inf_{y \in Y} \sup_{x \in \nu} f(x, y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y).$$

Démonstration. — Il suffit d'établir la première relation; la seconde se vérifie de façon analogue ou se réduit à la première appliquée à la fonction $-f$.

Soit $\mu = \{y_1, \ldots, y_n\} \subset Y$ donné. Il est trivial que

$$(2) \qquad \sup_{x \in X} \inf_{y \in \mu} f(x, y) = \sup_{x \in X} \inf_{\lambda \in \theta} F(x, \lambda)$$

où

$$\theta = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) : \lambda_i \geqslant 0 (i \leqslant n) \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$$

et

$$F(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x, y_i).$$

Comme θ est compact et convexe et $F(x, \lambda)$ continu en λ pour tout $x \in X$, il résulte du théorème de minimax de Ky Fan et König ([2] et [4]) que le second membre de (2) s'écrit encore

$$(3) \qquad \inf_{\lambda \in \theta} \sup_{x \in X} F(x, \lambda).$$

Si on établit que (3) majore

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y),$$

la démonstration sera terminée.

De (H), on déduit aisément que, quels que soient

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dyadiques, non négatifs et tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, il existe y tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x, y_i) \geqslant f(x, y), \forall x \in X.$$

Soit $\lambda \in \theta$ donné. On peut évidemment supposer que $\lambda_i \neq 0$ pour tout i, puisqu'il suffit pour cela d'éventuellement retirer des points de μ. Soient $r > 1$ et ε compris entre 0 et $\frac{r-1}{r} \inf_i \lambda_i$ donnés. Il existe $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ dyadiques et tels que

$$\lambda'_i \geqslant 0, \forall i \leqslant n; \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i = 1; |\lambda_i - \lambda'_i| \leqslant \varepsilon, \forall i \leqslant n.$$

Posons $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$. On a alors

$$\sup_{x \in X} F(x, \lambda) \geqslant \sup_{x \in X} F(x, r\lambda') + \inf_{x \in X} F(x, \lambda - r\lambda')$$
$$\geqslant r \sup F(x, \lambda') + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - r\lambda'_i) \sup f(x, y_i).$$

En effet, pour la dernière majoration, on note que

$$\lambda_i - r\lambda'_i \leqslant (1 - r)\lambda_i + r(\lambda_i - \lambda'_i) \leqslant (1 - r)\lambda_i + \varepsilon r \leqslant 0, \forall i \leqslant n.$$

Par hypothèse, il existe un $y \in Y$ tel que

$$F(x, \lambda') \geqslant f(x, y), \forall x \in X.$$

On a alors

$$\sup_{x \in X} F(x, \lambda) \geqslant r \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - r\lambda'_i) \sup_{x \in X} f(x, y_i).$$

Puisque $\sup_{x \in X} f(x, y_i) < +\infty$ pour tout i, pour $r - 1$ et ε assez petits, on peut rendre le second membre plus grand que

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) - \varepsilon',$$

où $\varepsilon' > 0$ est arbitraire, d'où la conclusion.

COROLLAIRE 1. — *Soit $f \in \mathbf{R}^{X \times Y}$. Si f vérifie les hypothèses du théorème 2 et est tel que $f(., Y) \prec X$, alors f vérifie la relation de minimax.*

Démonstration. — Par le théorème 1, f vérifie la relation de maximinimax. Il vérifie aussi les conclusions du théorème 2. Combinées avec (1), ces inégalités fournissent la relation de minimax.

Examinons à présent sous quelles conditions on a $f(.,Y) \prec X$. Une condition très forte est fournie par la proposition suivante.

PROPOSITION. — *Si* $B \subset l_\infty(X)$ *est relativement faiblement compact dans* $l_\infty(X)$, *alors* $B \prec X$ *et même, quels que soient* $f_m \in B$ *et* $x_i \in X$,

$$\lim_i \lim_m f_m(x_i) = \lim_m \lim_i f_m(x_i)$$

chaque fois que les limites considérées existent.

Démonstration. — Si B est relativement faiblement compact dans $l_\infty(X)$, la suite $f_m (m \in \mathbf{N})$ a un élément adhérent $f \in l_\infty(X)$ pour la topologie faible de $l_\infty(X)$. La suite de formes linéaires

$$\langle f, \delta_{x_i} \rangle = f(x_i), \ (f \in l_\infty(X))$$

est équicontinue dans $l_\infty(X)$, donc elle a aussi un élément adhérent $\varphi \in l_\infty(X)'$ pour la topologie simple du dual de $l_\infty(X)$. Il est alors évident que

$$\lim_i \lim_m f_m(x_i) = \lim_m \lim_i f_m(x_i) = \langle f, \varphi \rangle.$$

Il résulte de la proposition précédente que, *dans le théorème* 1 *et le corollaire* 1, *on peut remplacer* « $f(.,Y) \prec X$ » *par* « $f(.,Y)$ *est relativement faiblement compact dans* $l_\infty(X)$ ».

DÉFINITION 3. — *Soit* $X \neq \emptyset$ *donné. On appelle* $S(X)$ *l'ensemble des éléments de* $l_\infty(X)$ *qui atteignent leur sup dans* X *en un point de* X.

LEMME 2. — *Soit* $f_m (m \in \mathbf{N})$ *une suite bornée dans* $l_\infty(X)$. *Supposons que, pour tous* $\theta \in]0,1[$ *et* $g_m \in \operatorname{conv}\{f_i : i \geqslant m\}$, *il existe* $g \in l_\infty(X)$ *tel que*

$$\liminf g_m \leqslant g \leqslant \limsup g_m$$

et

$$\sum_{m=1}^{\infty} \theta^m(g_m - g) \in S(X).$$

Alors, il existe une sous-suite $f_{m_k}(k \in \mathbf{N})$ *de* $f_m(m \in \mathbf{N})$ *et un élément* g *de* $l_\infty(X)$ *tels que* $f_{m_k} \to g$ *ponctuellement dans* X *et que*

$$\limsup \langle f_{m_k}, \varphi\rangle \leqslant \langle g, \varphi\rangle,$$

pour toute forme linéaire positive φ *dans* $l_\infty(X)$.

On trouvera ce lemme sous une forme légèrement différente dans [1]. La démonstration de [1] convient sans modification pour l'énoncé adopté ici.

Théorème 3. — *Soit* $B \subset l_\infty(X)$. *Si toute suite*

$$f_m \in B(m \in \mathbf{N})$$

vérifie les hypothèses du lemme 2, *alors* $B \prec X$.

Démonstration. — Soient $f_m \in B(m \in \mathbf{N})$ et $x_i \in X(i \in \mathbf{N})$. Par le lemme 2, il existe une sous-suite $f_{m_k}(k \in \mathbf{N})$ et

$$f \in l_\infty(X)$$

tels que $f_{m_k} \to f$ ponctuellement dans X et que

$$\limsup \langle f_{m_k}, \varphi\rangle \leqslant \langle f, \varphi\rangle,$$

pour toute forme linéaire positive φ dans $l_\infty(X)$.

D'autre part, la suite $\delta_{x_i}(i \in \mathbf{N})$ a un élément adhérent $\varphi \in l_\infty(X)'$ pour la topologie simple de $l_\infty(X)'$, qui est manifestement une forme linéaire positive. Si les doubles limites considérées existent, il vient alors

$$\lim_m \lim_i f_m(x_i) = \lim_m \langle f_m, \varphi\rangle = \limsup \langle f_{m_k}, \varphi\rangle \leqslant \langle f, \varphi\rangle$$

et

$$\lim_i \lim_m f_m(x_i) = \lim_i f(x_i) = \langle f, \varphi\rangle,$$

d'où la conclusion.

Corollaire 2. — *Si* $f \in \mathbf{R}^{X\times Y}$ *est tel que* $f(., Y) \subset l_\infty(X)$ *satisfait aux hypothèses du théorème* 3, *alors* f *vérifie la relation* *de maximinimax. S'il satisfait en outre à la condition* (H) *du théorème* 2, *il vérifie la relation de minimax.*

La première partie du corollaire est due à Simons [5]. Il donne aussi la seconde partie sous des hypothèses un peu plus fortes que (H). L'introduction de la notion de doubles limites ordonnées permet de simplifier de façon appréciable la démonstration de Simons.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. DE WILDE, Pointwise compactness in spaces of functions and R. C. James theorem, *Math. Ann.*, 208 (1974), 33-47.

[2] K. FAN, Minimax theorems, *Proc. Nat. Acad. Sc. USA*, 39 (1953), 42-47.

[3] A. GROTHENDIECK, Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux, *Am. J. Math.*, 74 (1952), 168-186.

[4] H. KÖNIG, Uber das von Neumannsche Minimax Theorem, *Arch. Math.*, 19 (1968), 482-487.

[5] S. SIMONS, Maximinimax, minimax and antiminimax theorems and a result of R. C. James, *Pacific J. Math.*, 40 (1972), 709-718.

Manuscrit reçu le 25 juin 1973,
accepté par B. Malgrange.

Marc DE WILDE,
Institut de Mathématique
15, avenue des Tilleuls
B-4000 Liège (Belgique).