ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DENIS CHENIOT

Un théorème du type de Lefschetz

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 1 (1975), p. 195-213

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_1_195_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 1 (1975), 195-213

UN THÉORÈME DU TYPE DE LEFSCHETZ

par D. CHENIOT

On va démontrer le théorème du type de Lefschetz suivant :

THEOREME. – *Soit* $H \subset \mathbf{P}^{n+1}$ *un ensemble algébrique propre de l'espace projectif complexe de dimension* $n + 1$. *Alors pour tout hyperplan projectif* $\mathcal{L}$ *d'un ouvert de Zariski non vide de l'espace des hyperplans projectifs de* $\mathbf{P}^{n+1}$ *(plus précisément pour* $\mathcal{L}$ *transverse à toutes les strates d'une stratification de Whitney de* H*) l'inclusion* $\mathcal{L} - \mathcal{L} \cap H \to \mathbf{P}^{n+1} - H$ *induit des homomorphismes :*

$$\pi_k(\mathcal{L} - \mathcal{L} \cap H , e) \to \pi_k(\mathbf{P}^{n+1} - H , e)$$

avec $e \in \mathcal{L} - \mathcal{L} \cap H$.
bijectifs pour $k < n$
surjectif pour $k = n$.

Dans le cas où H est une hypersurface, ce théorème a été démontré par H. Hamm et Lê Dũng Tráng (cf. [4]) en utilisant la théorie de Morse. O. Zariski en a donné dans ce cas une esquisse de démonstration pour ce qui est du groupe fondamental (cf. [8]). Cette démonstration est complète quand on dispose d'un théorème d'isotopie : celui de Thom-Mather (cf. [2]) ou celui de A.N. Varchenko (cf. [5]).

Ici on démontre ce théorème dans le cas où la codimension de H est au moins 2. La démonstration se fait par récurrence simultanée pour les trois assertions suivantes :

- Le théorème dans le cas cod $H \geqslant 2$
- $\pi_1(\mathbf{P}^{n+1} - H , e) = 1$ dans le cas cod $H \geqslant 2$
- La proposition suivante pour cod $H \geqslant 1$:

PROPOSITION 0. — *Sous les mêmes hypothèses que le théorème on a*

$$\mathrm{H}_k(\mathbf{P}^{n+1} - \mathrm{H}\,,\ \mathcal{L} - \mathcal{L} \cap \mathrm{H}) = 0 \quad \textit{pour} \quad k \leqslant n\,.$$

Les trois assertions sont trivialement vraies pour $n = 0$. Supposons maintenant qu'elles soient vraies pour $n + 1$ (hypothèse de récurrence). Les propositions 1 à 8 permettront de montrer qu'elles sont alors vraies pour $n + 2$.

Dans [2] les faits suivants sont établis, toutes les démonstrations étant valables pour cod $\mathrm{H} \geqslant 1$, bien que les énoncés s'y limitent à cod $\mathrm{H} = 1$.

PROPOSITION 1. — *Soit Σ une stratification de Whitney de* H (*cf.* [7]). *Il existe un ouvert de Zariski non vide de l'espace des hyperplans de $\mathbf{P}^{n+2}$ dont tout élément est transverse à toutes les strates de Σ. Soit $\mathcal{L}$ un tel élément. Il existe un n-plan* A *de $\mathbf{P}^{n+2}$ contenu dans $\mathcal{L}$ et transverse à toutes les strates de Σ. Tous les hyperplans issus de* A, *sauf un nombre fini $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_l$ sont transverses à toutes les strates de Σ.*

Comme dans [2] on fait maintenant la construction suivante :

On considère l'éclatement

$$\varphi : \widetilde{\mathbf{P}}^{n+2} \to \mathbf{P}^{n+2}$$

de $\mathbf{P}^{n+2}$ le long de A et l'application projective

$$p : \mathbf{P}^{n+2} - \mathrm{A} \to \mathbf{P}^1$$

qui à tout hyperplan passant par A fait correspondre sa direction. On a une submersion analytique

$$\widetilde{p} : \widetilde{\mathbf{P}}^{n+2} \to \mathbf{P}^1$$

telle que $$\widetilde{p}\,|\,\widetilde{\mathbf{P}}^{n+2} - \varphi^{-1}(\mathrm{A}) = p \circ \varphi$$

On choisit les notations suivantes :

$$\widetilde{\mathrm{A}} = \varphi^{-1}(\mathrm{A})\ ;\ \widetilde{\mathrm{H}} = \varphi^{-1}(\mathrm{H})\ ;$$

$\overline{\mathcal{L}}$ transformé strict de $\mathcal{L}$; $\overline{\mathcal{S}}_1, \ldots, \overline{\mathcal{S}}_l$ transformés stricts de $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_l$; $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_l$; $\overline{\mathcal{S}} = \overline{\mathcal{S}}_1 \cup \ldots \cup \overline{\mathcal{S}}_l$;

$X = \mathbf{P}^{n+2} - H$; $Y = A - A \cap H$; $L = \mathcal{L} - \mathcal{L} \cap H$;

$S_i = \mathcal{S}_i - \mathcal{S}_i \cap H$ pour $1 \leqslant i \leqslant l$;

$\widetilde{X} = \widetilde{\mathbf{P}}^{n+2} - \widetilde{H}$; $\widetilde{Y} = \widetilde{A} - \widetilde{A} \cap \widetilde{H}$; $\overline{L} = \overline{\mathcal{L}} - \overline{\mathcal{L}} \cap \widetilde{H}$;

$\overline{S}_i = \overline{\mathcal{S}}_i - \overline{\mathcal{S}}_i \cap \widetilde{H}$ pour $1 \leqslant i \leqslant l$;

$\overline{Y} = \overline{L} \cap \widetilde{Y}$; $\overline{Y}_i = \overline{S}_i \cap \widetilde{Y}$ pour $1 \leqslant i \leqslant l$; $S = S_1 \cup \ldots \cup S_l$;

$\overline{S} = \overline{S}_1 \cup \ldots \cup \overline{S}_l$

$\widetilde{e}$ un point de $\overline{Y}$; $e = \varphi(\widetilde{e})$;

$\lambda_i = \widetilde{p}(\mathcal{S}_i)$ (qui est réduit à un point) pour $1 \leqslant i \leqslant l$;

$$\mathcal{B} = \mathbf{P}^1 - \{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}.$$

On note que :

$\widetilde{\mathbf{P}}^{n+2} \subset \mathbf{P}^{n+2} \times \mathbf{P}^1$ est une variété analytique compacte de dimension $n+2$;

$\widetilde{A} = A \times \mathbf{P}^1$ est une sous-variété de codimension 1 ;

$\widetilde{Y} = Y \times \mathbf{P}^1$ est topologiquement le produit de Y par une 2-sphère orientée ;

φ induit des isomorphismes analytiques :

$$\widetilde{\mathbf{P}}^{n+2} - \widetilde{A} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^{n+2} - A$$

$$\widetilde{X} - \widetilde{Y} \xrightarrow{\sim} X - Y$$

$$\overline{\mathcal{L}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$$

$$\overline{\mathcal{S}}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant l \ ;$$

$$\overline{L} \xrightarrow{\sim} L$$

$$\overline{S}_i \xrightarrow{\sim} S_i \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant l \ ;$$

$$\overline{Y} \xrightarrow{\sim} Y$$

$$\overline{Y}_i \xrightarrow{\sim} Y \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant l\,.$$

Alors comme dans [2] on obtient :

PROPOSITION 2. – $\widetilde{\mathbf{P}}^{n+2} - \overline{\mathcal{S}}$ *est un fibré localement trivial de base* $\mathcal{B}$, *de projection* $\widetilde{p} \mid \widetilde{\mathbf{P}}^{n+2} - \overline{\mathcal{S}}$, *de fibre type* $\mathcal{L}$. *On a les trois* *sous-fibrés* $\widetilde{H} - \widetilde{H} \cap \mathfrak{S}$, $\widetilde{X} - \overline{S}$, $\widetilde{Y} - \widetilde{Y} \cap \overline{S}$ *de fibres types respectives* $\overline{\mathcal{L}} \cap \widetilde{H}$, $\overline{L}$ *et* $\overline{Y}$.

Proposition 3. – *On a* $H_k(S_i, Y) = 0$ *pour* $k \leqslant n$ *et* $1 \leqslant i \leqslant l$ *et* $\pi_k(S_i, Y, e) = 1$ *pour* $k \leqslant n$ *et* $1 \leqslant i \leqslant l$ *dans le cas où* cod $H \geqslant 2$.

Démonstration. – On va munir $\mathfrak{S}_i \cap H$ d'une stratification de Whitney Σ_1 aux strates de laquelle A est transverse dans $\mathcal{L}$. La proposition résultera alors de l'hypothèse d'induction. Nous montrons d'abord que pour tout $M \in \Sigma$, l'ensemble des points de $M \cap \mathfrak{S}_i$ où $\mathfrak{S}_i$ n'est pas transverse à M est un ensemble analytique local de $\mathfrak{S}_i$ dont l'adhérence est algébrique. Pour cela on remarque que $\overline{M}$ est algébrique ainsi que $\overline{M} - M$ et donc que M est un ouvert de Zariski de $\overline{M}$ contenu dans la partie lisse de $\overline{M}$.

On considère alors l'ensemble $B \subset \mathbf{P}^{n+2} \times \mathbf{G}^{n+2,r}$ ($\mathbf{G}^{n+2,r}$ est la grassmanienne des r-plans de $\mathbf{P}^{n+2}$) constitué par les couples (x, T) où $x \in M$ et T est la variété projective tangente à M en x. Clairement B est un ensemble analytique local. On montre comme dans [2], lemme 1.2.2, qu'il est la trace d'un ensemble algébrique de $\overline{M} \times \mathbf{G}^{n+2,r}$ sur l'ouvert de Zariski $M \times \mathbf{G}^{n+2,r}$. Il en résulte que $\overline{B}$ est algébrique (cf. [7] lemme 3.9). Ensuite on considère le sous-ensemble C de $\mathbf{P}^{n+2} \times \mathbf{G}^{n+2,r} \times \mathbf{P}^{n+2}$ constitué par les triplets (x, T, V) où $(x, T) \in B$ et $T \subset V$, $\mathbf{P}^{n+2}$ étant identifié à l'espace des hyperplans de $\mathbf{P}^{n+2}$. C'est un ensemble analytique local et $\overline{C}$ est algébrique puisque c'est l'ensemble des (x, T, V) où $(x, T) \in \overline{B}$ et $T \subset V$. Il en est de même de $\overline{C} - C = \overline{C} \cap ((\overline{M} - M) \times \mathbf{G}^{n+2,r} \times \mathbf{P}^{n+2})$. On obtient encore que $C \cap (\mathfrak{S}_i \times \mathbf{G}^{n+2,r} \times \{\mathfrak{S}_i\})$ est un ensemble analytique local, ouvert de Zariski de $\overline{C} \cap (\mathfrak{S}_i \times \mathbf{G}^{n+2,r} \times \{\mathfrak{S}_i\})$ d'où l'algébricité de

$$\overline{C \cap (\mathfrak{S}_i \times \mathbf{G}^{n+2,r} \times \{\mathfrak{S}_i\})}$$

Maintenant l'ensemble des points de $\mathfrak{S}_i \cap M$ où $\mathfrak{S}_i$ n'est pas transverse à M est la projection sur le premier facteur de

$$C \cap (\mathfrak{S}_i \times \mathbf{G}^{n+2,r} \times \{\mathfrak{S}_i\}) .$$

Comme $\mathfrak{S}_i \times \mathbf{G}^{n+2,r} \times \{\mathfrak{S}_i\}$ est compact, c'est un ensemble analytique local de $\mathfrak{S}_i$ dont l'adhérence est la projection de

$$\overline{C \cap (\mathfrak{S}_i \times \mathbf{G}^{n+2,r} \times \{\mathfrak{S}_i\})} ,$$

donc est algébrique.

Ainsi l'ensemble D des points de $\mathcal{S}_i$ où $\mathcal{S}_i$ n'est pas transverse à toutes les strates de Σ est un ensemble analytique local et $\overline{D}$ est algébrique. Mais A est transverse à toutes les strates de Σ et, par suite, il existe un ouvert U de $\mathcal{S}_i$ contenant A où $\mathcal{S}_i$ est transverse à toutes les strates de Σ. On a donc $D \subset \mathcal{S}_i - U$ et $\overline{D} \subset \mathcal{S}_i - U$. D'où $\overline{D} \cap A = \phi$ et $\dim \overline{D} = 0$. Ainsi il n'y a qu'un nombre fini de points $c_1, \ldots, c_k$ de $\mathcal{S}_i$ où $\mathcal{S}_i$ n'est pas transverse à toutes les strates de Σ.

D'après [2], lemme 2.2.2, $\Sigma \mid (\mathcal{S}_i - \{c_1, \ldots, c_k\})$ constitué par les $M \cap (\mathcal{S}_i - \{c_1, \ldots, c_k\})$ pour $M \in \Sigma$ est une stratification de $H \cap (\mathcal{S}_i - \{c_1, \ldots, c_k\})$. On considère maintenant la partition Σ_1 de $\mathcal{S}_i \cap H$ dont les éléments sont les $\{c_i\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$ et les strates de $\Sigma \mid (\mathcal{S}_i - \{c_1, \ldots, c_k\})$. Il reste à montrer que Σ_1 est une stratification de Whitney.

Pour cela il suffit de montrer que c'est une partition en sous-variétés analytiques pures de $\mathcal{S}_i$ vérifiant la propriété de frontière et la propriété b) de Whitney (cf. [2] paragraphe 4 de l'introduction). Comme $\mathcal{S}_i - \{c_1, \ldots, c_k\}$ est un ouvert de $\mathcal{S}_i$, les éléments de Σ_1 sont des sous-variétés analytiques pures de $\mathcal{S}_i$. Soit maintenant $M \in \Sigma_1$.

Alors $\overline{M} = (\overline{M} \cap (\mathcal{S}_i - \{c_1, \ldots, c_k\})) \cup (\overline{M} \cap \{c_1, \ldots, c_k\})$. Le second terme est clairement une union d'éléments de Σ_1 et le premier est l'adhérence de $M - \{c_1, \ldots, c_k\}$ dans $\mathcal{S}_i - \{c_1, \ldots, c_k\}$ donc est une union de strates de $\Sigma \mid (\mathcal{S}_i - \{c_1, \ldots, c_k\})$ qui sont éléments de Σ_1. Ainsi Σ_1 a la propriété de frontière. Soit enfin $N \in \Sigma_1$ avec $N \subset \overline{M}$ et (x_n), (y_n) deux suites de M et N respectivement convergeant vers $y \in N$ et telles que la variété projective tangente à M en x_n tende vers $T \in \mathbf{G}^{n+1, r}$ où $r = \dim M$ et que la droite portée par x_n et y_n tende vers $u \in \mathbf{P}^{n+1}$. Alors ou bien $y \in \mathcal{S}_i - \{c_1, \ldots, c_k\}$ et la propriété b) de Whitney pour $\Sigma \mid (\mathcal{S}_i - \{c_1, \ldots, c_k\})$ implique $u \subset T$, ou bien $N = \{c_i\}$ pour un certain i et on a encore $u \subset T$ d'après [6] 3.1. Ainsi Σ_1 est une stratification de Whitney de $\mathcal{S}_i \cap H$.

Maintenant A est transverse dans $\mathcal{S}_i$ à toutes les strates de Σ_1 car les c_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, n'appartiennent pas à A. On peut alors appliquer l'hypothèse d'induction à $\mathcal{S}_i \cap H$, Σ_1 et A et obtenir ainsi la proposition 3.

PROPOSITION 4. — *On a pour tout k la suite exacte :*

$$0 \to H_{k-1}(Y) \xrightarrow{\sigma_k} H_{k+1}(\widetilde{X}) \xrightarrow{\epsilon_{k+1}} H_{k+1}(X) \to 0$$

où ϵ_{k+1} est induit par φ et où $(-1)^{k-1}\sigma_k$ est le composé de l'homomorphisme $H_{k+1}(\widetilde{Y}) \to H_{k+1}(\widetilde{X})$ induit par l'inclusion et de l'homomorphisme :

$$\beta_k : H_{k-1}(Y) \to H_{k+1}(\widetilde{Y})$$

ainsi défini : si z est un $(k-1)$-cycle de Y,

$$\beta_k([z]) = [z \times \mathbf{P}^1] .$$

Démonstration. — Elle est identique à celle de [1] § 4 théorème 2, une fois démontré le

LEMME 1. — *Pour tout k, ϵ_k possède une section qui est un homomorphisme.*

Démonstration du lemme. — Comme X et $\widetilde{X}$ sont des variétés analytiques complexes, elles ont une orientation canonique. Pour tout compact K de X (resp. $\widetilde{K}$ de $\widetilde{X}$) soit ζ_K (resp. $\widetilde{\zeta}_{\widetilde{K}}$) le générateur de $H_{2n+4}(X, X - K)$ (resp. $H_{2n+4}(\widetilde{X}, \widetilde{X} - \widetilde{K})$) compatible avec cette orientation. L'application φ étant propre, $\varphi^{-1}(K)$ est compact pour tout $K \subset X$. Nous définissons :

$$\begin{aligned} D_k^K : H^{2n+4-k}(X, X - K) &\to H_k(X) \\ \gamma &\mapsto \zeta_K \cap \gamma \\ \widetilde{D}_k^K : H^{2n+4-k}(\widetilde{X}, \widetilde{X} - \varphi^{-1}(K)) &\to H_k(\widetilde{X}) \\ \gamma &\mapsto \widetilde{\zeta}_{\varphi^{-1}(K)} \end{aligned}$$

où $\cap$ est le cap-produit ; soit

$$\overline{\epsilon}_{2n+4-k}^K : H^{2n+4-k}(X, X - K) \to H^{2n+4-k}(\widetilde{X}, \widetilde{X} - \varphi^{-1}(K))$$

l'homomorphisme induit par φ.

On a maintenant la formule de changement de variable

$$\epsilon_k(\widetilde{\zeta}_{\varphi^{-1}(K)} \cap \overline{\epsilon}_{2n+4-k}^K(\gamma)) = \epsilon_{2n+4}(\widetilde{\zeta}_{\varphi^{-1}(K)}) \cap \gamma$$

pour tout $\gamma \in H^{2n+4-k}(X, X - K)$. Or il est clair que si $K \subset \widetilde{X} - \widetilde{Y}$ on a $\epsilon_{2n+4}(\widetilde{\zeta}_{\varphi^{-1}(K)}) = \zeta_K$, c'est-à-dire que le degré au-dessus de K de $\varphi \mid \widetilde{X}$ est 1. Mais ce degré ne dépend pas du compact $K \subset \widetilde{X}$ (cf. [3] VIII.4.5). Donc pour tout compact $K \subset \widetilde{X}$ on a

$$\epsilon_k \circ \widetilde{D}_k^K \circ \overline{\epsilon}_{2n+4-k}^K = D_k^K .$$

En passant à la limite inductive sur K on obtient

$$\epsilon_k \circ \widetilde{D}_k \circ \overline{\epsilon}_{2n+4-k} = D_k$$

où

$$\overline{\epsilon}_{2n+4-k} : H_c^{2n+4-k}(X) \to H_c^{2n+4-k}(\widetilde{X})$$

est l'homomorphisme des groupes de cohomologie à supports compacts induit par l'application propre $\varphi \mid \widetilde{X}$ et où

$$D_k : H_c^{2n+4-k}(X) \xrightarrow{\sim} H_k(X)$$

$$\widetilde{D}_k : H_c^{2n+4-k}(\widetilde{X}) \xrightarrow{\sim} H_k(\widetilde{X})$$

sont les isomorphismes de Poincaré. On a donc

$$\epsilon_k \circ (\widetilde{D}_k \circ \overline{\epsilon}_{2n+4-k} \circ D_k^{-1}) = 1_{H_k(X)} ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme 1 et de la proposition 4.

PROPOSITION 5. — *On a les diagrammes commutatifs avec colonne de droite exacte :*

$$\begin{tikzcd}
 & H_{k+1}(\widetilde{X} - \overline{S}) \arrow[d, "i_{k+1}"] \\
H_{k-1}(Y) \arrow[r, "\sigma_k"] \arrow[d, "\delta_k"] & H_{k+1}(\widetilde{X}) \arrow[d, "u_k"] \\
\oplus^l H_{k-1}(Y) \arrow[r, "\tau_k"] \arrow[d, "c_k"] & \bigoplus_{i=1}^{l} H_{k-1}(\overline{S}_i) \arrow[d, "g_k"] \\
H_k(\widetilde{Y} - \overline{S}) \arrow[r, "h_k"] & H_k(\widetilde{X} - \overline{S}) \arrow[d, "i_k"] \\
 & H_k(\widetilde{X})
\end{tikzcd}$$

où σ_k est comme dans la proposition 4, i_k et h_k sont induits par les inclusions, δ_k est l'application diagonale, τ_k est induit par les inclusions $Y \hookrightarrow S_i$ composées par les isomorphismes $\underset{\sim}{S}_i \to \overline{S}_i$ réciproques de ceux induits par φ et c_k est définie par :

$$c_k\left(\bigoplus_{i=1}^{l} [z_i]\right) = \sum_{i=1}^{l} [e_i \times z_i]$$

où pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant l$, e_i *est un 1-cycle de* $\mathcal{B}$ *d'indice 1 par rapport à* λ_i *et* 0 *par rapport à* λ_j *pour* $j \neq i$.

Démonstration. – Comme pour chaque i, $1 \leqslant i \leqslant l$, $\overline{S}_i$ et $\widetilde{Y}$ sont des sous-variétés fermées transverses de $\widetilde{X}$, on peut trouver des voisinages tubulaires T_i des $\overline{S}_i$ dans $\widetilde{X}$ qui au-dessus de Y_i coïncident avec $Y \times D_i$ où D_i est isomorphe à un disque. On peut ajuster les rayons tubulaires de manière à ce que les T_i soient disjoints et poser $e_i = \partial D_i$.

Alors les classes d'homologie $[e_i]$ engendrent $H_1(\mathcal{B})$ et sont telles que $\sum_{i=1}^{l} [e_i] = 0$.

On a les suites exactes d'homologie reliées par l'homomorphisme induit par les inclusions :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{k+1}(\widetilde{X}) \arrow[r, "\xi_k"] & H_{k+1}(\widetilde{X}, \widetilde{X}-\overline{S}) \arrow[r, "\partial_k"] & H_k(\widetilde{X}-\overline{S}) \arrow[r, "i_k"] & H_k(\widetilde{X}) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{k+1}(\widetilde{Y}) \arrow[r, "\bar{\xi}_k"] \arrow[u] & H_{k+1}(\widetilde{Y}, \widetilde{Y}-\overline{S}) \arrow[r, "\bar{\partial}_k"] \arrow[u] & H_k(\widetilde{Y}-\overline{S}) \arrow[r, "\bar{i}_k"] \arrow[u, "h_k"'] & H_k(\widetilde{Y}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Si on excise $\widetilde{X} - \bigcup_{i=1}^{l} T_i$ on obtient les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^{l} H_{k+1}(T_i, \partial T_i) \arrow[r, "\sim"] & H_{k+1}\left(\bigcup_{i=1}^{l} T_i, \bigcup_{i=1}^{l} (T_i - \overline{S}_i)\right) \arrow[r, "\sim"] & H_{k+1}(\widetilde{X}, \widetilde{X}-\overline{S}) \\
\bigoplus_{i=1}^{l} H_{k+1}(Y \times D_i, Y \times \partial D_i) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u] & H_{k+1}\left(\bigcup_{i=1}^{l} (Y \times D_i), \bigcup_{i=1}^{l} (Y \times D_i - \overline{Y}_i)\right) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u] & H_{k+1}(\widetilde{Y}, \widetilde{Y}-\overline{S}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

toutes les flèches étant induites par les inclusions et les flèches horizontales étant des isomorphismes. Les isomorphismes de Thom permettent d'obtenir les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
H_{k-1}(\overline{S}_i) \arrow[r, "\sim"] & H_{k+1}(T_i, \partial T_i) \\
H_{k-1}(Y) \arrow[r, "t_k^i", "\sim"'] \arrow[u] & H_{k+1}(Y \times D_i, Y \times \partial D_i) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

les deux flèches horizontales étant des isomorphismes, la flèche verticale droite étant induite par inclusion, la flèche verticale gauche étant induite par l'inclusion $Y \hookrightarrow S_i$ composée par l'isomorphisme $S_i \xrightarrow{\sim} \overline{S}_i$ réciproque de celui induit par φ et la flèche horizontale inférieure t_k^i étant obtenue comme suit : si z est un $(k-1)$-cycle de Y alors

$$t_k^i([z]) = [z \times D_i \text{ mod. } Y \times \partial D_i] \ .$$

En combinant les isomorphismes précédents on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\overset{l}{\underset{i=1}{\oplus}} H_{k-1}(\overline{S}_i) \arrow[r, "\mu_k", "\sim"'] & H_{k+1}(\widetilde{X}, \widetilde{X} - \overline{S}) \\
\oplus^l H_{k-1}(Y) \arrow[u, "\tau_k"] \arrow[r, "\overline{\mu}_k", "\sim"'] & H_{k+1}(\widetilde{Y}, \widetilde{Y} - \overline{S}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où μ_k et $\overline{\mu}_k$ sont des isomorphismes, où τ_k est dans l'énoncé de la proposition et où la flèche verticale droite est induite par inclusion. Les suites exactes d'homologie ci-dessus deviennent maintenant

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{k+1}(\widetilde{X}) \arrow[r, "u_k"] & \overset{l}{\underset{i=1}{\oplus}} H_{k-1}(\overline{S}_i) \arrow[r, "g_k"] & H_k(\widetilde{X} - \overline{S}) \arrow[r, "i_k"] & H_k(\widetilde{X}) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{k+1}(\widetilde{Y}) \arrow[u] \arrow[r, "\overline{u}_k"] & \oplus^l H_{k-1}(Y) \arrow[u, "\tau_k"] \arrow[r, "c_k"] & H_k(\widetilde{Y} - \overline{S}) \arrow[u, "h_k"] \arrow[r, "\overline{i}_k"] & H_k(\widetilde{Y}) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

avec

$$\begin{aligned}
g_k &= (-1)^{k-1}\ \partial_k \circ \mu_k \\
c_k &= (-1)^{k-1}\ \overline{\partial}_k \circ \overline{\mu}_k \\
u_k &= (-1)^{k-1}\ \mu_k^{-1} \circ \xi_k \\
\overline{u}_k &= (-1)^{k-1}\ \overline{\mu}_k^{-1} \circ \overline{\xi}_k \ .
\end{aligned}$$

De la formule donnant les t_k^i et du fait que pour tout $(k-1)$-cycle z de Y on a $\partial(z \times D_i) = (-1)^{k-1}\, z \times \partial D_i = (-1)^{k-1}\, z \times e_i$ on tire

$$c_k\Big(\overset{l}{\underset{i=1}{\oplus}} [z_i]\Big) = \sum_{i=1}^{l} [e_i \times z_i] \ .$$

On considère enfin le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & H_{k+1}(\widetilde{X}) \arrow[r, "u_k"] & \overset{l}{\underset{i=1}{\oplus}} H_{k-1}(\overline{S}_i) \\
H_{k-1}(Y) \arrow[r, "\beta_k"] \arrow[ur, "(-1)^{k-1}\sigma_k"] & H_{k+1}(\widetilde{Y}) \arrow[u] \arrow[r, "\overline{u}_k"] \arrow[d, "\xi_k"'] & \oplus^l H_{k-1}(Y) \arrow[u, "\tau_k"'] \\
 & H_{k+1}(\widetilde{Y}, \widetilde{Y} - \overline{S}) \arrow[ur, "(-1)^{k-1}\overline{\mu}_k^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

où β_k et σ_k sont comme dans la proposition 4 et où la flèche verticale gauche est induite par inclusion. Si z est un $(k-1)$-cycle de Y on a $\beta_k([z]) = [z \times \mathbf{P}^1]$. Mais

$$[z \times \mathbf{P}^1 \text{ mod. } \widetilde{Y} - \overline{S}] = \left[\sum_{i=1}^{l} z \times D_i \text{ mod. } \widetilde{Y} - \overline{S} \right] ,$$

de sorte que

$$(\overline{u}_k \circ \beta_k)([z]) = (-1)^{k-1} [z]^l .$$

Cela montre que $(-1)^{k-1}\, \overline{u}_k \circ \beta_k = \delta_k$ d'où

$$u_k \circ \sigma_k = \tau_k \circ \delta_k ,$$

ce qui achève de démontrer la proposition.

PROPOSITION 6. – *On a des suites exactes homomorphes :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_k(\overline{L}) \arrow[r, "j_k"] & H_k(\widetilde{X} - \overline{S}) \arrow[r, "s_k"] & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_{k-1}(\overline{L}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_k(\overline{Y}) \arrow[r, "\overline{j}_k"] \arrow[u] & H_k(\widetilde{Y} - \overline{S}) \arrow[r, "\overline{s}_k"] \arrow[u] & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_{k-1}(\overline{Y}) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

pour $k \leqslant n$ *et*

$$\begin{tikzcd}
 & H_{n+1}(L) \arrow[r, "j_{n+1}"] & H_{n+1}(\widetilde{X} - \overline{S}) \arrow[r, "s_{n+1}"] & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_n(\overline{L}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_{n+1}(Y) \arrow[r, "\overline{j}_{n+1}"] \arrow[u] & H_{n+1}(\widetilde{Y} - \overline{S}) \arrow[r, "\overline{s}_{n+1}"] \arrow[u] & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_n(\overline{Y}) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales, les j_k *et les* $\overline{j}_k$, $k \leqslant n+1$, *sont induits par les inclusions et où pour* $k \leqslant n+1$, *le composé de* $\overline{s}_k$ *avec l'isomorphisme* $H_1(\mathcal{B}) \otimes H_k(\overline{Y}) \to H_1(\mathcal{B}) \otimes H_k(Y)$ *induit par* φ *a pour section le "cross-produit".*

Démonstration. – On utilise la technique des suites spectrales appliquée aux fibrés de la proposition 2. Pour cela on a besoin du

LEMME 2. – *Pour* $k \leqslant n$, $\pi_1(\mathcal{B}, \widetilde{p}(\widetilde{e}))$ *opère trivialement sur* $H_k(\overline{L})$.

Démonstration du lemme. – Soit $u \in \pi_1(\mathcal{B}, \widetilde{p}(\widetilde{e}))$ et soit g un élément de la classe d'homotopie d'applications continues de $\overline{L}$ dans $\overline{L}$ induite par u. On peut choisir g de manière à ce que $g(\overline{Y}) \subset \overline{Y}$ puisque $\widetilde{Y} - \overline{S}$ est un sous-fibré de $\widetilde{X} - \overline{S}$ de fibre type $\overline{Y}$. Comme $\widetilde{Y} - \overline{S}$ est trivialisable $g \mid \overline{Y}$ induit l'application identique de $H_k(\overline{Y})$ pour tout k. On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_k(\overline{L}) & \xrightarrow{g_*} & H_k(\overline{L}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_k(\overline{Y}) & \xrightarrow{1_{H_k(\overline{Y})}} & H_k(\overline{Y}) \end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par l'inclusion. Or, $\mathcal{L}$ étant transverse à toutes les strates de Σ (cf. Proposition 1), $\Sigma \mid \mathcal{L}$ est une stratification de Whitney de $\mathcal{L} \cap H$ (cf. [2] lemme 2.2.2). Et A étant transverse à toutes les strates de Σ dans $\mathbf{P}^{n+2}$ est transverse à toutes les strates de $\Sigma \mid \mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}$. On peut donc appliquer l'hypothèse d'induction à $\mathcal{L} \cap H$, $\Sigma \mid \mathcal{L}$ et A compte tenu des isomorphismes $\overline{L} \xrightarrow{\sim} L$ et $\overline{Y} \xrightarrow{\sim} Y$ induits par φ donne que les flèches verticales du diagramme ci-dessus sont surjectives pour $k \leqslant n$. Il en résulte que g induit l'identité de $H_k(\overline{L})$ pour $k \leqslant n$. Le lemme est démontré.

On reprend la démonstration de la proposition 6.

Soit $E^r_{p,q}$ la suite spectrale associée au fibré $\widetilde{X} - \overline{S}$ de projection $\widetilde{p} \mid \widetilde{X} - \overline{S}$ et de base $\mathcal{B}$ et $E'^r_{p,q}$ la suite spectrale associée au sous-fibré trivial $\widetilde{Y} - \overline{S}$ de projection $\widetilde{p} \mid \widetilde{Y} - \overline{S}$ et de base $\mathcal{B}$. On rappelle que les fibres types respectives sont $\overline{L}$ et $\overline{Y} \subset \overline{L}$.

D'après le lemme 1 et la trivialité de $\widetilde{Y} - \overline{S}$, on a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} E^2_{p,q} & \xrightarrow{\sim} & H_p(\mathcal{B}, H_q(\overline{L})) \\ \uparrow & & \uparrow \\ E'^2_{p,q} & \xrightarrow{\sim} & H_p(\mathcal{B}, H_q(\overline{Y})) \end{array}$$

pour $q \leqslant n$ où les flèches horizontales sont des isomorphismes et les flèches verticales sont induites par les inclusions. On a aussi des isomorphismes

$$E'^2_{p,q} \xrightarrow{\sim} H_p(\mathcal{B}, H_q(\overline{Y}))$$

pour $q > n$. Or $\mathcal{B}$ a le type d'homotopie d'un graphe, donc

$$E^2_{p,q} = 0 \quad \text{pour} \quad p \geqslant 2 \quad \text{et} \quad q \leqslant n,$$

$$E'^2_{p,q} = 0 \quad \text{pour} \quad p \geqslant 2 \quad \text{et tout } q.$$

Par suite

$$\begin{array}{llll} E^2_{0,q} = E^r_{0,q} = E^\infty_{0,q} & \text{pour} & r \geqslant 2 & \text{et} \quad q \leqslant n+1 \\ E'^2_{0,q} = E'^r_{0,q} = E'^\infty_{0,q} & \text{pour} & r \geqslant 2 & \text{et tout } q, \\ E^2_{1,q} = E^r_{1,q} = E^\infty_{1,q} & \text{pour} & r \geqslant 2 & \text{et} \quad q \leqslant n+1 \\ E'^2_{1,q} = E'^r_{1,q} = E'^\infty_{1,q} & \text{pour} & r \geqslant 2 & \text{et tout } q \\ E^r_{p,q} = E^\infty_{p,q} = 0 & \text{pour} & p \geqslant 2,\ r \geqslant 2 & \text{et} \quad q \leqslant n \\ E'^r_{p,q} = E'^\infty_{p,q} = 0 & \text{pour} & p \geqslant 2,\ r \geqslant 2 & \text{et tout } q. \end{array}$$

Et comme $H_0(\mathcal{B})$ et $H_1(\mathcal{B})$ sont sans torsion on obtient les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} E^\infty_{0,q} \arrow[r, "\sim"] & H_q(\overline{L}) \\ E'^\infty_{0,q} \arrow[u] \arrow[r, "\sim"] & H_q(\overline{Y}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} E^\infty_{1,q} \arrow[r, "\sim"] & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_q(\overline{L}) \\ E'^\infty_{1,q} \arrow[u] \arrow[r, "\sim"] & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_q(\overline{Y}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

pour $q \leqslant n$, où les flèches horizontales sont des isomorphismes et les flèches verticales sont induites par les inclusions.

Soit maintenant $D_{p,q}$ (resp. $D'_{p,q}$) le sous-groupe de $H(\widetilde{X} - \overline{S})$ (resp. $H(\widetilde{Y} - \overline{S})$) de degré filtrant p et de degré complémentaire q. Pour tout q,

$D_{0,q}$ est l'image de $H_q(\overline{L})$ dans $H_q(\widetilde{X} - \overline{S})$ par j_q .

$D'_{0,q}$ est l'image de $H_q(\overline{Y})$ dans $H_q(\widetilde{Y} - \overline{S})$ par $\overline{j_q}$,

$D_{p,q} = H_{p+q}(\widetilde{X} - \overline{S})$ pour $p \geqslant 1$,

$D'_{p,q} = H_{p+q}(\widetilde{Y} - \overline{S})$ pour $p \geqslant 1$.

On sait qu'on a, pour tout q, les deux suites exactes reliées par l'homomorphisme induit par les inclusions

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D_{0,q} \arrow[r] & E_{0,q} \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D'_{0,q} \arrow[r] \arrow[u] & E'_{0,q} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

et aussi

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D_{0,q+1} \arrow[r] & D_{1,q} \arrow[r] & E^{\infty}_{1,q} \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D'_{0,q+1} \arrow[r] \arrow[u] & D'_{1,q} \arrow[r] \arrow[u] & E'^{\infty}_{1,q} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

D'où, en combinant avec ce qui précède, les suites exactes homomorphes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_q(L) \arrow[r] & H_q(\widetilde{X} - \overline{S}) \arrow[r, "s_k"] & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_{q-1}(\overline{L}) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H_q(\overline{Y}) \arrow[r] \arrow[u] & H_q(\widetilde{Y} - \overline{S}) \arrow[r, "\overline{s_k}"] \arrow[u] & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_{q-1}(\overline{Y}) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

pour $q \leqslant n$, et

$$\begin{tikzcd} & H_{n+1}(\overline{L}) \arrow[r] & H_{n+1}(\widetilde{X} - \overline{S}) \arrow[r, "s_{n+1}"] & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_n(\overline{L}) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H_{n+1}(\overline{Y}) \arrow[r] \arrow[u] & H_{n+1}(\widetilde{Y} - \overline{S}) \arrow[r, "\overline{s_{n+1}}"] \arrow[u] & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_n(\overline{Y}) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par les inclusions.

Or, on sait que c'est bien j_q et j_{n+1} (resp. $\overline{j_q}$ et $\overline{j_{n+1}}$) qui interviennent dans les suites exactes supérieures (resp. inférieures) précédentes. On sait aussi que, comme $\widetilde{Y} - \overline{S} = \mathcal{B} \times Y$, les suites exactes inférieures ne sont autres, à l'isomorphisme $\overline{Y} \xrightarrow{\sim} Y$ induit par φ près, que celles de Künneth. Par conséquent, le composé de $\overline{s_k}$ avec l'isomorphisme $H_1(\mathcal{B}) \otimes H_k(\overline{Y}) \to H_1(\mathcal{B}) \otimes H_k(Y)$ induit par φ a pour section le "cross-produit". La proposition 6 est démontrée.

PROPOSITION 7. – *Les notations étant celles des propositions 5 et 6, $s_k \circ g_k$ est surjectif pour $k \leqslant n+1$ et pour $k \leqslant n$ le noyau de $s_k \circ g_k$, le noyau de g_k, l'image de $\tau_k \circ \delta_k$ et l'image de u_k sont égaux.*

Démonstration. – Les propositions 5 et 6 donnent, pour $k \leqslant n+1$ le diagramme commutatif avec suite verticale droite et suites horizontales exactes :

$$\begin{tikzcd}
H_{k-1}(Y) \arrow[r, "\sigma_k"] \arrow[d, "\delta_k"] & H_{k+1}(\widetilde{X}) \arrow[d, "u_k"] & & \\
\oplus^l H_{k-1}(Y) \arrow[r, "\tau_k"] \arrow[dd, "c_k"] & \bigoplus_{i=1}^{l} H_{k-1}(\overline{S}_i) \arrow[d, "g_k"] & & \\
& H_k(\widetilde{X} - \overline{S}) \arrow[r, "s_k"] & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_{k-1}(\overline{L}) \arrow[r] & 0 \\
H_k(\widetilde{Y} - \overline{S}) \arrow[ur, "h_k"] \arrow[rr, "\bar{s}_k"] & & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_{k-1}(\overline{Y}) \arrow[r] \arrow[u, "f_{k-1}"] & 0
\end{tikzcd}$$

où f_{k-1} est induit par l'inclusion $\overline{Y} \hookrightarrow \overline{L}$. Comme dans la démonstration du lemme 2, l'hypothèse d'induction donne que l'homomorphisme $H_{k-1}(\overline{Y}) \to H_{k-1}(\overline{L})$ induit par l'inclusion est surjectif pour $k \leqslant n+1$ et bijectif pour $k \leqslant n$. Comme $H_1(\mathcal{B})$ est sans torsion, f_{k-1} est bijectif pour $k \leqslant n$ et surjectif pour $k = n+1$.

On prend les $[e_i]$, $1 \leqslant i \leqslant l$, de la proposition 5 comme générateurs (non indépendants) de $H_1(\mathcal{B})$.

Soit $\left[\sum_{i=1}^{l} \alpha_i e_i\right] \otimes [z]$ un élément décomposable de

$$H_1(\mathcal{B}) \otimes H_{k-1}(\overline{L}) \quad \text{avec} \quad k \leqslant n+1 .$$

Soit $[z_1] \in H_{k-1}(\overline{Y})$ tel que

$$f_{k-1}\left(\left[\sum_{i=1}^{l} \alpha_i e_i\right] \otimes [z_1]\right) = \left[\sum_{i=1}^{l} \alpha_i e_i\right] \otimes [z] .$$

Soit z_2 le cycle de Y correspondant à z_1 par l'isomorphisme $\overline{\mathrm{Y}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Y}$ induit par φ. D'après la proposition 6 on a

$$\overline{s}_k\left(\left[\sum_{i=1}^{l} \alpha_i e_i \times z_2\right]\right) = \left[\sum_{i=1}^{l} \alpha_i e_i\right] \circledast [z_1] ,$$

donc d'après le diagramme ci-dessus

$$(s_k \circ h_k)\left(\left[\sum_{i=1}^{l} \alpha_i e_i \times z_2\right]\right) = \left[\sum_{i=1}^{l} \alpha_i e_i\right] \circledast [z]$$

Mais

$$\left[\sum_{i=1}^{l} \alpha_i e_i \times z_2\right] = \sum_{i=1}^{l} [e_i \times \alpha_i z_2] = c_k\left(\overset{l}{\underset{i=1}{\oplus}} [\alpha_i z_2]\right) .$$

Cela montre que $s_k \circ h_k \circ \mathrm{C}_k$ est surjectif. Comme

$$s_k \circ h_k \circ c_k = s_k \circ g_k \circ \tau_k ,$$

$s_k \circ g_k$ est surjectif.

Soit maintenant $x \in \overset{l}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathrm{H}_{k-1}(\overline{\mathrm{S}}_i)$ avec $k \leqslant n$. D'après la proposition 3, τ_k est surjectif et on peut trouver des $(k-1)$-cycles de Y $z_1, \ldots, z_l$ tels que $x = \tau_k\left(\overset{l}{\underset{i=1}{\oplus}} [z_i]\right)$. Donc si x est dans le noyau de $s_k \circ g_k$ on a

$$(f_{k-1} \circ \overline{s}_k \circ c_k)\left(\overset{l}{\underset{i=1}{\oplus}} [z_i]\right) = 0 ,$$

d'où
$$f_{k-1}\left(\sum_{i=1}^{l} [e_i] \circledast [\overline{z}_i]\right) = 0$$

où $\overline{z}_i$ correspond à z_i par l'isomorphisme $\mathrm{Y} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{Y}}$ réciproque de celui induit par φ. Comme f_{k-1} est un isomorphisme, on a

$$\sum_{i=1}^{l} [e_i] \circledast [\overline{z}_i] = 0 .$$

D'après le choix des e_i cela n'est possible que si $\overline{z}_1 = \cdots = \overline{z}_l$ c'est-à-dire $z_1 = \cdots = z_l$.

Alors

$$x = \tau_k(\oplus^l [z_1]) = (\tau_k \circ \delta_k)([z_1]) .$$

On a ainsi montré que noyau $s_k \circ g_k \subset$ image $\tau_k \circ \delta_k$ pour $k \leqslant n$. Or, pour $k \leqslant n$, on a les inclusions triviales

$$\text{image } \tau_k \circ \delta_k \subset \text{image } u_k = \text{noyau } g_k \subset \text{noyau } s_k \circ g_k .$$

D'où, pour $k \leqslant n$,

$$\text{image } \tau_k \circ \delta_k = \text{image } u_k = \text{noyau } g_k = \text{noyau } s_k \circ g_k .$$

La démonstration de la proposition 7 est ainsi achevée.

Les propositions 3, 4, 5, 6 et 7 donnent les diagrammes commutatifs avec lignes et colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{H}_{k+1}(\widetilde{\mathrm{X}}) \arrow[d, "u_k"] & & \\
 & & \bigoplus_{i=1}^{l} \mathrm{H}_{k-1}(\overline{\mathrm{S}}_i) \arrow[d, "g_k"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}_k(\overline{\mathrm{L}}) \arrow[r, "j_k"] & \mathrm{H}_k(\widetilde{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{S}}) \arrow[r, "s_k"] \arrow[d, "i_k"] & \mathrm{H}_1(\mathcal{B}) \otimes \mathrm{H}_{k-1}(\overline{\mathrm{L}}) \arrow[r] & 0 \\
0\ \mathrm{H}_{k-2}(\mathrm{Y}) \arrow[rr, "\sigma_{k-1}"] \arrow[d, "\delta_{k-1}"] & & \mathrm{H}_k(\widetilde{\mathrm{X}}) \arrow[r, "\epsilon_k"] \arrow[d, "u_{k-1}"] & \mathrm{H}_k(\mathrm{X}) \arrow[r] & 0 \\
\oplus^l \mathrm{H}_{k-2}(\mathrm{Y}) \arrow[rr, "\tau_{k-1}"] & & \bigoplus_{i=1}^{l} \mathrm{H}_{k-2}(\overline{\mathrm{S}}_i) \arrow[d, "g_{k-1}"] & & \\
 & & \mathrm{H}_{k-1}(\widetilde{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{S}}) & &
\end{tikzcd}$$

pour $k \leqslant n$, et

$$\begin{tikzcd}
 & & \overset{l}{\underset{i=1}{\oplus}} H_n(\overline{S}_i) \arrow[d, "g_{n+1}"] & & \\
 & H_{n+1}(\overline{L}) \arrow[r, "j_{n+1}"] & H_{n+1}(\widetilde{X} - \overline{S}) \arrow[r, "s_{n+1}"] \arrow[d, "i_{n+1}"] & H_1(\mathcal{B}) \otimes H_n(\overline{L}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_{n-1}(Y) \arrow[r, "\sigma_n"] \arrow[d, "\delta_n"] & H_{n+1}(\widetilde{X}) \arrow[r, "\epsilon_{n+1}"] \arrow[d, "u_n"] & H_{n+1}(X) \arrow[r] & 0 \\
 & \oplus^l H_{n-1}(Y) \arrow[r, "\tau_n"] & \overset{l}{\underset{i=1}{\oplus}} H_{n-1}(\overline{S}_i) \arrow[d, "g_n"] & & \\
 & & H_n \widetilde{X} - \overline{S}) & &
\end{tikzcd}$$

avec les propriétés suivantes :

i) pour $k \leqslant n + 1$, j_k, i_k sont induits par inclusion et ϵ_k est induit par φ

ii) pour $k \leqslant n + 1$, $s_k \circ g_k$ est surjectif

iii) pour $k \leqslant n$,

$$\text{image } \tau_k \circ \delta_k = \text{image } u_k = \text{noyau } g_k = \text{noyau } s_k \circ g_k$$

iv) pour $k \leqslant n$, $\tau_k \circ \delta_k$ est injectif.

Cela permet d'obtenir la

PROPOSITION 8. – *L'homomorphisme*

$$\epsilon_k \circ i_k \circ j_k : H_k(\overline{L}) \to H_k(X)$$

est bijectif pour $k \leqslant n$ et surjectif pour $k = n + 1$.

Démonstration. – Elle consiste à se livrer à la chasse dans les diagrammes précédents.

1) $\epsilon_k \circ i_k \circ j_k$ est injectif pour $k \leqslant n$: Soit x dans le noyau de $\epsilon_k \circ i_k \circ j_k$. Alors $(i_k \circ j_k)(x)$ est dans le noyau de ϵ_k. Donc il existe $y \in H_{k-2}(Y)$ tel que $(i_k \circ j_k)(x) = \sigma_{k-1}(y)$. Mais

$$(\tau_{k-1} \circ \delta_{k-1})(y) = (u_{k-1} \circ i_k)(j_k(x)) = 0 .$$

D'après iv), $y = 0$ et $(i_k \circ j_k)(x) = 0$, c'est-à-dire que $j_k(x)$ est dans le noyau de i_k. Donc il existe $j \in \bigoplus_{i=1}^{l} H_{k-1}(\overline{S}_i)$ tel que $j_k(x) = g_k(z)$. Mais $(s_k \circ g_k)(z) = (s_k \circ j_k)(x) = 0$. D'après iii), il existe $t \in H_{k+1}(\widetilde{X})$ tel que $z = u_k(t)$. Alors $j_k(x) = (g_k \circ u_k)(t) = 0$. Comme j_k est injective, on a $x = 0$.

2) $\epsilon_k \circ i_k \circ j_k$ est surjectif pour $k \leqslant n + 1$: Soit $x \in H_k(X)$. Alors il existe $y \in H_k(\widetilde{X})$ tel que $\epsilon_k(y) = x$. Mais $(g_{k-1} \circ u_{k-1})(y) = 0$ donc $u_{k-1}(y)$ est dans le noyau de g_{k-1}. D'après iii) il existe $z \in H_{k-2}(Y)$ tel que $(\tau_{k-1} \circ \delta_{k-1})(z) = u_{k-1}(y)$. Donc $y - \sigma_{k-1}(z)$ appartient au noyau de u_{k-1} et il existe $t \in H_k(\widetilde{X} - \overline{S})$ tel que $i_k(t) = y - \sigma_{k-1}(z)$ donc tel que $(\epsilon_k \circ i_k)(t) = \epsilon_k(y) = x$. Maintenant d'après ii) il existe $u \in \bigoplus_{i=1}^{l} H_{k-1}(\overline{S}_i)$ tel que $s_k(t) = (s_k \circ g_k)(u)$ d'où il résulte que $t - g_k(u)$ est dans le noyau de s_k. Donc il existe $v \in H_k(\overline{L})$ tel que $j_k(v) = t - g_k(u)$. De là on tire que $(i_k \circ j_k)(v) = i_k(t)$ et que $(\epsilon_k \circ i_k \circ j_k)(v) = (\epsilon_k \circ i_k)(t) = x$. La proposition 8 est démontrée.

COROLLAIRE 1. – *Pour* $k \leqslant n + 1$, $H_k(X, L) = 0$.

Démonstration. – D'après i), si l'on compose $\epsilon_k \circ i_k \circ j_k$ par l'isomorphisme $H_k(L) \to H_k(\overline{L})$ induit par l'isomorphisme $L \xrightarrow{\sim} \overline{L}$ réciproque de celui induit par φ, on obtient l'homomorphisme $H_k(L) \to H_k(X)$ induit par l'inclusion : le corollaire résulte alors de la proposition 8 et de la suite exacte d'homologie.

COROLLAIRE 2. – *Si* cod $H \geqslant 2$, *on a* $\pi_k(X, L, e) = 1$ *pour* $k \leqslant n + 1$ *et* $\pi_1(X, e) = 1$.

Démonstration. – D'après l'hypothèse de récurrence on a $\pi_1(L, e) = 1$ puisque, $\mathcal{L}$ étant transverse à toutes les strates Σ, la codimension de $\mathcal{L} \cap H$ dans $\mathcal{L}$ est $\geqslant 2$. Alors le corollaire 1 et le théorème d'Hurewicz relatif donnent $\pi_k(X, L, e) = 1$ pour $k \leqslant n + 1$. En particulier $\pi_1(X, L, e) = 1$ et comme $\pi_1(L, e) = 1$ on obtient $\pi_1(X, e) = 1$.

Les corollaires 1 et 2 achèvent la récurrence.

Ajouté à l'impression : Prof. Ludger Kaup me signale qu'avec G. Weidner il a obtenu le même résultat par d'autres méthodes ; à paraître dans *Mathematische Zeitschrift*.