

MICHEL WALDSCHMIDT

**Dimension algébrique de sous-groupes  
analytiques de variétés de groupe**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 25, n° 1 (1975), p. 23-33

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1975\\_\\_25\\_1\\_23\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_1_23_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## DIMENSION ALGÈBRIQUE DE SOUS-GROUPES ANALYTIQUES DE VARIÉTÉS DE GROUPE

par Michel WALDSCHMIDT

Soient  $G$  une variété de groupe définie sur le corps  $\bar{\mathbf{Q}}$  des nombres algébriques, et  $\varphi : \mathbf{C}^n \rightarrow G_{\mathbf{C}}$  un sous-groupe à  $n$  paramètres de  $G$ , de dimension algébrique  $d$ . Nous nous proposons de majorer le rang  $l$  (sur  $\mathbf{Z}$ ) des sous-groupes  $\Gamma$  de  $\mathbf{C}^n$  dont l'image par  $\varphi$  est contenue dans le groupe  $G_{\bar{\mathbf{Q}}}$  des points algébriques de  $G$ .

Ce type de résultat n'est pas nouveau [4, 9]. Ainsi, le théorème 2 de E. Bombieri et S. Lang [2] montre que, (si les points de  $\Gamma$  sont très bien distribués dans  $\mathbf{C}^n$  quand  $n \geq 2$ ), pour  $d \geq n + 1$ , on a  $l \leq n^2 + 3n$  pour des variétés linéaires, et  $l \leq 2n^2 + 4n$  pour des variétés abéliennes. Ces majorations sont obtenues à partir d'un critère arithmétique pour que des fonctions, *analytiques dans une boule*, soient algébriquement dépendantes sur  $\mathbf{Q}$ . Ces résultats sont donc *locaux*.

Nous montrerons que, sous les mêmes hypothèses, on a  $ld \leq n(l + d)$  dans le cas linéaire, et  $ld \leq n(l + 2d)$  dans le cas abélien. Nous obtiendrons d'autres inégalités sous des hypothèses de répartition moins fortes. Ces majorations étaient déjà connues pour des sous-groupes à 1 paramètre [7, 9] ; nous les obtiendrons, pour  $n \geq 2$ , à partir d'un critère concernant des fonctions *méromorphes dans  $\mathbf{C}^n$ , d'ordre fini*.

### 1. Un critère de dépendance algébrique de fonctions méromorphes d'ordre fini.

Les notations sont celles de [2] ; la taille ("size") d'un nombre complexe algébrique  $\alpha$  sera notée  $s(\alpha)$ .

Nous commencerons par démontrer le théorème suivant.

**THEOREME 1.** — Soient  $l, \lambda, \rho_1, \dots, \rho_d$  des nombres réels positifs,  $K$  un corps de nombres,  $(S_N)_{N \geq 1}$  une suite de sous-ensembles de  $C^n$ ,  $f_1, \dots, f_d$  des fonctions méromorphes dans  $C^n$ , d'ordre (strict) inférieur ou égal à  $\rho_1, \dots, \rho_d$  respectivement, et  $g_1, \dots, g_d$  des fonctions entières dans  $C^n$ , d'ordre (strict) inférieur ou égal à  $\rho_1, \dots, \rho_d$  respectivement, telles que  $g_1 f_1, \dots, g_d f_d$  soient entières dans  $C^n$ .

On suppose

$$\max_{z \in S_N} |z| \leq N \quad ; \quad \text{Card } S_N \geq N^l \quad ; \quad \min_{\substack{u \neq v \\ u, v \in S_N}} |u - v| \geq N^{-\lambda} \quad , \quad (1)$$

pour  $N \rightarrow +\infty$  ;

$$h_i(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad f_i(z) \in K \quad \text{pour} \quad z \in S_N \quad , \quad \text{et}$$

$$\max_{z \in S_N} \left( s(f_i(z)) \quad ; \quad \text{Log} \frac{1}{|h_i(z)|} \right) \leq N^{\rho_i} \quad \text{pour} \quad N \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Si l'inégalité

$$(d-1)l > \rho_1 + \dots + \rho_d + 2d(n-1)(\lambda+1) \quad (3)$$

est satisfaite, alors  $f_1, \dots, f_d$  sont algébriquement dépendantes sur  $Q$ .

Etant donné que, dans une boule  $B_R$  (de centre  $O$  et de rayon  $R$ ) de  $C^n$ , le nombre maximum  $\nu_R$  de points vérifiant

$$\min_{u \neq v} |u - v| \geq R^{-\lambda}$$

est majoré par

$$\nu_R \leq R^{2n} \cdot R^{2n\lambda} \quad ,$$

les relations (1) entraînent  $l \leq 2n(\lambda+1)$ .

Inversement, pour  $l \geq 2n$  et  $\lambda = \frac{l}{2n} - 1$ , la relation (3) s'écrit :

$$ld > n(l + \rho_1 + \dots + \rho_d).$$

On peut démontrer un analogue local de ce résultat, qui contienne le théorème 1 de [2] ; on suppose seulement que les fonctions  $f_i, g_i$  sont analytiques dans une boule  $B_R$  (il n'y a donc plus de condition

sur leurs ordres), que les ensembles  $S_N$  sont contenus dans une boule  $B_r$ , avec  $R > 12nr$  (on aura donc  $l \leq 2n\lambda$ ), et on remplace l'inégalité (3) par

$$(d-1)l > \rho_1 + \dots + \rho_d + 2d(n-1)\lambda.$$

Si la suite  $(S_N)$  est  $\lambda$ -distribuée au sens de [2], alors les relations (1) sont vérifiées avec  $l = 2n\lambda$ .

Pour démontrer le théorème 1, nous utiliserons une variante du lemme de Schwarz à plusieurs variables.

LEMME 1. — Soit  $f$  une fonction analytique dans une boule  $B_R$  de  $C^n$ , admettant des zéros  $z_1, \dots, z_s$  (comptés avec leur ordre de multiplicité) dans une boule  $B_{r/2}$ , avec  $r \leq R/7n$ . Soit

$$\delta = \min \left\{ \frac{r}{2} ; \inf_{z_i \neq z_j} |z_i - z_j| \right\}$$

Alors on a

$$\text{Log } |f|_r \leq \text{Log } |f|_R - \frac{1}{7} \cdot s \cdot \left( \frac{\delta}{r} \right)^{2n-2} \cdot \text{Log } \frac{R}{7nr}.$$

*Démonstration du lemme.* — D'après le corollaire de la proposition 3 de [2], la masse moyenne  $\Theta_W(r, 0)$  du diviseur  $W$  de  $f$  dans la boule  $B_r$  est minorée par

$$\Theta_W(r, 0) \geq s \cdot \left( \frac{\delta}{r} \right)^{2n-2}.$$

La proposition 4 de [1] (avec  $\tau = \frac{6}{7}$ ) donne alors le résultat.

*Démonstration du théorème.* — On commence par se ramener, par récurrence sur  $d$ , au cas où

$$\max_{1 \leq i \leq d} \rho_i < \frac{\rho_1 + \dots + \rho_d + l}{d} ;$$

en effet, si, par exemple, on avait

$$(d-1)\rho_d \geq \rho_1 + \dots + \rho_{d-1} + l,$$

on déduirait de l'hypothèse (3) l'inégalité

$$(d-2)l > \rho_1 + \dots + \rho_{d-1} + 2(d-1)(n-1)(\lambda+1),$$

et il suffirait alors que l'on démontre le résultat pour les fonctions  $f_1, \dots, f_{d-1}$ .

D'autre part, quitte à remplacer chaque ensemble  $S_N$  par un de ses sous-ensembles, on pourra supposer

$$N^l \ll \text{Card } S_N \ll N^l.$$

On notera  $C$  une constante (indépendante de  $N$ ) telle que, pour  $N$  assez grand, on ait :

$$\max_{z \in S_N} |z| \leq C.N.$$

Soit  $\rho = (\rho_1 + \dots + \rho_d)/d$  la moyenne des  $\rho_i$ . Considérons un entier  $N$  suffisamment grand. D'après un lemme classique de Siegel [3], il existe un polynôme non nul  $P_N \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_d]$ , de degré  $R_i$  par rapport à  $X_i$ , ( $1 \leq i \leq d$ ), et de hauteur  $H$ , avec

$$R_i \ll N^{\frac{l}{d} + \rho - \rho_i}, \quad (1 \leq i \leq d), \quad \text{et} \quad \text{Log } H \ll N^{\frac{l}{d} + \rho},$$

pour  $N \rightarrow +\infty$ , tel que la fonction  $F_N = P_N(f_1, \dots, f_d)$  vérifie

$$F_N(z) = 0 \quad \text{pour tout } z \in S_N.$$

Soit

$$G_N = g_1^{R_1} \dots g_d^{R_d} \cdot F_N.$$

Nous allons montrer, par récurrence, que l'on a, pour tout  $M \geq N$ ,

$$(I)_M : F_N(z) = 0 \quad \text{pour tout } z \in S_M,$$

et

$$(II)_M : \text{Log } |G_N|_{\mathbf{C}(M+1)} \leq -M^{l-2(n-1)(\lambda+1)}.$$

On en déduira

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \text{Log } |G_N|_R = 0,$$

donc  $F_N = 0$ , ce qui montrera que les fonctions  $f_1, \dots, f_d$  sont algébriquement dépendantes sur  $\mathbf{Q}$ .

Nous avons construit  $F_N$  de manière à vérifier  $(I)_N$  ; montrons que  $(I)_M$  implique  $(II)_M$ , puis que  $(II)_M$  implique  $(I)_{M+1}$ .

$(I)_M \Rightarrow (II)_M$ . Supposons que  $(I)_M$  soit vraie ; on utilise le lemme 1 pour la fonction  $G_N$  et les deux boules  $B_r$  et  $B_R$ , avec  $r = C(M + 1)$  et  $R = 14nr$ , en remarquant que les fonctions entières  $g_i f_i$  sont d'ordre  $\leq \rho_i$ .

On a :

$$\text{Log } |G_N|_R \ll \sum_{i=1}^d N^{\frac{l}{d} + \rho - \rho_i} \cdot R^{\rho_i} \ll M^{\frac{l}{d} + \rho} ;$$

d'autre part, on a, pour  $s = \text{Card } S_M$  et  $\delta = \min_{\substack{u \neq v \\ u, v \in S_M}} |u - v|$  :

$$\frac{1}{7} \cdot s \cdot \left(\frac{\delta}{r}\right)^{2n-2} \cdot \text{Log } \frac{R}{7nr} \gg M^l \cdot \left(\frac{M^{-\lambda}}{C \cdot M}\right)^{2n-2} \gg M^{l-2(n-1)(\lambda+1)}.$$

Grâce à l'hypothèse (3), on en déduit  $(II)_M$ .

$(II)_M \Rightarrow (I)_{M+1}$ . L'inégalité  $(II)_M$  montre que, pour  $z \in S_{M+1}$ , on a

$$\text{Log } F_N(z) \ll -M^{l-2(n-1)(\lambda+1)} ;$$

or  $F_N(z)$  appartient à  $K$ , et sa taille est majorée par

$$s(F_N(z)) \ll M^{\frac{l}{d} + \rho} ;$$

l'inégalité

$$-2 \cdot [K : Q] \cdot s(\alpha) \ll \text{Log } |\alpha|$$

étant vérifiée pour tout élément non nul  $\alpha$  de  $K$ , on en déduit

$$F_N(z) = 0 \quad \text{pour tout } z \in S_{M+1},$$

et le théorème 1 est démontré.

## 2. Application aux sous-groupes à plusieurs paramètres.

Le théorème 1 permet de majorer le nombre de points  $Q$ -linéairement indépendants où un sous-groupe à  $n$  paramètres d'une variété de groupe, linéaire ou abélienne, prend des valeurs algébriques.

THEOREME 2. — Soient  $G$  une variété de groupe définie sur  $\bar{\mathbb{Q}}$ ,  $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow G_{\mathbb{C}}$  un sous-groupe à  $n$  paramètres de  $G$ , de dimension algébrique  $d$ , et  $u_1, \dots, u_l$  des éléments  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants de  $\mathbb{C}^n$ , tels que

$$\varphi(u_j) \in G_{\bar{\mathbb{Q}}} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq l.$$

Pour  $N \geq 1$ , soit

$$\Gamma_N = \{k_1 u_1 + \dots + k_l u_l ; k_j \in \mathbb{Z}, |k_j| \leq N\};$$

on suppose

$$\min_{\substack{z \in \Gamma_N \\ z \neq 0}} |z| \gg N^{-\lambda} \quad \text{pour } N \rightarrow +\infty.$$

Alors

1) si  $G$  est une variété linéaire, on a

$$l(d-1) \leq d + 2d(n-1)(\lambda+1);$$

2) si  $G$  est une variété abélienne, on a

$$l(d-1) \leq 2d(n\lambda + n - \lambda).$$

Pour démontrer le théorème 2, on utilise des coordonnées projectives  $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_h)$ , avec  $\varphi_0 \neq 0$ ; les fonctions  $\varphi_i$  sont entières dans  $\mathbb{C}^n$ , d'ordre inférieur ou égal à 1 dans le cas linéaire, à 2 dans le cas abélien, et la dimension algébrique de  $\varphi$  est égale au degré de transcendance sur  $\mathbb{Q}$  du corps  $\mathbb{Q}\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_0}, \dots, \frac{\varphi_h}{\varphi_0}\right)$ . Comme les fonctions  $\varphi_i/\varphi_0$  ( $1 \leq i \leq h$ ) prennent des valeurs dans un corps de nombres aux points de  $\Gamma = \cup \Gamma_N$  qui ne sont pas pôles de  $\varphi_0$ , il ne reste plus qu'à vérifier l'hypothèse (2) du théorème 1.

Cette vérification est facile dans le cas linéaire (avec  $\rho = 1$  et  $S_N = \Gamma_N$ ); dans le cas abélien, on commence par éviter les pôles de  $\varphi_0$  en construisant un sous-ensemble  $S_N$  de  $\Gamma_N$  tel que

$$\text{Card } S_N \gg N^l \quad \text{et} \quad \max_{z \in S_N} \text{Log} \frac{1}{|\varphi_0(z)|} \ll N^2;$$

(cf. [7] § 3.5). On vérifie ensuite la majoration

$$\max_{z \in S_N} s\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_0}(z)\right) \ll N^2 \tag{4}$$

en utilisant la forme quadratique de Néron Tate (cf. [3] § II.4).

*Sous-groupes très bien distribués de  $C^n$ .*

Remarquons que le paramètre  $\lambda$  du théorème 2 doit vérifier :

$$\lambda \geq \max\left(0, \frac{l}{2n} - 1\right).$$

Inversement, si  $l \geq 2n$ , pour presque tout  $(u_1, \dots, u_l)$  de  $(C^n)$ , on a :

$$\min_{\substack{z \in \Gamma_N \\ z \neq 0}} |z| \gg N^{-\lambda}$$

dès que  $\lambda > \frac{l}{2n} - 1$  (cf. [2, 5]). Dans ce cas, la conclusion du théorème 2 devient :

$$ld \leq n(l + d) \text{ dans le cas linéaire,}$$

et

$$ld \leq n(l + 2d) \text{ dans le cas abélien.}$$

DEFINITION. — *Nous dirons qu'un sous-groupe  $\Gamma$  de  $C^n$  est très bien distribué s'il possède une base (sur  $Z$ )  $u_1, \dots, u_l$  telle que, pour tout  $\lambda > \max\left(0, \frac{l}{2n} - 1\right)$ , on ait*

$$\min_{\substack{z \in \Gamma_N \\ z \neq 0}} |z| \gg N^{-\lambda},$$

avec

$$\Gamma_N = \{k_1 u_1 + \dots + k_l u_l ; k_j \in Z, |k_j| \leq N\}.$$

Par exemple un sous-groupe de  $C^n$  engendré par des éléments  $R$ -linéairement indépendants est très bien distribué.

COROLLAIRE. — *Soient  $G$  une variété de groupe, linéaire ou abélienne, définie sur  $Q$ ,  $\varphi : C^n \rightarrow G_C$  un sous-groupe de  $G$  à  $n$  para-*



mètres, et  $\Gamma$  un sous-groupe très bien distribué de  $\mathbf{C}^n$ , de rang  $l$  sur  $\mathbf{Z}$ , tel que  $\varphi(\Gamma)$  soit contenu dans le groupe  $G_{\overline{\mathbf{Q}}}$  des points algébriques de  $G$ . On suppose que l'on a

$$l > n^2 + n \text{ dans le cas linéaire,}$$

et

$$l > 2n^2 + 2n \text{ dans le cas abélien.}$$

Alors  $\varphi(\mathbf{C}^n)$  est un sous-groupe algébrique (fermé) de  $G_{\mathbf{C}}$ , de dimension algébrique  $n$ .

### 3. Valeurs de sous-groupes à plusieurs paramètres en des points algébriques.

On peut améliorer le théorème 2 quand  $u_1, \dots, u_l$  appartiennent à  $\overline{\mathbf{Q}}^n$ .

THEOREME 3. — *Sous les hypothèses du théorème 2, on suppose que les coordonnées de  $u_1, \dots, u_l$  sont toutes algébriques, Alors on a :*

$$l(d-1) \leq d - n + 2d(n-1)(\lambda+1) \text{ dans le cas linéaire, et}$$

$$l(d-1) \leq 2(d-n) + 2d(n-1)(\lambda+1) \text{ dans le cas abélien.}$$

La démonstration est semblable à celle du théorème 2 ; on applique le théorème 1 à  $d$  fonctions  $f_1, \dots, f_d$  algébriquement indépendantes, avec

$$f_i(z) = z_i \text{ pour } z = (z_1, \dots, z_n), \quad 1 \leq i \leq n,$$

et  $f_{n+1}, \dots, f_d$  appartenant à l'ensemble

$$\left\{ \frac{\varphi_i}{\varphi_0}, \quad 1 \leq i \leq h \right\}.$$

Comme on a supposé que chaque  $u_i$  avait ses coordonnées algébriques, il est facile de trouver des valeurs convenables pour  $\lambda$ . Par exemple, si on écrit les coordonnées de  $u_i$  dans  $\mathbf{R}^{2n}$  sous la forme :

$$u_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,2n}), \quad 1 \leq i \leq l,$$

avec  $\alpha_{i,j}$  réels algébriques, on peut choisir  $\lambda = \max_{1 \leq j \leq 2n} h_j$ , où  $h_j$  est la dimension du  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel engendré par  $\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{i,j}$  (cf. [5] 7 D). De plus il existe des caractérisations simples des sous-groupes  $\Gamma$  de  $\overline{\mathbf{Q}}^n$  qui sont très bien distribués (voir par exemple [5] théorème 7 E).

*COROLLAIRE. — Soit A une variété abélienne définie sur  $\overline{\mathbf{Q}}$ . Soit  $\varphi : \mathbf{C}^n \rightarrow A_{\mathbf{C}}$  un sous-groupe à n paramètres de A, et  $\Gamma$  un sous-groupe très bien distribué de  $\overline{\mathbf{Q}}^n$ , de rang  $\geq 2n + 1$  sur  $\mathbf{Z}$ , tel que  $\varphi(\Gamma)$  soit contenu dans le groupe  $A_{\overline{\mathbf{Q}}}$  des points algébriques de A.*

*Alors  $\varphi(\mathbf{C}^n)$  est une sous-variété abélienne (donc fermée) de  $A_{\mathbf{C}}$ , de dimension n.*

#### 4. Compléments.

Dans les théorèmes précédents, on peut remplacer partout le corps  $\overline{\mathbf{Q}}$  des nombres algébriques (ou le corps de nombres K) par une extension de  $\mathbf{Q}$  de type de transcendance inférieur ou égal à  $\tau$  sur  $\mathbf{Q}$  (et de type fini sur  $\mathbf{Q}$ ) ; cf. [3, 7]. Dans ces conditions, l'hypothèse (3) du théorème 1 doit être remplacée par

$$(d - \tau) l > \tau (\rho_1 + \dots + \rho_d) + 2d(n - 1) (\lambda + 1),$$

et la conclusion du théorème 2 devient :

$$l(d - \tau) \leq d\tau + 2d(n - 1) (\lambda + 1) \text{ dans le cas linéaire,}$$

et

$$l(d - \tau) \leq 2d\tau + 2d(n - 1) (\lambda + 1) \text{ dans le cas abélien.}$$

La seule difficulté nouvelle réside dans la vérification de (4) ; au lieu d'utiliser la forme quadratique de Néron-Tate, on utilise la fonction taille sur les variétés abéliennes, introduite par A. Altman (cf. [8]).

D'autre part, on peut améliorer tous ces énoncés quand on normalise le sous-groupe  $\varphi$ , de telle manière que sa dérivée à l'origine soit algébrique [3].

Enfin ces résultats possèdent des analogues p-adiques (voir [6] théorème 2 et [7] proposition 7) ; les fonctions considérées ne sont plus définies que localement, et l'équivalent p-adique du théorème 1 doit être énoncé pour des fonctions analytiques dans un disque ; le lemme de Schwarz correspondant a été démontré par J.P. Serre [6].

ADDITIF. On peut améliorer le théorème 3 dans le cas abélien :

$$l(n + d - 1) \leq 2d + 2(n + d)(n - 1)(\lambda + 1),$$

et généraliser son corollaire à des variétés de groupe quelconques (Sém. P. LELONG, Analyse, 14<sup>e</sup> année, 1974/75).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. BOMBIERI, Algebraic values of meromorphic maps, *Inventiones Math.*, 10 (1970), 267-287, et 11 (1970), 163-166.
- [2] E. BOMBIERI, and S. LANG, Analytic subgroups of group varieties, *Inventiones Math.*, 11 (1970), 1-14.
- [3] S. LANG, Introduction to transcendental numbers. Reading Mass., Addison Wesley, 1966.
- [4] S. LANG, Transcendental numbers and diophantine approximations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77 (1971) 635-677.
- [5] W.M. SCHMIDT, Approximation to algebraic numbers, *L'Enseignement Math.*, 27 (1971) 187-253.
- [6] J.P. SERRE, Dependance d'exponentielles p-adiques, *Sem. Delange Pisot Poitou, Théorie des Nombres*, 7<sup>e</sup> année, 1965/66, n° 15, 14 pp.
- [7] M. WALDSCHMIDT, Propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes, *Acta Arithm.*, 23 (1973), 19-88.
- [8] WALDSCHMIDT, Dimension algébrique de sous-groupes analytiques de variétés abéliennes, *C.r. Acad. Sci. Paris, Sér. A* 274, (1972), 1681-1683.

- [9] WALDSCHMIDT, Transcendance dans les variétés de groupe, *Sem. Delange Pisot Poitou, Théorie des Nombres*, 14e année, 1972/73, n° 23, 16 pp.

Manuscrit reçu le 17 mai 1974  
accepté par C. Chabauty.

Michel WALDSCHMIDT,  
Analyse complexe et géométrie  
(Laboratoire associé au CNRS, n° 213)

Université de Paris VI  
Mathématiques, T 45-46  
11, Quai St Bernard  
75230 Paris Cedex 05.