ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JÉRÔME BRUN

Le problème de Levi dans les fibrés à base de Stein et à fibre une courbe compacte

Annales de l'institut Fourier, tome 27, nº 3 (1977), p. 17-28

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1977__27_3_17_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
27, 3 (1977), 17-28

LE PROBLÈME DE LEVI DANS LES FIBRES A BASE DE STEIN ET A FIBRE UNE COURBE COMPACTE

par Jérôme BRUN

0. Introduction.

Soient A et S deux espaces analytiques complexes, S étant de Stein, et $\rho : A \to S$ un morphisme de Stein, i.e. tel que, pour tout $s \in S$, il existe un voisinage U de s dans S tel que $\rho^{-1}(U)$ soit de Stein, Selon une conjecture classique, A serait alors de Stein (1).

Intéressons-nous à cette conjecture dans le cas où S est une variété (de Stein), A un ouvert d'un fibré holomorphe localement trivial, $\pi : X \to S$, à fibre une variété compacte, et $\rho = \pi_{|A}$. L'hypothèse que ρ est de Stein se traduit alors par :

1) A est localement de Stein, i.e. tout point x de la frontière ∂A admet un voisinage U_x dans X tel que $U_x \cap A$ soit de Stein. On dit qu'une variété est pseudo convexe (cf. Hörmander [6]) s'il existe dans cette variété une fonction plurisousharmonique positive propre ; un ouvert A d'une variété est localement pseudoconvexe si tout point x de ∂A admet un voisinage U_x tel que $U_x \cap A$ soit pseudoconvexe. On sait alors qu'un ouvert est localement pseudoconvexe si et seulement s'il est localement de Stein (cf. par exemple Hörmander théorème 5.2.10).

2) $A \cap \pi^{-1}(s)$ est de Stein pour tout $s \in S$.

Déterminer si A est de Stein est alors un problème de Levi, résolu dans [2] quand la fibre est homogène, et résolu par le théorème suivant quand la fibre est une courbe :

THEOREME. — *Soit* (X, π, S) *un fibré holomorphe localement trivial à base une variété de Stein* S *et à fibre une courbe compacte* Γ.

(1) Depuis la rédaction de cet article, cette conjecture a été mise en défaut par H. Skoda (Comptes Rendus, 284, Série A, 1977, p. 1199) et, indépendamment par J.E. Fornaess.

Si A *est un ouvert de* X *localement pseudoconvexe ne contenant aucune fibre, alors* A *est de Stein.*

Le cas où X est le produit d'une variété de Stein par un tore complexe de dimension un, a été traité, antérieurement à [2], par Matsugu [8].

Dans la démonstration du théorème, on traite au paragraphe 2 le cas du fibré trivial $X = S \times \Gamma$. Pour construire des fonctions plurisousharmoniques (*psh*) sur A tendant vers l'infini aux parties de la frontière de A non transverses aux fibres, on introduit une distance "horizontale" au bord de A (Lemme 2.1), qui n'est pas nécessairement continue. D'où le paragraphe 1 où l'on étend aux fonctions *psh* des résultats classiques dans le cas des fonctions *psh* continues. D'autre part, pour construire des fonctions *psh* tendant vers l'infini aux autres points de la frontière de A, on utilise une inégalité dûe à Elencwajg [3] sur des métriques kälhériennes.

Le passage au cas du fibré est traité au paragraphe 3 : quand le genre de la fibre est $\geqslant 2$, on utilise le fait que le groupe d'automorphismes de la fibre est fini pour se ramener au cas du fibré trivial ; les cas où le genre est 0 ou 1 sont traités dans [2].

1.

Si φ est une fonction plurisousharmonique (*psh*) sur un ouvert localement pseudoconvexe A, $A_c = \{x \in A \mid \varphi(x) < c\}$ est localement pseudoconvexe pour tout $c \in \mathbf{R}$; si A est de Stein, A_c est de Runge dans A. Ces résultats sont bien connus pour des fonctions φ continues (cf. Narasimham [9]) et s'étendent sans difficulté aux fonctions semi-continues supérieurement, par régularisation. Cependant, en l'absence de références, donnons une démonstration du

LEMME 1. — *Soit φ une fonction psh sur une variété de Stein* X. *Alors* $Y = \{x \in X \mid \varphi(x) < 0\}$ *est de Runge dans* X.

1.1. *Démonstration.* — Rappelons que Y est de Runge dans X si Y est de Stein et si, pour tout compact K de Y, pour toute fonction f holomorphe dans un voisinage de K et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction g holomorphe sur X telle que $\|f - g\|_K < \epsilon$.

Si l'on note, pour un compact K de X :

$$\hat{K}(X) = \{x \in X \mid \forall f \in O(X) \ : \ |f(x)| \leqslant \|f\|_K\}$$

on a la caractérisation suivante (cf. Stein [11]), si X est de Stein : Y est de Runge dans X si et seulement si, pour tout compact K de Y, $\hat{K}(X) \subset Y$.

On en déduit le critère suivant, toujours si X est de Stein :

1.2. Y est de Runge dans X si et seulement si, pour tout compact K de Y, il existe Z de Runge dans X tel que : $K \subset Z \subset Y$.

1.3. Supposons pour l'instant X ouvert de Stein de $\mathbf{C}^n$ et notons, si A est une partie de $\mathbf{C}^n$ et ϵ un réel positif : $B(x, \epsilon)$ la boule fermée de centre x et de rayon ϵ et $A_\epsilon = \bigcup_{x \in A} B(x, \epsilon)$. Enfin, $A \subset\subset B$ signifie : A est relativement compact dans B.

Soit alors K un compact de Y. Il existe un voisinage ouvert U de K relativement compact dans Y. X est de Stein, donc $X = \bigcup_{p \in N} X_p$ avec, pour tout p : $X_p \subset X_{p+1} \subset\subset X$, X_p de Runge dans X (cf. par exemple Narasimhan [9]). Il existe donc un entier q tel que : $K \subset U \subset\subset X_q \subset\subset X$, et il existe un nombre $\epsilon > 0$ tel que : $K_\epsilon \subset U$, $U_\epsilon \subset X_q$ et $(X_q)_\epsilon \subset X$.

Soit ϕ_ϵ la régularisée de φ sur X_q à l'aide d'une fonction ρ_ϵ, C^∞, positive, à support dans $B(0, \epsilon)$, d'intégrale 1 et ne dépendant que de $|z_1| \ldots |z_n|$: $\varphi_\epsilon(x) = \int_{B(0,\epsilon)} \varphi(x - y)\, \rho_\epsilon(y)\, dy$: Alors (cf. Hörmander [6], th. 2.6.3.), φ_ϵ est continue, *psh* et supérieure ou égale à φ.

Soit $Z = \{x \in X_q \mid \varphi_\epsilon(x) < 0\}$

a) Z est de Runge dans X_q (Narasimhan [9]) donc dans X.

b) $K \subset Z$ car, si $x \in K$: $B(x, \epsilon) \subset U$ et donc $\varphi_\epsilon(x) < 0$.

c) $Z \subset Y$ car $\varphi_\epsilon \geqslant \varphi$.

Ce qui établit le résultat d'après 1.2., si X est dans $\mathbf{C}^n$.

1.4. Dans le cas général, X étant de Stein, il existe un plongement analytique $p : X \longrightarrow \mathbf{C}^N$ qui identifie X à une sous-variété fermée de $\mathbf{C}^N$, notée encore X. Soit Ω un voisinage tubulaire analytique de de Stein de X dans $\mathbf{C}^N$ (cf. Gunning-Rossi [4]) et $\rho : \Omega \longrightarrow X$ la rétraction associée. La fonction $\varphi \circ \rho$ est *psh* et

$$\rho^{-1}(Y) = \{z \in \Omega \mid \varphi \circ \rho(z) < 0\}$$

est de Runge dans Ω d'après 1.3. Donc $Y = \rho^{-1}(Y) \cap \Omega$ est de Stein. Soit alors f une fonction holomorphe dans un voisinage dans X d'un compact K de Y, $f \circ \rho$ est holomorphe dans un voisinage de K dans $\rho^{-1}(Y)$. Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\widetilde{g}$ holomorphe dans Ω telle que $\|f \circ \rho - \widetilde{g}\|_K < \epsilon$. Alors $g = \widetilde{g}|_X$ est holomorphe dans X et telle que $\|f - g\|_K < \epsilon$. C.Q.F.D.

□

La proposition suivante sera utile.

PROPOSITION 1. – *Soit φ une fonction psh sur une variété analytique* X. *Si, pour tout $c \in \mathbf{R}$, $X_c = \{x \in X \mid \varphi(x) < c\}$ est de Stein, alors* X *est de Stein.*

Démonstration. – D'après le lemme précédent, X_c est de Runge dans X_{c+1}. X apparaît donc comme une réunion croissante d'ouverts de Stein, de Runge les uns dans les autres : X est de Stein (Stein [11]).

□

2.

L'objet de ce paragraphe est de prouver la :

PROPOSITION 2. – *Soient* S *un ouvert de Stein de $\mathbf{C}^n$, Γ une courbe complexe compacte, $X = S \times \Gamma$, $\pi : X \longrightarrow S$ la projection. Si* A *est un ouvert localement pseudoconvexe de* X *ne contenant aucun $\pi^{-1}(s)$, alors* A *est de Stein.*

On utilisera le fait que la base est de Stein à l'aide du lemme suivant :

LEMME 2.1. – *Soient* S *un ouvert de Stein de $\mathbf{C}^n$,* Y *une variété analytique complexe, $X = S \times Y$, $\pi : X \longrightarrow S$ la projection. Si* A *est un ouvert localement pseudoconvexe de* X, *alors il existe sur* A *une fonction f psh telle que, si $A_k = \{x \in A \mid f(x) < k\}$, on ait, pour tout $k \in \mathbf{N}$: $\pi(A_k) \subset\subset \pi(A_{k+1})$.*

Démonstration du lemme 2.1. –

a) Rappelons d'abord le résultat classique (cf. par exemple Gunning-Rossi [4], IX, D) : si U est un ouvert pseudoconvexe de $\mathbf{C}^p$. la fonction $\mathfrak{a}$, définie dans $\mathrm{U} \times \{\mathbf{C}^p \setminus 0\}$ par

$$\mathfrak{a}(x, x') = \sup \{r \in \mathbf{R} \mid x + rx' \in \mathrm{U}\},$$

est telle que $-\log \mathfrak{a}$ est *psh*.

b) Dans le cas présent, on en déduit que la fonction :

$$\begin{aligned} d \ : \ \mathrm{A} \times \{\mathbf{C}^n \setminus 0\} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ ((s, y), s') &\longmapsto \sup \{r \in \mathbf{R} \mid (s + rs', y) \in \mathrm{A}\} \end{aligned}$$

est telle que $-\log d$ est *psh*. Soit alors la fonction distance "horizontale" au bord $\delta : \mathrm{A} \to \mathbf{R}$ définie par : $\delta(x) = \inf\limits_{\|s'\|=1} d(x, s')$.

c) $-\log \delta$ est *psh*. En effet, montrons d'abord que δ est sci. Soit $x_0 = (s_0, y_0)$ tel que $\delta(x_0) > \alpha$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\delta(x_0) > \alpha + 2\epsilon .$$

Alors $\mathrm{B}(s_0, \alpha + 2\epsilon) \times \{y_0\}$ est un compact de A et il existe un voisinage V_{y_0} de y_0 tel que

$$\mathrm{B}(s_0, \alpha + 2\epsilon) \times \mathrm{V}_{y_0} \subset \mathrm{A} . \ \mathrm{V}_{x_0} = \mathrm{B}(s_0, \epsilon) \times \mathrm{V}_{y_0}$$

est un voisinage de x_0 sur lequel δ est supérieure ou égale à $\alpha + \epsilon$. Donc δ est *sci* ; $-\log \delta$ est *scs* et enveloppe supérieure de fonctions *psh*, donc *psh*.

d) D'autre part, il existe sur S une fonction q positive, continue, *psh* et propre. La fonction f définie sur A par

$$x \longmapsto f(x) = \sup \{0, -\log \delta(x)\} + q_0 \, \pi(x)$$

est *psh* et, si $\mathrm{A}_k = \{x \in \mathrm{A} \mid f(x) < k\}$, il reste à prouver :

e) $\pi(\mathrm{A}_k) \subset\subset \pi(\mathrm{A}_{k+1})$. On peut caractériser ainsi A_k :

$$x = (s, y) \in \mathrm{A}_k$$

si et seulement si $q(s) < k$ et $\mathrm{B}(s, e^{q(s)-k}) \times \{y\} \subset \mathrm{A}$. $\pi(\mathrm{A}_k)$ est donc relativement compact dans S ; q étant continue, il existe $\alpha_k > 0$

tel que, pour tout $s \in \pi(A_k)$ et tout $s' \in B(s, \alpha_k)$, on ait

$$q(s') < q(s) + \frac{1}{2} \cdot$$

Soit $\beta_k = \min(\alpha_k, e^{-k} - e^{-k-1/2})$: il suffit de montrer que pour tout $s \in \pi(A_k)$, $B(s, \beta_k) \subset \pi(A_{k+1})$. Or, si $s' \in B(s, \beta_k)$:

1) $q(s') < q(s) + \dfrac{1}{2} < k + 1$

2) $s' \in B(s, e^{-k} - e^{-k-1/2}) \subset B(s, e^{q(s)-k} - e^{q(s)-k-1/2})$ d'où

$$B(s', e^{q(s')-k-1}) \subset B(s', e^{q(s)-k-1/2}) \subset B(s, e^{q(s)-k})$$

Comme $s \in \pi(A_k)$, il existe $y \in Y$ tel que $B(s, e^{q(s)-k}) \times \{y\} \subset A$, donc $B(s', e^{q(s')-k-1}) \times \{y\} \subset A$. Or $q(s') < k + 1$, donc

$$(s', y) \in A_{k+1} \qquad \text{d'où} \qquad s' \in \pi(A_{k+1}) \text{ C.Q.F.D.}$$

□

On va utiliser à présent le fait que la deuxième composante du produit est de dimension un à l'aide du :

LEMME 2.2. – *Soient* S *un ouvert de Stein de* $\mathbf{C}^n$, Γ *une courbe compacte,* $X = S \times \Gamma$, $\pi : X \longrightarrow S$ *la projection. Si* A *est un ouvert de* X *et* V *un ouvert de* S *relativement compact dans* $\pi(A)$, *alors il existe un compact* K *de* A *et une fonction* $\mathcal{C}^\infty$ *et strictement plurisousharmonique sur* $\pi^{-1}(V) \setminus K$.

Démonstration. - Pour tout $s \in \pi(A)$, il existe U_s voisinage ouvert de s dans $\pi(A)$, $\alpha_s \in \Gamma$ et K_s voisinage compact de α_s dans Γ tels que : $U_s \times K_s \subset A$. On peut de plus choisir U_s de Stein.

Comme $V \subset\subset \pi(A)$, il existe un recouvrement fini U de $\overline{V}$ par des ouverts $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de Stein avec, pour tout i, un élément α_i de Γ et un voisinage compact K_i de α_i tels que : $U_i \times K_i \subset A$. Il existe également un recouvrement U' de $\overline{V}$ formés par des ouverts $(U'_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ tels que $U'_i \subset\subset U_i$.

Pour tout i, $U_i \times \{\Gamma \setminus \alpha_i\}$ est de Stein, et donc il existe une fonction φ_i, $\mathcal{C}^\infty$ et strictement plurisousharmonique (*spsh*) sur

$$U_i \times \{\Gamma \setminus \alpha_i\} .$$

Si $V_i = U'_i \times \{\Gamma \setminus K_i\}$, on a : $V_i \subset\subset U_i \times \{\Gamma \setminus \alpha_i\}$et $\varphi_{i|V_i}$ est bornée ainsi que toutes ses dérivées. D'autre part, il existe $(h_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, partition de l'unité $\mathcal{C}^\infty$ subordonnée au recouvrement U', et q : $S \longrightarrow \mathbf{R}$ fonction $\mathcal{C}^\infty$ et *spsh*.

Il résulte d'un calcul élémentaire sur des formes quadratiques que la fonction $\varphi : \bigcup_{i=1}^{p} V_i \longrightarrow \mathbf{R}$, défini par

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{p} h_i(\pi(x))\, \varphi_i(x) + \lambda q(\pi(x)),$$

est *spsh* pour λ assez grand. Ceci démontre le lemme car

$$\pi^{-1}(V) \setminus \bigcup_{i=1}^{p} V_i$$

est la trace dans $\pi^{-1}(V)$ d'un compact de A.

On peut maintenant établir un cas particulier de la Proposition 2 :

LEMME 2.3. – *Soient* S *un ouvert de Stein de* $\mathbf{C}^n$, Γ *une courbe compacte,* $X = S \times \Gamma$, $\pi : X \longrightarrow S$ *la projection. Si* A *est un ouvert localement pseudoconvexe de* X *tel que son adhérence* $\bar{A}$ *ne contienne aucun* $\pi^{-1}(s)$, *alors* A *est de Stein.*

Démonstration. – D'après le lemme 2.1., $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ avec

$$\pi(A_i) \subset\subset \pi(A_{i+1}) \subset\subset \pi(A).$$

Comme A_i est compact, on a $\pi(\bar{A}_i) = \overline{\pi(A_i)}$.

Soit alors $U = \pi^{-1}(\pi(A)) \setminus \overline{A_{i+1}}$. On a $\pi(U) = \pi(A)$ car

a) $\pi(U) \subset \pi(A)$ (clair)

b) si $s \in \pi(A)$ – ou $s \in \pi(A) \setminus \pi(\overline{A_{i+1}})$ donc $s \in \pi(U)$

– ou $s \in \pi(\overline{A_{i+1}})$; alors il existe $x \notin \overline{A_{i+1}}$

tel que $\pi(x) = s$ car $\overline{A_{i+1}} \subset \bar{A}$ ne contient aucun $\pi^{-1}(s)$; donc $x \in U$ et $s \in \pi(U)$.

Ainsi $\pi(A_{i+1}) \subset\subset \pi(U)$ et, d'après le lemme 2.2., il existe un compact K de U et une fonction $\varphi : \pi^{-1}(\pi(A_{i+1})) \setminus K \longrightarrow \mathbf{R}$ qui est *spsh* et $\mathcal{C}^\infty$. Or $\pi(\bar{A}_i) \subset \pi(A_{i+1})$ et $\bar{A}_i \cap K = \emptyset$: donc

$$A_i \subset\subset \pi^{-1}(\pi(A_{i+1})) \setminus K .$$

A_i, ouvert localement pseudoconvexe et relativement compact dans un ouvert muni d'une fonction *spsh* continue, est de Stein (cf. Elencwajg [3], Th. II). A est donc de Stein d'après la Proposition 1.

□

En utilisant de façon plus précise le résultat d'Elencwajg, on a le :

LEMME 2.4. — *Soient* X *une variété analytique complexe,* A *un ouvert de* X *localement pseudoconvexe,* U *un ouvert de* X *sur lequel existe une fonction* φ $\mathcal{C}^\infty$ *et spsh. Alors, pour tout compact* J *de* $\partial A \cap U$, *il existe un voisinage ouvert* W *de* J *dans* X *et une fonction* $\psi : A \cap W \longrightarrow \mathbf{R}$ *continue, spsh et qui tend vers l'infini aux points de* $\partial A \cap W$.

Démonstration. — Soit d la métrique déduite de la structure kalhérienne donnée localement sur U par $g_{ij} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \, \partial z_j}$. Alors (cf. Elencwajg [3]), si V est un ouvert de Stein, relativement compact dans U, il existe une constante μ_v telle que la fonction définie sur V par $x \longmapsto -\log d(x, \partial V) + \mu_v \varphi(x)$ soit *spsh.*

Ici, le seul cas intéressant est celui où $\partial A \cap U \neq \emptyset$. Soit alors $x \in \partial A \cap U$. A étant localement pseudoconvexe, il existe un ouvert V_x tel que $A \cap V_x$ soit de Stein, et on peut de plus choisir V_x tel que $A \cap V_x \subset\subset U$. Il existe donc une constante μ_{v_x} telle que la fonction définie sur $A \cap V_x$ par

$$y \longmapsto -\log d(y, \partial(A \cap V_x)) + \mu_{v_x} \varphi(y)$$

soit *spsh.* D'autre part, en choisissant un voisinage de x, W_x, suffisamment petit, on a, pour tout $y \in A \cap W_x$:

$$d(y, \partial(A \cap V_x)) = d(y, \partial A)$$

Recouvrons alors J par un nombre fini de tels ouverts W_x : $(W_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ Soient (μ_i) les constantes correspondantes et $\mu = \max\limits_i \mu_i$. Alors

$W = \bigcup_{i=1}^{k} W_i$ est un voisinage ouvert de J et la fonction ψ définie sur W par $x \longmapsto -\log d(x, \partial A) + \mu\varphi(x)$ est *spsh* et tend vers l'infini aux points de $\partial A \cap W$.

□

On peut enfin passer à la

Démonstration de la proposition 2.

a) D'après le lemme 2.1, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ avec A_i ouvert pseudoconvexe et $\pi(A_i) \subset\subset \pi(A_{i+1}) \subset\subset \pi(A)$. Il existe donc un ouvert V de S tel que $\pi(A_{i+1}) \subset\subset V \subset\subset \pi(A)$.

D'après le lemme 2.2., il existe un compact K de A et une fonction φ *spsh* et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\pi^{-1}(V) \setminus K$.

D'après le lemme 2.4., $\partial A \cap \overline{\pi^{-1}(\pi(A_{i+1}))}$, étant un compact de $\partial A \cap \{\pi^{-1}(V) \setminus K\}$, admet un voisinage ouvert W tel qu'il existe sur $A \cap W$ une fonction ψ continue, *spsh* et qui tend vers l'infini aux points de $\partial A \cap W$.

b) On va prolonger ψ dans $A \cap \pi^{-1}(\pi(A_{i+1}))$ de la façon suivante :

Soit $B_j = \{x \in A \cap W \mid \psi(x) > j\}$. Comme ψ tend vers l'infini en $\partial A \cap W$ et est bornée en dehors de la trace dans $A \cap W$ de tout voisinage de ∂A, il existe j_0 tel que $B_{j_0} \cap \pi^{-1}(\pi(A_{i+1})) \subset\subset W$.

Alors, la fonction définie sur $A \cap W$ par $x \longmapsto \sup\{\psi(x), j_0\}$ est *psh*, et égale à j_0 dans un voisinage de $A \cap \partial W \cap \pi^{-1}(\pi(A_{i+1}))$.

On peut donc la prolonger continûment par j_0 en dehors de $A \cap W \cap \pi^{-1}(\pi(A_{i+1})$ pour obtenir une fonction :

$\widetilde{\psi} : A \cap \pi^{-1}(\pi(A_{i+1})) \longrightarrow \mathbf{R}$ qui est *psh*, continue et tend vers l'infini aux points de $\partial A \cap \pi^{-1}(\pi(A_{i+1}))$.

Soit alors $A_i^j = \{x \in A_i \mid \widetilde{\psi}(x) < j\}$

A_i^j est localement pseudoconvexe et de plus :

c) $\overline{A}_i^j$ ne contient aucun $\pi^{-1}(s)$. En effet, soit

$$s \in \overline{\pi(A_i^j)} \subset \pi(A_{i+1}).$$

Il existe $x \in \pi^{-1}(s)$ tel que $x \in \partial A$, car A ne contient pas $\pi^{-1}(s)$, et donc $x \notin \overline{A}_i^j$ car $\widetilde{\psi}$ tend vers l'infini en x.

d) D'après le lemme 2.3., A_i^j est de Stein et une double application de la proposition 1 montre que A est de Stein.

□

COROLLAIRE. — *Soient* S *une variété de Stein,* Γ *une courbe compacte,* $X = S \times \Gamma$, $\pi : X \longrightarrow S$ *la projection. Si* A *est un ouvert localement pseudoconvexe de* X *ne contenant aucun* $\pi^{-1}(s)$, *alors* A *est de Stein.*

Démonstration. — S s'identifie à une sous-variété fermée de $\mathbf{C}^N$, notée encore S, qui admet (cf. Gunning-Rossi [4]) un voisinage tubulaire de Stein, U. Soit $\rho : U \longrightarrow S$ la rétraction associée et $\pi : U \times \Gamma \longrightarrow S \times \Gamma$ l'application définie par $\pi(u, \gamma) = (\rho(u), \gamma)$.

$\pi^{-1}(A)$ est localement pseudoconvexe et ne contient aucun sous-ensemble de la forme $\{u\} \times \Gamma$: il est de Stein d'après la Proposition 2. Or A s'identifie à une sous variété de $\pi^{-1}(A)$, donc est de Stein.

□

3.

THEOREME. — *Soit* (X, π, S) *un fibré localement trivial à base une variété de Stein* S *et à fibre une courbe compacte* Γ. *Si* A *est un ouvert localement pseudoconvexe de* X *ne contenant aucune fibre, alors* A *est de Stein.*

Démonstration. — Si le genre de la courbe est 0 ou 1, le résultat est démontré dans Brun [2].

Supposons donc à présent le genre de Γ supérieur ou égal à 2. Alors le groupe G des automorphismes de Γ est fini (cf. par exemple Accola [1]) ; d'autre part, on peut se ramener au cas où S est connexe. On peut donc associer à X, de façon unique (cf. Steenrod [10], 13-7), une classe d'équivalence (sous les automorphismes intérieurs de G) d'homomorphismes de $\pi_1(S)$ dans G : la classe caractéristique de X.

Soit $\alpha : \pi_1(S) \longrightarrow G$ un représentant de la classe de X et $H = \operatorname{Ker} a$.

Il existe (cf. par exemple Hu [6], th. III 17-1) un revêtement connexe $\rho : S' \longrightarrow S$ tel que H soit l'image de l'application induite par ρ

$$\rho_* : \pi_1(S') \to \pi_1(S).$$

Soient alors $X' = X x_S S'$ le produit fibré et (π', ρ') les projections naturelles :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\rho'} & X \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S' & \xrightarrow{\rho} & S \end{array}$$

Par construction de S', la classe caractéristique de X' est neutre et donc le fibré (X', π', S') est trivial. D'autre part, H étant d'indice fini, les revêtements ρ et ρ' sont finis, et donc S' est de Stein (Stein [11]). $\rho'^{-1}(A)$ est un ouvert localement pseudoconvexe de X', ne contenant aucun $\pi'^{-1}(s')$; il est de Stein d'après le corollaire précédent. On en déduit que A est de Stein car il admet un revêtement fini de Stein.

□

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Accola, On the number of automorphisms of a closed Riemann surface, *Trans. Am. Math. Soc.*, 131 (1968), 398-408.

[2] J. Brun, Sur le problème de Levi dans certains fibrés, *Manuscripta Math.*, 14 (1974), 217-222.

[3] G. Elencwajg, Pseudoconvexité locale dans les variétés kälhériennes, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 15, 2 (1975), 295-314.

[4] R. Gunning, H. Rossi, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall (1965).

[5] A. Hirschowitz, Pseudoconvexité au-dessus d'espaces plus ou moins homogènes, *Inventions Math.*, (1974), 303-322.

[6] L. HORMANDER, An Introduction to complex analysis in several variables, Princeton, Van Nostrand (1966).

[7] S. HU, Homotopy theory, Academic Press (1959).

[8] Y. MATSUGU, The Levi problem for a product manifold, *Pacific J. Math.*, 46 (1973), 231-233.

[9] R. NARASIMHAN, The Levi problem for complex spaces II, *Math. Ann.*, 146 (1962), 195-215.

[10] N. STEENROD, The topology of fibre bundles, Princeton (1951).

[11] K. STEIN, Uberlagerung holomorph – vollständiger komplexer. Raüme, *Arch. Math.*, 7 (1956), 356-361.

Manuscrit reçu le 14 avril 1976
Proposé par J. Dieudonné.

Jérôme BRUN,
Département de Mathématiques
I.M.S.P.
Parc Valrose
06034 – Nice Cédex.