ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALAIN HARAUX

Équations d'évolution non linéaires : solutions bornées et périodiques

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 2 (1978), p. 201-220

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_2_201_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 2 (1978), 201-220.

ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION NON LINÉAIRES : SOLUTIONS BORNÉES ET PÉRIODIQUES

par Alain HARAUX

Dans toute la suite, H désigne un espace de Hilbert réel. Si u , v sont deux vecteurs de H , on notera (u,v) le produit scalaire de u et de v , et $|u|$ la norme du vecteur u . On considère un opérateur maximal monotone A de H , et $f \in L^1_{loc}([0,+\infty[,H)$. Alors l'équation

$$(1) \qquad \begin{cases} f(t) \in \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) & \text{pour} \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

a pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}$ une solution faible unique, et si A est un sous-différentiel, on sait (cf. [3]) que la solution est forte lorsque $f \in L^2_{loc}([0,+\infty[,H)$.

- Au § I, on établit quelques propriétés de bornitude de la solution de (1), en particulier dans le cas où A est un sous-différentiel.

- Au § II, on s'intéresse à l'existence de solutions périodiques de période T pour (1), lorsque f est elle-même T-périodique. On étudie la structure de l'ensemble des solutions périodiques dans le cas où $A = \partial\varphi$.

- Au § III, dans le cas $A = \partial\varphi$, f étant T-périodique et $\int_0^T |f(t)|^2\, dt < +\infty$, sous l'hypothèse d'existence d'une solution T-périodique pour (1), on étudie le comportement à l'infini d'une solution quelconque de (1).

I. PROPRIÉTÉS DE BORNITUDE DES SOLUTIONS DE (1)

1. Cas de croissance sous-linéaire.

D'abord une proposition très simple de caractère général.

PROPOSITION 1. — *Si*

$$\int_0^t |f(\theta)|\, d\theta \leqslant Ct + C', \tag{2}$$

alors $\displaystyle\limsup_{t\to+\infty} \frac{|u(t)|}{t} \leqslant C < +\infty$.

(*Exemples :* $f \in L^\infty$, f périodique).

Preuve. — Si $\eta \in A\xi$, on a pour tout $t \geqslant 0$,

$$|u(t) - \xi| - |u(0) - \xi| \leqslant \int_0^t |f(\theta) - \eta|\, d\theta .$$

Bien sûr, aucun résultat de ce type n'est possible pour f quelconque, comme le montre l'exemple $H = R$, $A = 0$, $f(t) = t$. Remarquons que si (1) a une solution telle que $\dfrac{u(t)}{t} \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$, toutes les valeurs d'adhérence faible de la fonction $\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f(\theta)\, d\theta$ pour $t \longrightarrow +\infty$ sont dans $\overline{R(A)}$. Plus généralement,

$$\limsup_{t\to+\infty} \operatorname{dist}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f(\theta)\, d\theta, \overline{R(A)}\right) \leqslant \limsup_{t\to+\infty} \frac{|u(t)|}{t}.$$

Lorsque A est un sous-différentiel, on a un résultat plus précis :

THÉORÈME 1. — $A = \partial\varphi$, *on suppose*

$$\int_0^t |f(\theta)|^2\, d\theta \leqslant Ct + C' \tag{3}$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(\theta)\, d\theta \longrightarrow y \quad \textit{lorsque} \quad t \longrightarrow +\infty . \tag{4}$$

Alors $\dfrac{u(t)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} (y - \overline{R(A)})^0$, *si on note* K^0 *l'élément de norme minimale d'un convexe fermé* $K \subset H$.

LEMME 1. — *Soit* $u \in C([0,+\infty[,H)$, *absolument continue sur tout compact, et* $g \in L^1_{loc}([0,+\infty[,H)$ *telles que*

$$\int_0^t \left|\frac{du}{ds}\right|^2 ds \leqslant C_1 t + C_2$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t g(s)\,ds \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0\,.$$

Alors $\displaystyle \frac{1}{t^2}\int_0^t (g(s),u(s))\,ds \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0\,.$

Preuve. — Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$|u(t)| \leqslant \alpha t + \beta\,.$$

Posons $h(t) = \int_0^t g(s)\,ds$. Alors

$$\int_0^t (g(s),u(s))\,ds = \int_0^t (h'(s),u(s))\,ds$$
$$= (h(t),u(t)) - \int_0^t (h(s),u'(s))\,ds\,.$$

Bien sûr, $\frac{1}{t^2}(h(t),u(t)) \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$. D'autre part

$$\left|\int_0^t (h(s),u'(s))\,ds\right| \leqslant (C_1 t + C_2)^{1/2}\left(\int_0^t |h(s)|^2\,ds\right)^{1/2}.$$

Or puisque $\frac{h(s)}{s} \longrightarrow 0$ pour $s \longrightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{t^3}\int_0^t |h(s)|^2\,ds \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0\,.$$

Ceci achève la démonstration du lemme.

Déduction du théorème. — Par intégration de l'inégalité $\forall z \in D(A)$, $\left(f(t) - \frac{du}{dt} - Az, u(t) - z\right) \geqslant 0$, on obtient

$$\frac{1}{2}|u(t)-z|^2 \leqslant \frac{1}{2}|u(0)-z|^2 + \int_0^t (f(s)-y,u(s))\,ds$$
$$+ \int_0^t (y - Az,u(s))\,ds + \left|\int_0^t (f(s)-Az,z)\,ds\right|$$
$$\leqslant C_3 + C_4 t + \int_0^t (f(s)-y,u(s))\,ds + |y - Az|\int_0^t |u(s)|\,ds$$

On peut supposer $u_0 \in D(A)$ et $\varphi \geqslant 0$. Dans ce cas :

$$\int_0^t \left|\frac{du}{ds}\right|^2 ds \leqslant 2\left(\varphi(u_0) + \int_0^t |f(s)|^2\,ds\right).$$

Posant alors $g(s) = f(s) - y$, $L = \limsup_{t \to +\infty} \frac{|u(t)|}{t}$, le lemme 1 fournit :

$$\forall z \in D(A), \qquad \frac{1}{2} L^2 \leqslant |y - Az| \frac{1}{2} L .$$

Donc $\limsup_{t \to +\infty} \frac{|u(t)|}{t} \leqslant \operatorname{dist}(y, \overline{R(A)}) = |(y - \overline{R(A)})^0|$.

De plus si $w_n = \frac{u(t_n)}{t_n} \rightharpoonup w$, t_n étant une suite de nombres tendant vers $+\infty$ avec n, on peut écrire

$$\frac{u(t_n) - u_0}{t_n} + \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} Au(\theta)\, d\theta = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} f(\theta)\, d\theta ,$$

d'où faisant $n \longrightarrow +\infty$: $w \in y - \overline{R(A)}$.

Donc $w = (y - \overline{R(A)})^0$, et $\frac{u(t)}{t} \rightharpoonup (y - \overline{R(A)})^0$.

Enfin puisque $\limsup_{t \to +\infty} \frac{|u(t)|}{t} \leqslant |(y - \overline{R(A)})^0|$, la convergence est forte et ceci achève la démonstration.

Remarque 1. — Plus généralement, si on remplace (4) par $\frac{1}{t} \int_0^t (f(s) - y(s))\, ds \longrightarrow 0$, y mesurable sur $[0, +\infty[$, alors $\limsup_{t \to +\infty} \frac{|u(t)|}{t} \leqslant \limsup_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(y(t), \overline{R(A)})$.

Par exemple si $f(t) \in \overline{R(A)}$, $\forall t \geqslant 0$, on obtient

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{|u(t)|}{t} = 0 .$$

Mais, il est *faux* en général que

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{|u(t)|}{t} = \limsup_{t \to +\infty} \operatorname{dist}\left(\frac{1}{t} \int_0^t f(\theta)\, d\theta , \overline{R(A)}\right).$$

On peut même trouver f analytique bornée :

$$[0, +\infty[\longrightarrow R = H \qquad \text{et} \qquad \beta : R \longrightarrow R$$

maximal monotone, avec $\frac{1}{t} \int_0^t f(\theta)\, d\theta \in \operatorname{Int}(R(\beta))$ pour $t \geqslant t_0$ et $\limsup_{t \to +\infty} \frac{|u(t)|}{t} > 0$.

Exemple. — $\beta(u) = sgn(u)$,

$$f(t) = \rho \sin\left[\mathrm{Log}\,(1 + t) + \frac{\Pi}{4}\right], \qquad \frac{2}{\sqrt{3}} < \rho < \sqrt{2}.$$

Alors $\displaystyle\frac{1}{t+1}\int_0^t f(\theta)\,d\theta = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sin\,(\mathrm{Log}\,(1 + t))$, et donc $\displaystyle\left|\frac{1}{t}\int_0^t f(\theta)\,d\theta\right| < 1$ pour t assez grand. De plus, $\forall t \geqslant 0$, $h \geqslant 0$:

$$u(t + h) - u(t) \geqslant - h + \int_t^{t+h} \rho \sin\left(\mathrm{Log}\,(1 + \theta) + \frac{\Pi}{4}\right) d\theta.$$

Définissons t_n et h_n par $\mathrm{Log}\,(1 + t_n) = 2n\Pi + \frac{\Pi}{12}$,

$$\mathrm{Log}\,(1 + t_n + h_n) = 2n\Pi + \frac{\Pi}{12} + \frac{\Pi}{3},$$

c'est-à-dire $t_n = e^{2n\Pi + \Pi/12} - 1$, $h_n = (e^{\Pi/3} - 1)(1 + t_n)$.

Alors $u(t_n + h_n) - u(t_n) \geqslant h_n\left(\frac{\rho\sqrt{3}}{2} - 1\right)$ et comme

$$\frac{h_n}{t_n} \longrightarrow e^{\Pi/3} - 1 > 0\,, \qquad \limsup_{t \to +\infty} \frac{|u(t)|}{t} > 0\,.$$

Remarque 2. — *a*) Même si $y \in \mathrm{Int}\,(\mathrm{R(A)})$, on ne peut espérer sous les hypothèses du théorème 1 ni la bornitude de u, ni même aucune majoration en t^β. En effet toujours avec $\mathrm{H} = \mathrm{R}$, $\beta = \mathrm{sgn}$, prenons $f(t) = 2 \sin\,(t^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$,

Alors $\displaystyle\lim_{t \to 0}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f(\theta)\,d\theta\right) = 0$, et $\displaystyle\int_0^t |f(\theta)|^2\,d\theta \leqslant 4t$.

Mais

$$u\left(\left(2n\Pi + \frac{3\Pi}{4}\right)^{1/\alpha}\right) - u\left(\left(2n\Pi + \frac{\Pi}{4}\right)^{1/\alpha}\right)$$

$$\geqslant \int_{\left(2n\Pi + \frac{\Pi}{4}\right)^{1/\alpha}}^{\left(2n\Pi + \frac{3\Pi}{4}\right)^{1/\alpha}} (2 \sin t^\alpha - 1)\,dt \geqslant c(\alpha) n^{1\alpha/-1},$$

pour n assez grand, avec $c(\alpha) > 0$.

b) Si A n'est pas un sous-différentiel, le résultat du théorème 1 peut tomber en défaut même si $\mathrm{R(A)} = \mathrm{H}$, comme le montre l'exemple

$$H = R^2, \qquad A(x,y) = (y, -x), \qquad f(t) = (-\sin t, 0)$$

$$\left(\text{car} \quad u(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t + \frac{t}{2} \cos t\right).$$

2. Cas de bornitude uniforme.

Des résultats de bornitude uniforme sont bien connus dans le cas coercif. Le cas des sous-différentiels est élucidé par le

THÉORÈME 2. — *On suppose* $A = \partial\varphi$, $y \in \operatorname{Int}(R(A))$, *et* $\sup_{t \geqslant 0} \left|\int_0^t (f(\theta) - y)\, d\theta\right| < +\infty$, $\sup_{t \geqslant 0} \left(\int_t^{t+1} |f(\theta)|^2\, d\theta\right) < +\infty$. *Alors les solutions de* (1) *sont bornées uniformément sur* $[0, +\infty[$ *et si* $u_0 \in D(\varphi)$, $\varphi(u(t))$ *est borné également.*

Pour la démonstration nous aurons besoin du

LEMME 2. — *Soit* $V \in C([0, +\infty[, R^+)$ *une fonction absolument continue sur tout compact, telle qu'il existe* $\zeta \geqslant 0$, *avec*

$$\int_t^{t+1} \zeta(\theta)\, d\theta \leqslant C, \quad \forall t \geqslant 0,$$

et

$$(5) \qquad \frac{dV}{dt} + \lambda(V(t)) \leqslant \zeta(t), \quad \textit{p.p. sur} \quad [0, +\infty[.$$

On suppose que λ est croissante $\geqslant 0$. On a :

$$\forall t \geqslant 0, \qquad V(t) \leqslant \alpha + C,$$

si α désigne un réel tel que $\alpha \geqslant V(0)$ et $\lambda(\alpha) \geqslant C$.

Preuve. — Remarquons d'abord que si $t \leqslant s \leqslant t + 1$,

$$V(t+1) - V(s) \leqslant \int_s^{t+1} \zeta(\theta)\, d\theta \leqslant \int_t^{t+1} \zeta(\theta)\, d\theta \leqslant C.$$

Donc $V(t+1) \leqslant C + \inf_{s \in [t, t+1]} V(s)$.

Or si $\inf_{s \in [t, t+1]} V(s) \geqslant \alpha$, comme $\lambda(\alpha) \geqslant C$ il vient

$$V(t+1) \leqslant V(t).$$

Dans tous les cas :

$$V(t+1) \leqslant \sup\{V(t), \alpha + C\}.$$

Posons $U(t) = \sup\{V(t), \alpha + C\}$, $\forall t \in [0, +\infty[$.

Alors $U(t+1) \leqslant U(t)$, donc finalement

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad V(t) \leqslant \sup_{\theta \in [0,1]} U(\theta) \leqslant \sup\{V(0) + C, \alpha + C\}.$$

Comme par hypothèse $\alpha \geqslant V(0)$, la démonstration est achevée.

Avant de démontrer le théorème 2, remarquons que notre lemme 2 s'applique immédiatement au cas simple d'un opérateur coercif.

Corollaire 1. — *Soit* $A : H \longrightarrow H$ *un opérateur tel que* $\dfrac{(Ax,x)}{|x|} \longrightarrow +\infty$ *quand* $|x| \longrightarrow +\infty$. *Si on a :*

$$\forall t \geqslant 0, \quad \int_t^{t+1} |f(\theta)|\, d\theta \leqslant C,$$

les solutions de (1) *sont uniformément bornées sur* $[0, +\infty[$ *par une constante ne dépendant que de* C *et de* $|u_0|$.

En effet, on se ramène immédiatement au cas où la solution est forte et $0 \in A(0)$.

Posant alors

$$\lambda(u) = \begin{cases} \inf\limits_{|x| \geqslant u} \dfrac{(Ax,x)}{|u|} & \text{pour } u > 0 \\ 0 & \text{pour } u = 0 \end{cases}$$

et prenant $V(t) = |u(t)|$, il est facile de voir que (4) est vérifié avec $\zeta(t) = |f(t)|$.

Corollaire 2 (Amério-Prouse). — *Soit* V *un espace de Banach, muni de la norme* $\|\ \|$, *et notons* $\|\ \|_*$ *la norme dans l'espace dual* V'.

On suppose : $V \subsetneq H \subsetneq V'$, H *étant un espace de Hilbert.*

Soit $A : V \longrightarrow V'$ *borné hémi-continu et monotone tel que*

$$\begin{cases} \langle Av, v\rangle_{V,V'} \geqslant \alpha\|v\|^p, \quad \alpha > 0, \quad 1 < p < \infty \\ \|Av\|_* \leqslant C\|v\|^{p-1}. \end{cases}$$

Alors, si $\sup_{t\geqslant 0}\left(\int_t^{t+1}\|f(\tau)\|_*^{p'}\,d\tau\right) < +\infty$, *la solution* $u(t)$ *de l'équation*

$$u \in L^p_{\mathrm{loc}}([0,+\infty[;V),\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au(t) = f(t) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

vérifie

$$\begin{cases} |u(t)| \leqslant M, \quad \forall t \geqslant 0 \\ \displaystyle\int_t^{t+1} \|u(\tau)\|^p\,d\tau \leqslant M', \quad \forall t \geqslant 0\,. \end{cases}$$

Preuve. — En vertu de l'inégalité

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u|^2) + \alpha\|u\|^p \leqslant \|f\|_*\,\|u\|$$

qui implique

$$\frac{1}{2}(|u(t+1)|^2 - |u(t)|^2) + \alpha\int_0^{t+1}\|u(\tau)\|^p\,d\tau \leqslant \left(\int_t^{t+1}\|u(\tau)\|^p\,d\tau\right)^{1/p}\left(\int_t^{t+1}\|f(\tau)\|_*^{p'}\,d\tau\right)^{1/p'}$$

il suffit de montrer que $u(t)$ est borné.

Or il existe une constante C telle que $\forall(a,b) \in R^+ \times R^+$,

$$ab \leqslant \frac{\alpha a^p}{2} + Cb^{p'}.$$

Posant $V(t) = \sqrt{1 + |u(t)|^2}$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leqslant \frac{\|f\|_*\|u\| - \alpha\|u\|^p}{\sqrt{1+|u|^2}} \\ &\leqslant C\|f\|_*^{p'} + \frac{\alpha}{2}\frac{\|u\|^p}{(\sqrt{1+|u|^2})^p} - \alpha\frac{\|u\|^p}{\sqrt{1+|u|^2}} \\ &\leqslant C\|f\|_*^{p'} - \frac{\alpha}{2}\frac{\|u\|^p}{\sqrt{1+|u|^2}} \leqslant C\|f\|_*^{p'} - \beta V^{p-1} + C', \end{aligned}$$

avec $\beta > 0$ et $C' < +\infty$ (car l'injection $V \longrightarrow H$ est continue).

Donc $\dfrac{dV}{dt} + \beta V^{p-1} \leqslant C\|f\|_*^{p'} + C'$, il suffit d'appliquer le lemme avec $\lambda(u) = \beta u^{p-1}$, $\zeta(t) = C\|f(t)\|_*^{p'} + C'$.

Démonstration du théorème. — On se ramène sans difficulté au cas où $y = 0$, $\operatorname{Inf}_H \varphi = \varphi(0) = 0$.

Il existe alors $r > 0$, $M < +\infty$ tels que $\forall u \in H$, $r|u| \leqslant \varphi(u) + M$. Soit $g(t) = \int_0^t f(\theta)\, d\theta$. Supposant

$$u_0 \in D(\varphi),$$

posons

$$V(t) = |u(t) - g(t)|^2 + 2\varphi(u(t)), \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= 2\left(f(t) - \frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}\right) + 2\left(u(t) - g(t), \frac{du}{dt} - f(t)\right) \\
&= 2\left(f(t), \frac{du}{dt}\right) + 2\left(- g(t), \frac{du}{dt}\right) - 2\left|\frac{du}{dt}\right|^2 + 2(f(t), g(t)) \\
&\qquad\qquad + 2\left(u(t), \frac{du}{dt} - f(t)\right) \\
&\leqslant |f(t)|^2 + |g(t)|^2 + 2|f(t)|\,|g(t)| + 2\left(u(t), \frac{du}{dt} - f(t)\right).
\end{aligned}$$

Pour presque tout $t \geqslant 0$,

$$\varphi(0) - \varphi(u(t)) \geqslant \left(f(t) - \frac{du}{dt}, - u(t)\right).$$

Donc

$$r|u(t)| - M \leqslant \varphi(u(t)) \leqslant \left(u(t), f(t) - \frac{du}{dt}\right) \quad \text{p.p.}.$$

De l'inégalité

$$\begin{aligned}
\sqrt{V(t)} &= (|u(t) - g(t)|^2 + 2\varphi(u(t)))^{1/2} \\
&\leqslant |u(t)| + |g(t)| + 1 + \varphi(u(t)),
\end{aligned}$$

on tire donc

$$\begin{aligned}
&\rho\sqrt{V(t)} + 2\left(u(t), \frac{du}{dt} - f(t)\right) \\
&\qquad\qquad \leqslant C(\rho) + \rho|u(t)| + (2 - \rho)\left(u(t), \frac{du}{dt} - f(t)\right).
\end{aligned}$$

Cette dernière expression est bornée indépendamment de t dès que

$$\frac{\rho}{2 - \rho} \leqslant r, \qquad \text{ou} \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{2r}{1 + r}.$$

Posant $\rho_0 = \dfrac{2r}{1+r} > 0$, il vient finalement

$$\frac{dV}{dt} + \rho_0 \sqrt{V(t)} \leqslant |f(t)|^2 + C_1|f(t)| + C_2 \,, \quad \text{p.p.}$$

On conclut en appliquant le lemme 2 avec $\lambda(x) = \rho_0 \sqrt{x}$ qui croît vers $+\infty$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

II. ÉQUATIONS PÉRIODIQUES

1. Existence de solutions périodiques.

Supposons maintenant f périodique de période T , c'est-à-dire $f(t+T) = f(t)$ p.p. sur $[0, +\infty[$. On considère la question de l'existence de solutions périodiques de période T pour (1). En raison de l'unicité de la solution du problème d'évolution avec donnée initiale, une solution u de (1) sera T-périodique si et seulement si $u(0) = u(T)$.

Intégrant (1) entre 0 et T , on trouve alors :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T Au(t)\,dt \in \overline{R(A)} \,,$$

condition nécessaire d'existence de solutions T-périodiques.

Lorsque A est *coercif*, il est surjectif et la condition précédente est vide. Il est bien connu que dans ce cas (cf. [2]) le problème périodique a effectivement des solutions. On peut retrouver ce résultat comme conséquence du corollaire 1, mais nous nous limitons ici à énoncer le résultat analogue pour les sous-différentiels.

Théorème 3. — $A = \partial\varphi$, $f \in L^2(0,T;H)$. *Alors si*

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \in \operatorname{Int}(R(A)),$$

il existe $u_0 \in \overline{D(A)}$ *tel que le problème* (1) *ait une solution* T-*périodique sur* $[0, +\infty[$.

Démonstration. — Soit $y = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$, $h(t) = f(t) - y$.

$\forall t \in [0, +\infty[$, $\left|\int_0^t h(\theta)\,d\theta\right| \leqslant T|y| + \int_0^T |f(t)|\,dt$. De plus :

$$\int_t^{t+1} |f(\theta)|^2\,d\theta \leqslant \left(1 + \frac{1}{T}\right)\int_0^T |f(\theta)|^2\,d\theta .$$

Soit θ la contraction qui à $u_0 \in \overline{D(A)}$, associe $u(T)$, valeur en T de la solution de (1). D'après le théorème 2, $\theta^n u_0$ est borné, $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$.

D'après un théorème classique ([3]), θ *possède un point fixe.*

2. Étude du cas-limite où $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \in$ Frontière $(\overline{R(A)})$.

Nous nous bornerons au résultat le plus simple dans cette direction.

THÉORÈME 4. — *Si* $\omega = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$ *est un point extrêmal de* $\overline{R(A)}$, *le système*

$$\begin{cases} f(t) \in \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

équivaut en fait à :

$$\frac{du}{dt} = f(t) - \omega \qquad et \qquad u(t) \in A^{-1}(\omega).$$

En effet, posons $\mathscr{C} = \overline{R(A)}$, et $g(t) = f(t) - \frac{du}{dt}$.

S'il existe $t \in [0, T[$ et $\delta > 0$ tels que

$$\frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta} g(\theta)\,d\theta = \omega' \neq \omega ,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{T}\int_0^T f(\theta)\,d\theta = \frac{1}{T}\int_0^T g(\theta)\,d\theta \\ &= \frac{\delta}{T}\,\omega' + \left(1 - \frac{\delta}{T}\right)\frac{1}{T-\delta}\int_{[0,T]\setminus[t,t+\delta]} g(\theta)\,d\theta . \end{aligned}$$

Par suite ω ne peut être point extrêmal de $\mathscr{C}$.

Donc sous l'hypothèse d'extrémalité de ω , on obtient :

$$\forall t \in [0\,,\,T[\,,\quad \forall \delta > 0\,,\quad \frac{1}{\delta}\int_t^{t+\delta} g(\theta)\,d\theta = \omega\,.$$

Par suite $g(t) = \omega$ en tout point de Lebesgue de g , d'où il résulte $\dfrac{du}{dt} = f(t) - \omega$, p.p. sur $[0,T]$.

Il s'ensuit que $u(t) \in A^{-1}(\omega)$ p.p. sur $[0,T]$, donc partout par continuité de u et fermeture de $A^{-1}(\omega)$.

Exemple. — $\varphi(u) = |u|$ (cf. [6]).

$\overline{R(A)} = \overline{B}(0,1)$, donc tout point de la frontière est extrêmal. Si $\left|\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt\right| = 1$, $u(t)$ se déplace nécessairement sur une droite passant par 0 , et $f(t)$ reste sur la même droite.

Posons $f(t) = \alpha(t)w$, avec $|w| = 1$.

Quitte à changer w en $-w$, on peut supposer

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = w\,.$$

Posant alors $\alpha = 1 + \gamma$, on trouve comme solutions les fonctions de la forme

$$u(t) = \left(\beta + \int_0^t \gamma(\theta)\,d\theta\right)w\,,$$

avec

$$\beta \geqslant -\inf_{[0,T]}\left(\int_0^t \gamma(\theta)\,d\theta\right)\cdot$$

Remarque. — Pour l'existence de solution périodique, il *ne suffit pas* que $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt$ soit un point intérieur de $\overline{R(A)}$, comme on le voit en choisissant A linéaire continu avec $R(A) \neq \overline{R(A)}$.

3. Étude de l'ensemble des solutions périodiques.

Le résultat suivant joue un rôle important dans la suite.

Théorème 5. — $0 < T < +\infty$, *soit* u_1 *et* u_2 *deux solutions fortes du problème d'évolution* $f(t) \in \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t)$, $A = \partial\varphi$.

Alors

$$\begin{cases} \text{i)} & |(u_2 - u_1)(\mathrm{T})| \leqslant |(u_2 - u_1)(0)| \\ \text{ii)} & |(u_2 - u_1)(\mathrm{T})| = |(u_2 - u_1)(0)| \Longrightarrow u_2 - u_1 = \text{cte} . \end{cases}$$

Démonstration. — Rappelons d'abord (cf. [2]) que si u est une solution forte de l'équation $f(t) \in \dfrac{du}{dt} + \mathrm{A}u(t)$, $\varphi(u(t))$ est dérivable presque partout sur $[0,\mathrm{T}]$, et

$$\frac{d}{dt}(\varphi(u(t))) = \left(\zeta, \frac{du}{dt}\right) \quad \forall \zeta \in \mathrm{A}(u(t)).$$

Comme $\dfrac{du_1}{dt} \in f(t) - \mathrm{A}u_1(t)$ p.p. sur $[0,\mathrm{T}]$, on a

$$\frac{1}{2}(|(u_2 - u_1)(\mathrm{T})|^2 - |(u_2 - u_1)(0)|^2) = \int_0^{\mathrm{T}} \left(u_2 - u_1, \frac{du_2}{dt} - \frac{du_1}{dt}\right) dt \leqslant 0 ,$$

ce qui prouve i). Si de plus, $|(u_2 - u_1)(\mathrm{T})| = |(u_2 - u_1)(0)|$, nécessairement $\left(\dfrac{du_2}{dt} - \dfrac{du_1}{dt}, \quad u_2(t) - u_1(t)\right) = 0$, p.p. sur $[0,\mathrm{T}]$.

Pour presque tout $t \in [0,\mathrm{T}]$, posons $\mathrm{A}_{(t)}u = \mathrm{A}u - f(t)$, $\forall u \in \mathrm{D}(\mathrm{A})$.

Si $\zeta \in \mathrm{D}(\mathrm{A}_{(t)}) = \mathrm{D}(\mathrm{A})$, $\xi \in \mathrm{A}_{(t)}\zeta$, on a

$$\begin{aligned} &\left(\xi + \frac{du_2}{dt}, \zeta - u_1(t)\right) \\ &\quad = (\xi, \zeta - u_1(t)) + \left(\frac{du_2}{dt}, \zeta - u_2(t)\right) + \left(\frac{du_2}{dt}, u_2(t) - u_1(t)\right) \\ &\quad = (\xi, \zeta - u_1(t)) + \left(-\frac{du_1}{dt}, u_1(t) - u_2(t)\right) + \left(-\frac{du_2}{dt}, u_2 - (t)\zeta\right). \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{A}(t)$ est trimonotone, cette quantité est $\geqslant 0$.
Mais alors la maximalité de $\mathrm{A}_{(t)}$ donne :

$$-\frac{du_2}{dt} \in \mathrm{A}_{(t)}u_1(t).$$

Donc, p.p. sur $[0,T]$, $f(t) - \frac{du_i}{dt} \in Au_j(t)$, et par suite

$$\frac{d}{dt}(\varphi(u_1(t)) = \left(f(t) - \frac{du_1}{dt}, \frac{du_1}{dt}\right) = \left(f(t) - \frac{du_2}{dt}, \frac{du_1}{dt}\right),$$

d'où $\left|\frac{du_1}{dt}\right|^2 = \left(\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}\right) = \left|\frac{du_2}{dt}\right|^2$ p.p. sur $[0,T]$.

Finalement

$$\left|\frac{d}{dt}(u_2 - u_1)\right|^2 = \left|\frac{du_1}{dt}\right|^2 - 2\left(\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}\right) + \left|\frac{du_2}{dt}\right|^2 = 0\,, \quad \text{p.p.}$$

COROLLAIRE 3. — *Pour f donnée dans* $L^2(0,T;H)$, *les solutions de*

$$(1_p) \qquad \begin{cases} u \in W^{1,2}(0,T;H), & f(t) \in \frac{du}{dt} + Au(t) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

forment un ensemble du type $\gamma(t) + K_f$, *où* γ *est une fonction déterminée de* $W^{1,2}(0,T;H)$ *telle que* $\gamma(0) = \gamma(T) = 0$, *et* K_f *un ensemble convexe fermé contenu dans* H *(c'est l'ensemble des points fixes de la contraction* θ *définie p. 11).*

Quelques précisions sur l'ensemble K_f.

LEMME 3. — *Si* $u(t)$ *et* $u(t) + w$ *sont deux solutions de* (1_p),

$$\forall t \in [0,T], \quad \varphi(u(t) + w) - \varphi(u(t)) = \left(w, \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\right)$$

et pour presque tout t *ceci vaut aussi* $\left(f(t) - \frac{du}{dt}, w\right)$.

Démonstration. — Pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$\frac{d}{dt}[\varphi(u(t) + w) - \varphi(u(t))]$$
$$= \left(f(t) - \frac{d}{dt}(u(t) + w), \frac{d}{dt}(u(t) + w)\right) - \left(f(t) - \frac{du}{dt}, \frac{du}{dt}\right) = 0.$$

Donc $\varphi(u(t) + w) - \varphi(u(t)) = \lambda$, constante indépendante de t.

Pour presque tout t, $\varphi(u(t)+w) - \varphi(u(t)) \geqslant \left(f(t) - \frac{du}{dt}, w\right)$.
Échangeant $u(t)$ et $u(t)+w$, il vient en fait

$$\lambda = \varphi(u(t)+w) - \varphi(u(t)) = \left(f(t) - \frac{du}{dt}, w\right),$$

et prenant la moyenne de 0 à T :

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} (f(t),w)\, dt = \left(w, \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\, dt\right).$$

Proposition 2. — *Si $u(t)$ et $u(t)+w$ sont deux solutions de (1_p), la trace de φ sur le segment $[u(t),u(t)+w]$ est linéaire pour tout $t \in [0,\mathrm{T}]$.*

Démonstration. — Par convexité de K_f on peut changer w en θw, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ dans le résultat du lemme 3.

Examinons maintenant quelques cas d'unicité.

Proposition 3. — *Si φ est strictement convexe, K_f contient au plus un point.*

Proposition 4. — *On suppose φ positivement homogène de degré 1. Si tout segment du graphe de φ est contenu dans une demi-droite issue de 0, il existe au plus une solution de (1_p) dès que*

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\, dt \in \partial\varphi(\mathrm{H} - \{0\}).$$

Démonstration. — Soit $u(t)$ et $u(t)+w$ deux solutions de (1_p), $w \neq 0$. Comme $[u(t),u(t)+w]$ est pour tout t la projection sur H d'un segment contenu dans le graphe de φ, nécessairement

$$u(t) = \lambda(t)w, \qquad \forall t \in [0,\mathrm{T}].$$

Puisque de plus $\lambda(t)(\lambda(t)+1) \geqslant 0$, $\forall t \in [0,\mathrm{T}]$, on a ou bien $\lambda(t) \geqslant 0$, ou bien $\lambda(t) \leqslant -1$, et par raison de connexité l'une de ces deux inégalités est vérifiée pour tout $t \in [0,\mathrm{T}]$.

Quitte à échanger $u(t)$ et $u(t)+w$, on peut supposer $\lambda(t) \geqslant 0$.

Alors, $\frac{d}{dt}(u(t)+w) \in f(t) - \mathrm{A}[(1+\lambda(t))w] = f(t) - \partial\varphi(w)$.

Prenant la moyenne de 0 à T :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \in \partial\varphi(w) \subset \partial\varphi(H - \{0\}),$$

puisque $\partial\varphi(w)$ est un convexe fermé de H.

Ce résultat s'applique en particulier aux semi-normes dont la boule unité est strictement convexe.

Exemple. — $\varphi(x) = |x|$. Il existe *une solution de* (1_p) *et une seule* si $\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\right| < 1$.

Le cas $H = R$ est particulièrement simple.

PROPOSITION 5. — *Pour* $H = R$, *l'équation* (1_p) *possède deux solutions* $u(t)$ *et* $u(t) + w$ *si et seulement si le graphe de* A *présente au moins un palier horizontal d'altitude*

$$y = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt,$$

de largeur supérieure ou égale à $|w| + \omega(g)$, $\omega(g)$ *désignant l'oscillation sur* $[0,T]$ *de la fonction*

$$g(t) = \int_0^t (f(\theta) - y)\,d\theta .$$

Dans ce cas, $u(t) = u_0 + \int_0^t (f(\theta) - y)\,d\theta$.

Démonstration. — Le lemme 3 donne ici que pour presque tout $t \in [0,T]$, $y = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = f(t) - \frac{du}{dt} \in Au(t)$.

D'où, d'une part $u(t) = u_0 + \int_0^t (f(\theta) - y)$, d'autre part $y \in A(u_0 + \alpha w + g(t))$, $\forall t \in [0,T]$, $\forall \alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

La réciproque de cette propriété est triviale.

III. « FORCING PÉRIODIQUE »

On suppose toujours f T-périodique. φ et f étant donnés, tels que $K_f \neq \emptyset$, comment déterminer les éléments de K_f? K_f étant l'ensemble des points fixes de la contraction θ, on peut conjecturer que lorsque $u_0 \in \overline{D(A)}$, $\theta^n u_0$ « converge » vers un élément de K_f pour $n \longrightarrow +\infty$.

Lorsque $\dim H < +\infty$, la situation est particulièrement simple, comme le montre le théorème suivant :

THÉORÈME 6. — *Si* $\dim H < +\infty$, *et* $K_f \neq \emptyset$, *pour tout* $u_0 \in \overline{D(A)}$, $\theta^n u_0$ *converge vers un élément de* K_f *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$. *De plus, la suite de fonctions* $u(nT + t)$ *converge uniformément sur* $[0, +\infty[$.

LEMME 4. — *Soit* (X,d) *un espace métrique et* $\theta = X \longrightarrow X$ *une contraction possédant un point fixe tel que*

$$d(\omega',\omega) = d(\omega',\omega) \Longrightarrow \theta\omega' = \omega'.$$

Soit $x_0 \in X$. *Si la suite* $x_n = \theta^n x_0$ *a une sous-suite convergente, elle converge tout entière vers un point fixe de* θ.

Preuve. — Soit $l = \lim\limits_{n \to +\infty} d(x_n,\omega)$. Il existe une sous-suite x_{n_p} et $\omega' \in X$ tels que $x_{n_p} \longrightarrow \omega'$ dans X. Alors :

$$x_{n_{p+1}} = \theta x_{n_p} \longrightarrow \theta\omega' \Longrightarrow d(\theta\omega',\omega) = l = d(\omega',\omega).$$

Par suite $\theta\omega' = \omega'$, et il est alors trivial que $x \xrightarrow[n\, n \to +\infty]{} \omega'$.

Déduction du théorème 6. — On prend :

$$X = H, \quad d(x,y) = |x - y|.$$

Comme les bornés de H sont relativement compacts, il suffit de voir que $|\theta\omega' - \omega| = |\omega' - \omega|| \Longrightarrow |\theta\omega' = \omega'$. Puisque ω est point fixe de θ, il existe u solution T-périodique de (1) telle que $u(0) = \omega$. Soit u' la solution de (1) telle que $u'(0) = \omega'$. D'après le théorème 5, $u' - u = \text{cte}$, d'où $\theta\omega' = \omega'$.

Pour étudier des situations plus générales, le lemme suivant est essentiel.

LEMME 5. — $\varphi :]-\infty, +\infty] \longrightarrow H$ *convexe s.c.i. propre. On considère les couples* $[u,f] \in C(0,T;H) \times L^2(0,T;H)$ *tels que* u *soit solution (forte) de*

$$\frac{du}{dt} + \partial\varphi(u(t)) \ni f(t) \qquad \textit{sur} \qquad [0,T].$$

Alors l'application $[u,f] \longrightarrow \left[\varphi(u(t)), \frac{du}{dt}\right]$ *est bornée de*

$$L^\infty(0,T;H) \times L^2(0,T;H) \longrightarrow L^\infty(\varepsilon,T;H) \times L^2(\varepsilon,T;H)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ *fixé.*

Démonstration. — Il suffit d'examiner le cas $\mathrm{Min}_H(\varphi) = 0$. Alors, si $\xi \in \varphi^{-1}(0)$, on a (cf. [2])

$$\left(\int_\varepsilon^T \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^T |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \int_0^\varepsilon |f(t)|\, dt + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} |u(0) - \xi|.$$

De plus si $\zeta \in D(\varphi)$, on a

$$\varphi(\zeta) - \varphi(u(t)) \geqslant \left(f(t) - \frac{du}{dt}, \zeta - u(t)\right), \quad \forall t \in [0,T],$$

d'où

$$\int_0^T \varphi(u(t))\, dt \leqslant T\varphi(\zeta) + \frac{1}{2}|u(0) - \zeta|^2 + (|u|_{L^\infty} + |\zeta|) \int_0^T |f(t)|\, dt.$$

Mais en vertu de $\frac{d}{dt}\varphi(u(t)) + \left|\frac{du}{dt}\right|^2 = \left(f(t), \frac{du}{dt}\right)$,

$$\int_\varepsilon^T \left|\frac{d}{dt}\varphi(u(u(t))\right| dt \leqslant C\left(|f|_{L^2(\varepsilon,T;H)}, \left|\frac{du}{dt}\right|_{L^2(\varepsilon,T;H)}\right).$$

On en conclut facilement que

$$|\varphi(u)|_{L^\infty(\varepsilon,T;H)} \leqslant C_1\left(|f|_{L^2(0,T;H)}, \left|\frac{du}{dt}\right|_{L^2(\varepsilon,T;H)}\right).$$

THÉORÈME 7. — *Si pour tout* $M < +\infty$, *les ensembles* $\{|x| \leqslant M, \varphi(x) \leqslant M\}$ *sont compacts dans* H, *on a la même conclusion que pour* $\dim H < +\infty$ *(cf. th. 6).*

Démonstration. — Si $K_f \neq \emptyset$, d'après le lemme 5 $\varphi(u(t))$ est uniformément borné sur $[\varepsilon, +\infty[$, $\forall u_0 \in \overline{D(A)}$. Il suffit alors d'utiliser le lemme 4 avec $X = H$.

COROLLAIRE 4. — *Sous l'hypothèse du théorème 7, les seules solutions bornées sur* R *de l'équation*

$$\frac{du}{dt} + \mathrm{A}u(t) \ni f(t) \quad (\mathrm{A} = \partial\varphi,\ f\ \mathrm{T}\text{-}\textit{périodique})$$

sont les solutions périodiques.

Démonstration. — La suite $u(n\mathrm{T})$, $n \geqslant 0$, étant bornée, il existe une solution périodique. Donc si $\xi \in \overline{\mathrm{D}(\mathrm{A})}$,

$$\theta^n \xi \xrightarrow[n \to +\infty]{} \zeta \in \mathrm{K}_f .$$

La suite $u(-n\mathrm{T})$ étant aussi bornée, et $\varphi(u(t))$ étant borné sur R, il existe $n_p \longrightarrow +\infty$ telle que

$$u(-n_p\mathrm{T}) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \xi .$$

Nécessairement, $\xi \in \overline{\mathrm{D}(\mathrm{A})}$, et alors

$$\begin{aligned} |u_0 - \theta^{n_p}\xi| &= |\theta^{n_p}(u(-n_p\mathrm{T}) - \theta^{n_p}\xi| \\ &\leqslant |u(-n_p\mathrm{T}) - \xi| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0 . \end{aligned}$$

Par suite $u_0 \in \mathrm{K}_f$, et la preuve est achevée.

Remarque. — Si on ne suppose pas que $(\mathrm{I} + \partial\varphi)^{-1}$ est compact, on peut démontrer que $u(n\mathrm{T})$ converge faiblement vers la donnée initiale correspondant à une solution périodique. Mais cette étude est beaucoup plus délicate (cf. Baillon-Haraux, [2]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AMERIO and G. PROUSE, Abstract almost periodic functions and functional analysis, Van Nostrand, New York.

[2] J. B. BAILLON et A. HARAUX, Comportement à l'infini dans les équations d'évolution paraboliques avec « forcing périodique », à paraître.

[3] H. BREZIS, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland Publ. C., Amsterdam, London, (1973).

[4] F. BROWDER and W. PETRYSHYN, The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72, 571-575.

[5] J. L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod & Gauthier-Villars, (1969).
[6] S. MAURY, Séminaire d'Analyse convexe, 1973, Montpellier, Exposé n° 8.

Manuscrit reçu le 23 février 1977
Proposé par J. Neveu.

Alain HARAUX,
Analyse Numérique
Université P. et M. Curie
4 place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.