ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BERNARD HELFFER

Addition de variables et application à la régularité

Annales de l'institut Fourier, tome 28, nº 2 (1978), p. 221-231
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1978__28_2_221_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
28, 2 (1978), 221-231.

ADDITION DE VARIABLES ET APPLICATION A LA RÉGULARITÉ

par B. HELFFER

Introduction.

On se propose de montrer dans cet exposé comment des théorèmes récents d'hypoellipticité ou de propagation des singularités peuvent être améliorés par la méthode d'addition de variables. Cette idée est due semble-t-il à [18]. Au paragraphe 1, nous montrons sur des exemples, quelle est la nature des généralisations que l'on peut obtenir. Au paragraphe 2, nous justifions et formalisons la méthode d'addition de variables.

1. Des exemples.

Exemple 1 [18], [8]. — Pour construire une paramétrixe pour l'opérateur $P = D_t^2 + t^2 D_x^2$, L. P. Rotschild et E. M. Stein utilisent la méthode suivante d'addition de variables.

On considère dans $\mathbf{R}^3$ l'opérateur $\tilde{P} = D_t^2 + (tD_x + D_z)^2$, cet opérateur est bien entendu hypoelliptique, et il est ici évident que l'hypoellipticité de $\tilde{P}$ entraîne celle de P. Mais la préoccupation des auteurs était autre. L'espace vectoriel engendré en chaque point de $\mathbf{R}^2$ par D_t et tD_x n'est pas de dimension constante, alors que celui engendré en chaque point de $\mathbf{R}^3$ par D_t et $(tD_x + D_z)$ est de dimension constante égale à 2. $\tilde{P}$ peut alors être considéré comme un élément de l'algèbre enveloppante du groupe de Heisenberg. $\tilde{P}$ admet une paramétrixe « homogène », dont on déduit une paramétrixe pour P. Il est clair que, dans l'exemple considéré, on n'avait pas besoin d'utiliser un tel arsenal [10], mais la même méthode [18] [8] permet d'obtenir des paramétrixes pour les opérateurs du type de Hörmander [13] : $\sum_{j=1}^{p} X_j^2 + X_0$, vérifiant la condition suffisante d'hypoellipticité.

Exemple 2 [11]. — Soit X un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $T^*X\setminus 0$ le fibré cotangent privé de l'origine, on note (x,ξ) les coordonnées dans $T^*X\setminus 0$.

On considère l'opérateur pseudo-différentiel dans X

$$\mathscr{P} = P_1P_2 + Q$$

où P_j $(j = 1,2)$ est un opérateur pseudo-différentiel régulier d'ordre 1 dont le symbole principal p_j, dont l'ensemble caractéristique est désigné par Σ_j, vérifie la condition :

$$\text{(Hö)} \qquad \frac{1}{i}\{p_j,\bar{p}_j\} < 0 \qquad \text{sur} \qquad \Sigma_j, \quad j = 1, 2.$$

L'hypothèse (Hö) entraîne [12] que P_1 et P_2 sont hypoelliptiques avec perte d'$1/2$ dérivée.

Lorsque Σ_1 et Σ_2 sont transverses, c'est-à-dire que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est une sous-variété C^∞ de $T^*X\setminus 0$, telle que $T_\rho(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = T_\rho\Sigma_1 \cap T_\rho\Sigma_2$ en tout point ρ de $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ et telle que $\operatorname{codim}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = \operatorname{codim}\Sigma_1 + \operatorname{codim}\Sigma_2$, on montre [11] qu'on peut construire une paramétrixe à gauche pour $\mathscr{P}$, dans une classe d'opérateurs pseudo-différentiels adaptée, dérivée des classes de Boutet de Monvel [4].

Lorsque Σ_1 et Σ_2 ne sont pas transverses, on utilise la méthode suivante. On considère dans $X \times \mathbf{R}^2 \ni (x,z_1,z_2)$

$$\tilde{\mathscr{P}} = (P_1 + D_{z_1} + iD_{z_2})(P_2) + Q.$$

Cet opérateur est bien défini (modulo C^∞) sur les distributions ayant un spectre singulier (wave front) proche de $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = 0$, en particulier les distributions qui ne dépendent pas de z_1 et z_2. On a pris ici comme coordonnées de $T^*(X\times\mathbf{R}^2)$: $(x,z_1,z_2,\xi,\zeta_1,\zeta_2)$.

Écrivons $\tilde{\mathscr{P}}$ sous la forme :

$$\tilde{\mathscr{P}} = \tilde{P}_1 . \tilde{P}_2 + \tilde{Q}$$

avec $\tilde{P}_1 = P_1 + D_{z_1} + iD_{z_2}$

$\tilde{P}_2 = P_2$

$\tilde{Q} = Q.$

On désigne par $\tilde{\Sigma}_j$ $(j = 1,2)$ l'ensemble caractéristique du symbole principal $\tilde{p}_j$ de $\tilde{P}_j$; on vérifie aisément que $\tilde{\Sigma}_1$ et $\tilde{\Sigma}_2$ sont transverses, et que $\tilde{p}_j$ $(j = 1,2)$ vérifie (Hö) lorsque $|\zeta_1| \leqslant \varepsilon|\xi|$, $|\zeta_2| \leqslant \varepsilon|\xi|$ pour ε assez petit.

Le théorème précédent nous donne l'existence d'une paramétrixe microlocale $\tilde{Q}$ pour $\tilde{\mathscr{P}}$ dont le symbole complet $\tilde{q}(x,\xi,\zeta_1,\zeta_2)$ est indépendant de z_1, z_2.

Alors $\tilde{q}(x,\xi,0,0)$ est le symbole de la paramétrixe Q de $\mathscr{P}$ (tout est ici microlocal).

Exemple 3. — Soit à étudier l'hypoellipticité dans $\mathbf{R}^2$ de l'opérateur

$$P = D_t^2 + t^4 D_x^2 + \lambda D_x.$$

Dans [6] on a construit des paramétrixes pour des opérateurs pseudo-différentiels dont le symbole principal s'annule exactement à l'ordre 2 sur un cône lisse Σ. L'opérateur ci-dessus ne vérifie pas cette hypothèse, mais on va se ramener à la situation considérée dans cet article en ajoutant des variables.

On considère dans $\mathbf{R}^3$

$$\tilde{P} = D_t^2 + (t^2 D_x + D_z)^2 + \lambda D_x\,.$$

On va étudier son hypoellipticité dans un voisinage conique (dans $T^*\mathbf{R}^3\diagdown 0$) d'un point $\tilde{\rho} = (x,t{=}0,z{=}0,\xi,\tau{=}0,\zeta{=}0)$. On pose $\rho = (x,t = 0,\xi,\tau = 0)$.

Il est montré dans [6], que sous une condition $C_{\tilde{\rho}}$ sur $\tilde{P}$, il existe un voisinage conique $\tilde{\Gamma}_{\tilde{\rho}}$ du point $\tilde{\rho} = (\rho,0,0)$ dans lequel $\tilde{P}$ admet une paramétrixe à gauche $\tilde{Q}$. On entend par là, que pour tout opérateur pseudo-différentiel régulier $\tilde{\chi}$ dont le symbole est à support dans $\tilde{\Gamma}_{\tilde{\rho}}$, on a

$$\tilde{\chi} . \tilde{Q}\tilde{P} \equiv \tilde{\chi} \quad \text{(modulo un opérateur régularisant).}$$

On en déduit comme dans l'exemple 2 une paramétrixe à gauche Q pour P dans un voisinage conique Γ_ρ du point ρ dans $T^*\mathbf{R}^2\setminus 0$.

La condition $C_{\tilde{\rho}}$ s'écrit :

$$\tau^2 + t^4 + \lambda \frac{\xi}{|\xi|} \neq 0 , \quad \forall\tau , \quad \forall t.$$

On vérifie que cette condition est nécessaire [14] pour avoir l'hypoellipticité avec perte d'une dérivée. L'hypoellipticité est également montrée dans [14] par des méthodes d'inégalités microlocalisées. Les résultats de R. Beals [1] permettent de déduire de l'existence d'inégalités a priori, l'existence d'une paramétrixe dans une classe de Beals. Ici nous proposons une méthode de démonstration différente, moins générale par certains côtés, qui donne également l'existence d'une paramétrixe dans une classe de Beals. Son avantage est de « sortir » plus explicitement des conditions suffisantes d'hypoellipticité. Pour montrer quel type de résultats plus généraux on peut obtenir, citons seulement le théorème suivant, cas particulier d'un théorème de Radkevič [17] [14].

Théorème. — *Soit* P *un opérateur pseudo-différentiel régulier dont le symbole principal* p_m *se décompose sous la forme suivante :*

$$p_m = \sum_{i=1}^{\nu} q_i^2$$

où les q_i *sont réels* C^∞ *homogènes de degré* $m/2$. *On suppose que le symbole sous principal* p'_{m-1} *n'est pas réel* $\neq 0$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

i) P *admet une paramétrixe donnant l'hypoellipticité avec perte d'une dérivée.*

ii) *En tout point caractéristique, ou bien* $p'_{m-1} \neq 0$ *ou bien l'application hamiltonienne du hessien de* p_m *(matrice fondamentale) n'est pas nilpotente.*

Exemple 4. — Propagation des singularités pour des opérateurs de type principal.

Soit P un opérateur pseudo-différentiel régulier d'ordre 1 dans $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ dont le symbole principal p vérifie :

$$\{\mathrm{Re}p, \mathrm{Im}p\} = 0 \qquad \text{sur} \qquad \begin{aligned} \mathrm{Re}p &= 0 \\ \mathrm{Im}p &= 0. \end{aligned}$$

On suppose que $d\,\mathrm{Re}p$, $d\,\mathrm{Im}p$ et $\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, dx_i$ sont indépendants; alors p s'annule exactement à l'ordre 1 sur un cône involutif Σ de codimension 2 obtenu comme intersection de deux cônes involutifs Σ_1 et Σ_2 de codimension 1 qui sont les ensembles caractéristiques de $\mathrm{Re}p$ et $\mathrm{Im}p$.

Si ρ est un point de Σ, on désigne par $\Gamma_\rho \subset \Sigma$ l'ensemble obtenu en intégrant successivement le long de $H_{\mathrm{Re}p}$ et $H_{\mathrm{Im}p}$ à partir du point ρ. Localement, Γ_ρ est une sous-variété de dimension 2 de Σ. Le résultat suivant est alors bien connu [7].

Si $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\mathrm{P}u \in \mathrm{C}^\infty(\Omega)$ et $\rho \in \mathrm{WF}(u)$, alors $\Gamma_\rho \subset \mathrm{WF}(u)$.

On se pose la question de savoir ce qui se passe lorsque $H_{\mathrm{Re}p}$ et $H_{\mathrm{Im}p}$ deviennent colinéaires.

Cas 1. — On suppose que $\mathrm{Re}p$ s'annule à l'ordre 1 sur une surface Σ_1 et que $\mathrm{Im}p$ s'annule à l'ordre k exactement $(k > 1)$ sur une surface Σ_2 de codimension 1. Si $u = 0$ est une équation de Σ_2 $\left(u \text{ homogène de degré } \frac{1}{k}\right)$, on a $\mathrm{Im}p = a.u^k$ où a est elliptique d'ordre 0. On suppose que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est involutive et que du, $d\,\mathrm{Re}p$ et $\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, dx_i$ sont indépendants. Quitte à multiplier p par un symbole elliptique, on se ramène [9] au cas où :

$$p = \mathrm{Re}p + ia.u^k$$

et

$$\{\mathrm{Re}p, u\} = 0 \quad \text{partout.}$$

On pose alors $\tilde{p} = \mathrm{Re}p + ia(u^k + \zeta)$ et l'opérateur $\tilde{\mathrm{P}}$ dont le symbole complet est défini par :

$$\begin{aligned} (\text{si} \quad \sigma(\mathrm{P}) &\sim p + p_0 + p_{-1} + \cdots) \\ \sigma(\tilde{\mathrm{P}}) &\sim \tilde{p} + p_0 + p_{-1} + \cdots) \end{aligned}$$

vérifie les hypothèses du théorème précédent au voisinage de

$\zeta = 0$. On déduit alors du résultat de propagation pour $\tilde{P}$, un résultat de propagation pour P le long des courbes intégrales de H_{Rep}.

Cas 2. — Si on suppose que

$$\begin{array}{lll} H_{\mathrm{Rep}} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} & \text{sont indépendants} \\ H_{\mathrm{Imp}} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} & \text{sont indépendants} \\ \{\mathrm{Rep}, \mathrm{Imp}\} = 0 & \textit{partout } (^*) \end{array}$$

alors on obtient, en considérant $\tilde{P} = P + iD_z$ dans $\Omega \times \mathbf{R}$, opérant microlocalement au voisinage de $\zeta = 0$, et le théorème de propagation pour $\tilde{P}$, le résultat de propagation suivant :

Soit ρ un point où $\mathrm{Rep} = 0$, $\mathrm{Imp} = 0$; on désigne par Γ_ρ l'ensemble obtenu en intégrant successivement le long de H_{Rep} et H_{Imp} à partir de ρ. Γ_ρ n'est plus nécessairement une sous-variété de dimension 2.

Alors si $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $Pu \in C^\infty(\Omega)$ et $\rho \in WF(u)$, alors $\Gamma_\rho \in WF(u)$.

Généralisations possibles.

Utilisant les travaux de [2], [3], [5], [15], [19], on peut obtenir des résultats analogues de propagation C^∞ ou analytique selon les cas pour des classes du type suivant; on considère ν-sous-variétés involutives $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_\nu$ de codimension 1 de $T^*\Omega / 0$ transverses et telles que $\Sigma_i \cap \Sigma_j$ soit involutive ($i = 1, \ldots, \nu$; $j = 1, \ldots, \nu$). Localement, cela signifie qu'au voisinage d'un point de $\Sigma = \bigcap_i \Sigma_i$ il existe ν fonctions réelles homogènes de degré 0 $u_i(x, \xi)$ ($i = 1, \ldots, \nu$) telles que

- Σ_i est définie par $u_i = 0$
- les du_i ($i = 1, \ldots, \nu$) et $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, dx_i$ sont indépendantes
- $\{u_i, u_j\} = 0$ sur $u_i = 0$, $u_j = 0$.

(*) Plus généralement, on peut supposer : $\{\mathrm{Rep}, \mathrm{Imp}\} = a \,\mathrm{Rep} + b \,\mathrm{Imp}$ (a, b d'ordre 0).

On sait alors [9] qu'on peut choisir les u_i de telle sorte que $\{u_i,u_j\} = 0$ partout.

Soient $\vec{k} = (k_1,\dots,k_p,k_{p+1},\dots,k_\nu)$ des entiers $\geqslant 1$, et on suppose que :

$$\begin{aligned} k_i &= 1 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, p \\ k_i &> 1 \quad \text{pour} \quad i = p+1, \dots, \nu. \end{aligned}$$

Soient U_i des o.p.d réguliers de symbole principal u_i, et on considère des opérateurs pseudo-différentiels réguliers d'ordre $m + m'$ qui s'écrivent sous la forme :

$$P = \sum_{|\alpha| \leqslant m} A_\alpha U_1^{k_1\alpha_1} \dots U_\nu^{k_\nu\alpha_\nu}$$

où A_α est un opérateur pseudo-différentiel régulier d'ordre $m' + \Sigma|\alpha_i|$. (Dans le cas analytique, on ne fait pas d'hypothèse sur les termes d'ordre inférieur ou égal à $m + m' - 1$; dans le cas C^∞, par contre, une condition de Levi est à imposer, sauf dans les cas considérés dans [5] et [15] qui sont de nature différente).

Alors, on laisse au lecteur le soin d'adapter les conditions de [2], [19] pour obtenir de la propagation dans Γ_ρ, où Γ_ρ est l'ensemble obtenu en intégrant successivement le long de $H_{u_1}, \dots, H_{u_p}$ à partir de ρ. A partir de [2], on obtient par exemple certains cas particuliers de résultats de [3].

Exemple 5. — Propagation des singularités pour des opérateurs caractéristiques sur la réunion de deux hypersurfaces, cas non transverse.

Dans [16], [20], il est démontré le théorème suivant : Soit P_i $(i = 1,2)$ un opérateur pseudo-différentiel régulier d'ordre 1 dont le symbole principal est réel et s'annule exactement à l'ordre 1 sur Σ_i. On suppose que $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est involutive. Soit Q_i $(i = 1$ à $3)$ des opérateurs pseudo-différentiels réguliers d'ordre 0 et on considère l'opérateur :

$$\mathscr{P} = P_1 . P_2 + Q_1 P_1 + Q_2 P_2 + Q_3 .$$

Si ρ appartient à Σ_i, on désigne par Γ_ρ^i la bicaractéristique issue de ρ associée à H_{p_i}.

Alors soit $\rho \in \Sigma \cap WF(u)$ et $V(\rho)$ un voisinage de ρ tel que $V(\rho) \cap WF(\mathscr{P}u) = \varnothing$. Alors localement l'une des bicaractéristiques Γ_ρ^1 ou Γ_ρ^2 est encore dans $\mathrm{WF}(u)$.

La méthode d'addition de variable permet de montrer le même résultat sous les hypothèses suivantes :

1) dp_1 et $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, dx_i$ indépendants

2) dp_2 et $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, dx_i$ indépendants

3) $\{p_1,p_2\} = ap_1 + bp_2$ (a, b d'ordre 0)

(Il existe alors deux symboles elliptiques d'ordre 0 , α et β tels que $\{\alpha p_1, \beta p_2\} = 0$ partout).

2. La méthode d'addition de variables.

Elle est basée sur les deux remarques suivantes.

Remarque 1. — Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ de point courant x . Soit $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\mathbf{R}^p \ni z$; alors u définit de manière évidente une distribution $\tilde{u}$ sur $\Omega \times \mathbf{R}^p$ vérifiant :

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \tilde{u} = 0 \quad i = 1 , \ldots , p.$$

On en déduit que

$$\mathrm{WF}\tilde{u} = (\mathrm{WF}u) \times \mathbf{R}_z^p \times \{0\} \quad \text{dans} \quad \mathrm{T}^*(\Omega \times \mathbf{R}^p) \diagdown \{0\}.$$

Ainsi si

$$\begin{array}{lll} \rho \notin \mathrm{WF}u\,, & (\rho,z,\zeta) \notin \mathrm{WF}(\tilde{u}) & \forall z\,, \quad \forall \zeta \\ \rho \in \mathrm{WF}u\,, & (\rho,z,0) \in \mathrm{WF}(\tilde{u}) & \forall z\,. \end{array}$$

Remarque 2. — Soit $\tilde{\mathrm{P}}$ un opérateur pseudo-différentiel dans $\Omega \times \mathbf{R}^p$ de symbole $\tilde{p}(x,\xi,\zeta)$ indépendant de z contenu dans une classe « microlocale », par exemple

$$\bigcup_m \mathrm{OPS}^m_{1/2\,,\,1/2}(\Omega \times \mathbf{R}^p).$$

Soit $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, alors

$$\tilde{\mathrm{P}} . \tilde{u} \equiv \left(\widetilde{\mathrm{P}u}\right)$$

où P est l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $\tilde{p}(x,\xi,0)$, $\equiv$ signifie modulo C^∞.

Étude de l'hypoellipticité.

On veut étudier l'hypoellipticité d'un opérateur P dans Ω, connaissant un prolongement $\tilde{P}$ de P dans $\Omega \times \mathbf{R}^p$ et l'hypoellipticité microlocale de $\tilde{P}$ au voisinage d'un point $(x,\xi,0,0)$ de $T^*(\Omega \times \mathbf{R}^p)\setminus\{0\}$.

Par prolongement, on entend l'existence (microlocale) d'un symbole $\tilde{p}(x,\xi,\zeta)$ indépendant de z pour l'opérateur $\tilde{P}$, dans $\bigcup_m S^m_{1/2,1/2}(\Omega \times \mathbf{R}^p)$ tel que :

$$\tilde{p}(x,\xi,0) = p(x,\xi) \quad \text{où } p \text{ est le symbole de P .}$$

Soit $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\rho \in T^*\Omega\setminus\{0\}$ et on suppose que $\rho \notin WF(Pu)$; on veut en déduire que $\rho \notin WF(u)$.

Si $\rho \notin WF(Pu)$, il en résulte que $(\rho,0,0) \notin WF(\widetilde{Pu})$ (Remarque 1), d'où $(\rho,0,0) \notin Wf(\tilde{P}.\tilde{u})$ (remarque 2). On en déduit (hypoellipticité de $\tilde{P}$) que $(\rho,0,0) \notin WF(\tilde{u})$ et par conséquent (Remarque 1), $\rho \notin WFu$.

L'hypoellipticité microlocale est ainsi montrée.

Propagation des singularités.

On désigne par $V(\rho)$ un voisinage conique d'un point ρ de $T^*\Omega\setminus\{0\}$. Soit $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\rho \in T^*\Omega\setminus\{0\}$, et on suppose que :

$$\rho \in WF(u), \qquad V(\rho) \cap WF(Pu) = \varnothing .$$

Alors $(\rho,0,0) \in WF(\tilde{u})$ et $V(\rho) \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \cap WF(\widetilde{P.u}) = \varnothing$ d'où

$$\begin{cases} (\rho,0,0) \in WF(\tilde{u}) \\ V(\rho) \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p \cap WF(\tilde{P}.\tilde{u}) = \varnothing . \end{cases}$$

Supposons qu'un théorème de propagation des singularités pour $\tilde{P}$ nous donne qu'un ensemble de $T^*\Omega\setminus 0 \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$ $\tilde{\Gamma}_{(\rho,0,0)}$ est contenu dans $WF(\tilde{u})$; alors par projection par π : $(x,\xi,z,\zeta) \to (x,\xi)$, on obtient que $\Gamma_\rho = \pi(\tilde{\Gamma}_{(\rho,0,0)})$ est contenu dans $WF(u)$. On raisonne de même pour la propagation de la régularité.

Construction de paramétrixes.

On suppose que dans un voisinage conique de $(\rho,0,0)$: $\tilde{V}(\rho) = V(\rho) \times W(0,0)$ (où $V(\rho)$ est un voisinage conique de ρ dans $T^*\Omega\setminus 0)$, il existe une paramétrixe $\tilde{Q}$ dans $OPS^{\infty}_{1/2,1/2}(\Omega \times \mathbf{R}^p)$ indépendante de z pour $\tilde{P}$. C'est-à-dire que :

$$\tilde{Q}.\tilde{P} \equiv I + \tilde{\mathcal{R}}$$

et, quel que soit $\tilde{\chi}$ dans $OPS^0(\Omega \times \mathbf{R}^p)$ à support dans $\tilde{V}(\rho)$, $\tilde{\chi}.\tilde{R}$ est régularisant.

En faisant opérer sur $\tilde{u}$, on obtient :

$$\tilde{Q}\tilde{P}\tilde{u} \equiv \tilde{u} + \tilde{\mathcal{R}}\tilde{u}$$

$$\widetilde{QPu} \equiv \tilde{u} + \widetilde{\mathcal{R}u}$$

d'où
$$QP \equiv I + \mathcal{R}$$

où Q est l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $q = \tilde{q}(x,\xi,0)$, $\mathcal{R}$ vérifie la propriété suivante : quel que soit χ dans $OPS^0(\Omega)$ à support dans $V(\rho)$, χR est régularisant. Q est donc une paramétrixe pour P dans $V(\rho)$ et on vérifie facilement que si $\tilde{Q}$ est dans $OPS^m_{1/2,1/2}(\Omega \times \mathbf{R}^p)$ Q est dans $OPS^m_{1/2,1/2}(\Omega)$.

Conclusion.

La méthode d'addition de variables permet donc, comme on l'a vu sur des exemples, de « désingulariser » certaines situations. Elle est cependant limitée pour les deux raisons suivantes :

1) Dans le cas de l'hypoellipticité, elle ne donne que des conditions suffisantes, d'autant moins bonnes que le prolongement $\tilde{P}$ est mauvais.

2) Elle est liée à l'existence d'un opérateur de prolongement $\tilde{P}$, ce qui limite son champ d'application.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Beals, Caractérisation d'opérateurs pseudo-différentiels et applications (à paraître).

[2] J. M. Bony et P. Schapira, Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles, *Annales de l'Institut Fourrier*, 26,1 (1976), 81-140.

[3] J. M. Bony, Extensions du théorème d'Holmgren, Séminaire Goulaouic-Schwartz, exposé nº 17 (1975-76).

[4] L. Boutet de Monvel, Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, 27 (1974), 585-639.

[5] L. Boutet de Monvel, Propagation des singularités des solutions d'équations analogues à l'équation de Schrödinger, *Proceedings of Conference of F.I.O.* Nice, (1974), Springer Lecture Notes.

[6] L. Boutet de Monvel, A. Grigis et B. Helffer, Paramétrixes d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples, *Astérisque*, (1976).

[7] J. J. Duistermaat and L. Hörmander, Fourier intégral operators II, *Acta Math.*, 128 (1972), 183-269.

[8] R. Goodman, Lifting vector fields to nilpotent Lie groups, A paraître.

[9] A. Grigis et R. Lascar, Équations locales des sous-variétés involutives, *Note aux C.R.A.S.*, (1976).

[10] V. V. Grušin, On a class of elliptic pseudo-differential operators degenerate on a submanifold, *Mat. Sbornik*, Tom 84 (126) (1971) n° 2, 163-195, *Math USSR Sbornik*, 13 n° 2 (1971), 155-185.

[11] B. Helffer, Construction de parametrixes pour des opérateurs pseudo-différentiels caractéristiques sur la réunion de deux cônes lisses, A paraître.

[12] L. Hörmander, Pseudo differential operators and non elliptic boundary problems, *Ann. of Math.*, 83 (1966), 129-209.

[13] L. Hörmander, Hypoelliptic second order equations, *Acta Math.*, 119 (1967), 147-161.

[14] L. Hörmander, A class of hypoelliptic pseudo differential operators with double characteristics, *Mathematische Annalen*, 217 n° 2 (1975).

[15] R. Lascar, Propagation des singularités des solutions d'équations quasi-homogènes, *Annales de l'Institut Fourier*, 27, 2 (1977), 79-123.

[16] R. Lascar, Propagation des singularités pour une classe d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques de multiplicité variable, *Note aux C.R.A.S.*, (1976).

[17] E. V. Radkevič, A priori estimates and hypoelliptic equations with multiple characteristics, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 187 (1969), 274-277; *Soviet Math. Doklady*, 10 (1969), 849-853.

[18] L. P. Rotschild and E. M. Stein, Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups (à paraître).

[19] J. Sjöstrand, Propagation of singularities for operators with multiple involutive characteristics, Report n° 11, Inst. Mittag Leffler (Sweden) 1975.

[20] C. Uhlmann, Thèse M.I.T. (à paraître).

Manuscrit reçu le 19 novembre 1976
Proposé par B. Malgrange.

Bernard Helffer,
Centre de Mathématiques
École Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 Palaiseau Cedex.