

FRANÇOISE BERTRANDIAS

**Décomposition du Galois-module des entiers d'une extension cyclique de degré premier d'un corps de nombres ou d'un corps local**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 29, n° 1 (1979), p. 33-48

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1979\\_\\_29\\_1\\_33\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_1_33_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# DECOMPOSITION DU GALOIS-MODULE DES ENTIERS D'UNE EXTENSION CYCLIQUE DE DEGRÉ PREMIER D'UN CORPS DE NOMBRES OU D'UN CORPS LOCAL

par Françoise BERTRANDIAS

*Dédié à Monsieur Claude Chabauty.*

Soit  $A$  un anneau de Dedekind, de corps des fractions  $K$ , et soit  $L$  une extension galoisienne finie de  $K$ , de groupe de Galois  $G$ . La clôture intégrale  $B$  de  $A$  dans  $L$  est un  $A[G]$ -module de rang 1 ;  $B$  est somme directe d'un nombre fini de sous  $A[G]$ -modules indécomposables et, lorsque  $G$  est abélien, cette décomposition est unique ; elle a été déterminée, dans le cas où  $K$  est le corps  $\mathbf{Q}$  des rationnels, par H.W. Leopoldt [6].

On se propose ici de trouver la décomposition de  $B$  lorsque  $G$  est un groupe cyclique de degré premier, et  $K$  un corps local ou un corps de nombres algébriques.

On étudie d'abord la décomposition d'un  $A[G]$ -module de rang 1, lorsque  $G$  est abélien (§ 1), puis lorsque  $G$  est cyclique de degré premier et  $K$  est un corps local ou un corps de nombres (§ 2). Le cas du Galois-module  $B$  est traité dans le § 3 lorsque  $K$  est un corps local, et dans le § 4 lorsque  $K$  est un corps de nombres.

## 1. Décomposition d'un $A[G]$ -module de rang 1.

### 1.1. Décomposition et idempotents.

On désigne par :

$A$  un anneau commutatif intègre de corps des fractions  $K$ ,  
 $G$  un groupe fini,  
 $M$  un  $A[G]$ -module, de type fini et sans torsion sur  $A$ ,  
 $C(M) = \text{End}_{A[G]} M$  le commutant de  $M$ .

On sait qu'il existe des décompositions de  $M$  en somme directe de sous- $A[G]$ -modules indécomposables (utiliser par exemple le fait que l'application canonique de  $M$  dans  $K \otimes_A M$  est injective).

Rappelons les relations entre les décompositions en somme directe d'un module  $M$  et les idempotents de son commutant  $C(M)$ . Soit une décomposition en somme directe de sous- $A[G]$ -modules :

$$M = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} M_i \quad (1)$$

et soit  $e_i : M \rightarrow M_i$  la projection canonique ( $1 \leq i \leq k$ ). Alors  $(e_i)_{1 \leq i \leq k}$  est un système d'idempotents complet orthogonal de  $C(M)$ , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 1_{C(M)} = \sum_{1 \leq i \leq k} e_i \\ e_i e_j = \delta_{i,j} \end{cases} \quad (2)$$

Réciproquement, à tout système d'idempotents complet orthogonal de  $C(M)$  correspond la décomposition de  $M$  en somme directe :

$$M = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} e_i M.$$

Un idempotent non nul de  $C(M)$  est dit primitif si l'égalité :  $e = e' + e''$  où  $e'$  et  $e''$  sont deux idempotents orthogonaux de  $C(M)$ , entraîne :  $e' = 0$  ou  $e'' = 0$ .

Un sous-module  $M$  figurant dans la décomposition (1) de  $M$  est indécomposable si, et seulement si, l'idempotent correspondant  $e_i$  est primitif.

On voit donc que trouver une décomposition de  $M$  en somme directe de sous- $A[G]$ -modules indécomposables revient à trouver un système complet orthogonal d'idempotents primitifs de  $C(M)$ . (On notera fréquemment : système d'idempotents c.o.p.)

## 1.2. Commutant et ordre associé.

Rappelons les définitions suivantes ([7]) : un  $A[G]$ -module  $M$  est de rang 1 si  $M$  est de type fini et sans torsion sur  $A$ , et si le  $K[G]$ -module  $K \otimes_A M$  est libre avec un générateur. L'ordre associé à un  $K[G]$ -module  $M$  de rang 1 est le sous-anneau de  $K[G]$  défini par :  $\mathcal{D}(M) = \{\lambda \in K[G] \mid \lambda M \subset M\}$ .

On montre facilement :

PROPOSITION 1. — Soit  $G$  un groupe abélien et soit  $M$  un  $A[G]$ -module de rang 1. L'application qui à un élément  $\lambda$  de  $\mathfrak{D}(M)$ , associe la multiplication à gauche par  $\lambda$  dans  $M$ , est un isomorphisme d'anneaux de  $\mathfrak{D}(M)$  sur  $C(M)$ .

Pour trouver les décompositions de  $M$ , on est donc ramené à chercher les systèmes complets orthogonaux d'idempotents primitifs de  $\mathfrak{D}(M)$ .

### 1.3. Unicité de la décomposition.

On suppose  $G$  abélien et  $M$  de rang 1.

PROPOSITION 2. —

1) Il existe un unique système  $S$  complet orthogonal d'idempotents primitifs dans  $\mathfrak{D}(M)$ .

2)  $S$  est l'ensemble des idempotents primitifs de  $\mathfrak{D}(M)$ .

*Démonstration.* — L'existence de  $S$  provient de l'existence de décompositions du module  $M$  en somme directe de sous-modules indécomposables (§ 1.1). L'unicité de  $S$ , et le fait que tout idempotent primitif de  $\mathfrak{D}(M)$  soit contenu dans  $S$ , proviennent du lemme suivant (dont la démonstration est analogue à celle du lemme 5.7 de [10], ch. 3) :

LEMME. — Soit  $R$  un anneau commutatif possédant un système  $S$  complet orthogonal d'idempotents primitifs. Alors  $S$  est l'ensemble des idempotents primitifs de  $R$ .

La proposition 2 entraîne immédiatement :

PROPOSITION 3. — Soit  $G$  un groupe abélien et  $M$  un  $A[G]$ -module de rang 1. Si  $S$  est l'ensemble des idempotents primitifs de  $\mathfrak{D}(M)$ , la décomposition :  $M = \bigoplus_{e \in S} eM$  est l'unique décomposition de  $M$  en somme directe de sous  $A[G]$ -modules indécomposables.

### 1.4. Idempotents de $K[G]$ .

Rappelons comment s'obtiennent les idempotents de  $K[G]$  (cf. [3]). On suppose le groupe  $G$  abélien et le corps  $K$  de carac-

téristique 0. Soit  $I$  l'ensemble des caractères irréductibles de  $G$  sur  $K$ . Pour tout  $\chi$  appartenant à  $I$ , on pose :

$$e_\chi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g.$$

On a les résultats suivants :

- (1)  $e_\chi$  est un idempotent primitif de  $K[G]$ , et  $K[G]e_\chi$  est un corps ;
- (2) on a la décomposition :  $K[G] = \bigoplus_{\chi \in I} K[G]e_\chi$  ;
- (3)  $(e_\chi)_{\chi \in I}$  est l'ensemble des idempotents primitifs de  $K[G]$ .

On montre facilement :

PROPOSITION 4. — *Tout idempotent  $e$  de  $K[G]$  s'écrit :*  
 $e = \sum_{\chi \in J} e_\chi$ ,  $J$  étant un ensemble de caractères irréductibles de  $G$  sur  $K$ .

*Remarque.* — Soit  $n$  l'exposant de  $G$ , et soit  $\mathbf{Q}^{(n)}$  le corps engendré sur  $\mathbf{Q}$  par les racines  $n$ -èmes de 1. Les valeurs prises par un caractère  $\chi$  de  $G$  appartiennent à  $\mathbf{Q}^{(n)}$ . Par suite, les idempotents  $e_\chi$ , et donc aussi tous les idempotents de  $K[G]$ , appartiennent à l'algèbre  $\mathbf{Q}^{(n)}[G]$ .

## 2. Cas où $G$ cyclique de degré premier, et $K$ corps local ou corps de nombres.

### Hypothèses et notations.

$G$  est un groupe cyclique de degré premier  $p$ .

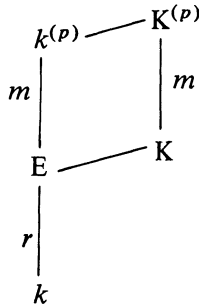
$K$  est un corps local (de caractéristique 0 et de caractéristique résiduelle  $p$ ) ou un corps de nombres, et  $A$  l'anneau de ses entiers.

$M$  est un  $A[G]$ -module de rang 1.

On pose :  $k = \begin{cases} \mathbf{Q}_p & \text{si } K \text{ est un corps local,} \\ \mathbf{Q} & \text{si } K \text{ est un corps de nombres.} \end{cases}$

( $\mathbf{Q}_p$  désignant le corps des nombres  $p$ -adiques).

2.1. Les caractères irréductibles de  $G$  sur  $K$ .



Notons, dans une clôture algébrique de  $k$ ,  $k^{(p)}$  (resp.  $K^{(p)}$ ) le corps engendré sur  $k$  (resp.  $K$ ) par les racines  $p$ -èmes de 1 et  $E = K \cap k^{(p)}$ .

Soit  $X^p - 1 = (X - 1) P_1(X) \dots P_r(X)$  la décomposition du polynôme  $X^p - 1$  en produit de polynômes irréductibles de  $K[X]$ . Les polynômes  $P_i(X)$ , ( $1 \leq i \leq r$ ), ont tous le même degré  $m$  et l'on a :  $m = [K^{(p)} : K] = \frac{p-1}{r}$ . De plus, l'extension  $k^{(p)}/E$  étant galoisienne,  $[k^{(p)} : E] = [K^{(p)} : K] = m$ . Par suite, les polynômes  $P_i(X)$ , ( $1 \leq i \leq r$ ), appartiennent à  $E[X]$ . On a les isomorphismes de  $K$ -algèbres :

$$\begin{aligned}
 K[G] \cong K[X]/X^p - 1 &\cong K[X]/(X - 1) \times \\
 &\times K[X]/P_1(X) \times \dots \times K[X]/P_r(X).
 \end{aligned}$$

Le groupe  $G$  possède donc  $r + 1$  représentations irréductibles sur  $K$  : 1 représentation de degré 1, et  $r$  représentations de degré  $m$ . Comme les polynômes  $P_i(X)$  appartiennent à  $E[X]$ , les  $r + 1$  représentations de  $G$  proviennent, par extension des scalaires, des  $r + 1$  représentations irréductibles de  $G$  sur  $E$ . Pour tout caractère irréductible  $\chi$  de  $G$  sur  $K$ , l'idempotent  $e_\chi$  appartient donc à  $E[G]$  (cf. remarque du § 1.4).

*Notations.*

On note :

- $\chi_0$  le caractère de la représentation de degré 1,
- $\chi_i$ , ( $1 \leq i \leq r$ ), le caractère de la représentation  $K[X]/P_i(X)$ ,

$$T = \sum_{g \in G} g,$$

$$e_{\chi_0} = T/p.$$

## 2.2. Action du groupe de Galois de l'extension $E/k$ .

L'extension  $E/k$  est cyclique de degré  $r$ , et  $\text{Gal}(E/k)$  opère sur l'ensemble des représentations irréductibles de  $G$  sur  $E$ , et donc aussi sur leurs caractères. On voit facilement que  $\chi_0$  est invariant, et que les caractères  $\chi_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) sont permutés transitivement.

En posant, pour tout  $\varphi$  de  $\text{Gal}(E/k)$  et pour tout  $\lambda = \sum_{g \in G} a_g g$  de  $E[G]$ :  $\varphi\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) = \sum_{g \in G} \varphi(a_g) g$ , on obtient une opération de  $\text{Gal}(E/k)$  sur  $E[G]$ ;  $\varphi$  est un automorphisme de  $k$ -algèbre de  $E[G]$ .

On remarque que le groupe  $\text{Gal}(E/k)$  laisse invariant l'idempotent  $e_{\chi_0}$  et permute transitivement les idempotents  $e_{\chi_i}$  ( $1 \leq i \leq r$ ).

## 2.3. Hypothèse d'invariance.

Soit  $M$  un  $A[G]$ -module de rang 1, et  $\mathfrak{D}(M)$  son ordre associé dans  $K[G]$ . On sait que tout idempotent de  $\mathfrak{D}(M)$  appartient à  $E[G]$ . On supposera par la suite que l'ordre  $\mathfrak{D}(M)$  vérifie l'hypothèse suivante :

**HYPOTHESE D'INVARIANCE (H).** — *Tout élément de  $\text{Gal}(E/k)$  laisse globalement invariant l'ordre  $\mathfrak{D}(M) \cap E[G]$ .*

**THEOREME 1.** — *Soit  $M$  un  $A[G]$ -module de rang 1 décomposable, dont l'ordre associé  $\mathfrak{D}(M)$  vérifie l'hypothèse d'invariance (H). Soit  $F$  le plus petit corps intermédiaire entre  $k$  et  $E$  tel que  $F[G]$  contienne tous les idempotents de  $\mathfrak{D}(M)$ . Alors  $F[G]$  et  $\mathfrak{D}(M)$  ont les mêmes idempotents.*

*Démonstration.* — Notons :

$S$  l'ensemble des idempotents primitifs de  $\mathfrak{D}(M)$ ,  
 $r_F = [F:k]$ ,  
 $\tau$  un générateur du groupe cyclique  $\text{Gal}(F/k)$ .

D'après le choix du corps  $F$ , il existe un idempotent  $e$  de  $S$  tel que les éléments  $\tau^i(e)$ , ( $0 \leq i < r_F$ ), soient tous distincts. Ces éléments  $\tau^i(e)$  appartiennent à  $\mathfrak{D}(M)$  (hypothèse (H)), et sont nécessairement des idempotents primitifs de  $\mathfrak{D}(M)$ . Soit

$e' = 1 - \sum_{0 \leq i < r_F} \tau^i(e)$ ;  $e'$  est un idempotent et  $(e', e, \tau(e), \dots, \tau^{r_F-1}(e))$  est un système complet orthogonal d'idempotents de  $\mathfrak{D}(M)$ . Comme ce système a le même nombre d'éléments,  $r_F + 1$  que le système d'idempotents c.o.p.  $S'$  de  $F[G]$ , il ne peut que coïncider avec  $S'$  et donc aussi avec  $S$ .

**2.4. Modules décomposables.**

Le théorème 1 entraîne immédiatement :

PROPOSITION 5. — Soit  $M$  un  $A[G]$ -module dont l'ordre associé  $\mathfrak{D}(M)$  vérifie l'hypothèse d'invariance (H).  $M$  est décomposable si et seulement si l'idempotent  $T/p$  appartient à  $\mathfrak{D}(M)$ . Dans ce cas, on a la décomposition :

$$M = \frac{T}{p} M \oplus \left(1 - \frac{T}{p}\right) M.$$

Remarque. — L'idempotent  $T/p$  est primitif dans  $K[G]$ , et donc aussi dans  $\mathfrak{D}(M)$ . Par suite, le module  $\frac{T}{p} M$  est indécomposable.

**3. Anneau des entiers d'une extension cyclique de degré premier d'un corps local.**

*Notations et hypothèses.*

- $K$  est un corps local de caractéristique 0 et de caractéristique résiduelle  $p$ , d'anneau de valuation  $A$  ;
- $L$  est une extension cyclique de degré  $p$  de  $K$  ;
- $B$  est l'anneau des entiers de  $L$  ;
- $\sigma$  est un générateur de  $G = \text{Gal}(L/K)$  ;
- $t$  est le nombre de ramification de l'extension  $L/K$ .

$B$  est un  $A[G]$ -module de rang 1. On se propose de trouver la décomposition de  $B$  en somme directe de sous- $A[G]$ -modules indécomposables.

**3.1. L'ordre associé à  $B$ .**

Si l'extension  $L/K$  est non ramifiée,  $\mathfrak{D}(B) = A[G]$  (cf. [9]). Si l'extension est ramifiée,  $\mathfrak{D}(B)$  a été déterminé précédemment



([1], [2], [4]). Pour énoncer le résultat, introduisons les notations et définitions suivantes ; pour tout réel  $x$  :

$[x]$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ ,

$\varkappa = x - [x]$  est la partie fractionnaire de  $x$ ,

$\mathcal{E}(x) = \{h \text{ entier } \geq 1 \mid h' \text{ entier et } 1 \leq h' < h \text{ entraînent :}$   
 $\quad \underbrace{h'x} > \underbrace{hx}\}$ .

Si  $K$  est un corps local :

$v_K$  désigne la valuation normalisée de  $K$ ,

$e_K$  désigne l'indice absolu de ramification de  $K$ .

PROPOSITION 6. — Soit, pour tout entier  $i$  ( $0 \leq i \leq p-1$ ),  
 $n_i = \left[ \frac{it}{p} \right] + \delta_i$ , où  $\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } p-i \in \mathcal{E}(t/p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . On a :

$$\mathfrak{D}(B) = \left\{ \sum_{0 \leq i \leq p-1} a_i (\sigma-1)^i \mid a_i \in K \text{ et } v_K(a_i) \geq -n_i \text{ (} 0 \leq i \leq p-1 \text{)} \right\}.$$

On en déduit facilement :

PROPOSITION 7. — L'ordre  $\mathfrak{D}(B)$  vérifie l'hypothèse d'invariance (H).

### 3.2. Modules $B$ décomposables.

THEOREME 2. — Le  $A[G]$ -module  $B$  est décomposable si, et seulement si, l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- (1) l'idempotent  $T/p$  appartient à  $\mathfrak{D}(B)$  ;
- (2) le nombre de ramification  $t$  de l'extension  $L/K$  est tel que :

$$\frac{p}{p-1} e_K - 1 \leq t \leq \frac{p}{p-1} e_K.$$

DEFINITION. — Le nombre de ramification  $t$  de l'extension  $L/K$  est dit "presque maximal" (cf. [5]) si l'une ou l'autre des conditions équivalentes (1) ou (2) est vérifiée.

Démonstration. — L'ordre  $\mathfrak{D}(B)$  vérifie l'hypothèse d'invariance (H). Donc (proposition 5)  $B$  est décomposable si, et seulement si,  $T/p$  appartient à  $\mathfrak{D}(B)$ . L'équivalence des conditions (1) et (2) résulte facilement de la description de l'ordre  $\mathfrak{D}(B)$  (cf. [4]).

Ce théorème a été démontré précédemment, et indépendamment, par M.J. Ferton (1975, non publié) et Y. Miyata [8].

### 3.3. Décomposition de B. Énoncé des résultats.

*Notations.*

$a$  désigne le reste de la division de  $t$  par  $p$  ;

$I$  désigne l'ensemble des caractères irréductibles de  $G$  sur  $K$ .

THEOREME 3. — Soit  $L/K$  une extension cyclique de degré  $p$  de corps locaux dont le nombre de ramification  $t$  est presque maximal.

1) Si  $a$  est nul ou divise  $p - 1$ , l'ensemble des idempotents primitifs de  $\mathfrak{D}(B)$  est  $\{e_\chi \mid \chi \in I\}$  et la décomposition de  $B$  en somme directe de sous-modules indécomposables s'écrit :  $B = \bigoplus_{\chi \in I} e_\chi B$ .

2) Si  $a$  est différent de 0 et ne divise par  $p - 1$ , l'ensemble des idempotents primitifs de  $\mathfrak{D}(B)$  est  $\left\{ \frac{T}{p}, 1 - \frac{T}{p} \right\}$  et la décomposition de  $B$  en somme directe de sous-modules indécomposables s'écrit :  $B = \frac{T}{p} B \oplus \left(1 - \frac{T}{p}\right) B$ .

Remarque. — Un  $A[G]$ -module  $N$ , de type fini sans torsion sur  $A$ , est  $A$ -irréductible si  $K \otimes_A N$  est un  $K[G]$ -module simple (cf. [3]). Pour tout  $\chi \in I$ ,  $e_\chi B$  est  $A$ -irréductible. En particulier  $\frac{T}{p} B$  est  $A$ -irréductible. Par contre,  $\left(1 - \frac{T}{p}\right) B$  est  $A$ -irréductible si et seulement si les corps  $K$  et  $\mathbf{Q}_p^{(p)}$  sont linéairement disjoints sur  $\mathbf{Q}_p$  ( $r = 1$ ). Le théorème 3 montre donc que  $B$  est décomposable en somme directe de sous- $A[G]$ -modules  $A$ -irréductibles si et seulement si

- 1)  $t$  est presque maximal
- 2) ou bien  $K$  et  $\mathbf{Q}_p^{(p)}$  sont linéairement disjoints sur  $\mathbf{Q}_p$  ou bien  $a$  est nul ou divise  $p - 1$ .

### 3.4. Démonstration du théorème 3.

D'après le théorème 1, l'ensemble  $S$  des idempotents primitifs de  $\mathfrak{D}(M)$  coïncide avec l'ensemble des idempotents primitifs de  $F[G]$ , où  $F$  est le plus petit corps intermédiaire entre  $\mathbf{Q}_p$  et  $E$

tel que  $F[G]$  contienne  $S$ . Il s'agit donc de déterminer le corps  $F$ . La démonstration se fait en plusieurs étapes.

On vérifie immédiatement le

LEMME 1. —  $F$  est le plus grand corps intermédiaire entre  $\mathbf{O}_p$  et  $E$  tel que, pour tout caractère irréductible  $\chi$  de  $G$  sur  $F$ ,  $e_\chi$  appartient à  $\mathfrak{D}(B)$ .

Introduisons les notations suivantes :  $A_F$  est l'anneau des entiers de  $F$ ,  $\mathfrak{M}_F$  l'ordre maximal de l'algèbre  $F[G]$  ;  $e(K/F) = e_K/e_F$  ;  $m_F = [\mathbf{Q}_p^{(p)} : F]$ .

On montre facilement le

LEMME 2. — Soit  $F$  un corps local contenu dans  $\mathbf{Q}_p^{(p)}$ . Alors  $\mathfrak{M}_F$  est l'anneau engendré par  $A_F[G]$  et par les idempotents  $e_\chi$ ,  $\chi$  parcourant l'ensemble des caractères irréductibles de  $G$  sur  $F$ .

Par ailleurs, on démontre le

LEMME 3. — Pour tout corps local  $F$ , on a

$$\mathfrak{M}_F = \left\{ \sum_{0 \leq i \leq p-1} a_i (\sigma - 1)^i \mid a_i \in F \text{ et } v_F(a_i) \geq - \left[ \frac{i}{p-1} e_F \right] \right\}.$$

LEMME 4. —  $F$  est le plus grand corps intermédiaire entre  $\mathbf{O}_p$  et  $E$  tel que, pour tout entier  $i$ ,  $0 \leq i \leq p-1$ , on ait :

$$e(K/F) \underbrace{\frac{i}{m_F}}_{\underbrace{p}} - \frac{ia}{p} - \frac{ia}{p(p-1)} + \delta_i \geq 0 \quad (1)$$

où  $\delta_i$  vaut 1 ou 0 suivant que  $p-i$  appartient à  $\mathfrak{E}\left(\frac{t}{p}\right)$  ou non.

*Démonstration.* — Les lemmes 1, 2, 3 et la description de l'ordre  $\mathfrak{D}(B)$  (proposition 6) entraînent :  $F$  est le plus grand corps intermédiaire entre  $\mathbf{O}_p$  et  $E$  tel que  $\frac{n_i}{e(K/F)} \geq \left[ \frac{i}{p-1} e_F \right]$ , ( $0 \leq i \leq p-1$ ). Posons :  $t = a + up$ , ( $0 \leq a \leq p-1$ ). Comme  $t$  est presque maximal, on a (cf. [4]) :  $e_K = a + u(p-1)$ . On en déduit (remarquer que  $p-1 = e_F m_F$ ) :

$$n_i - e(K/F) \left[ \frac{i}{p-1} e_F \right] = e(K/F) \underbrace{\frac{i}{m_F}}_{\underbrace{p}} - \frac{ia}{p} - \frac{ia}{p(p-1)} + \delta_i.$$

Le lemme 4 en résulte.

LEMME 5. — Si  $a = 0$ , on a :  $F = E$ . Si  $a \neq 0$ ,  $F$  est le plus grand corps intermédiaire entre  $\mathbf{Q}_p$  et  $E$  tel que l'ensemble des entiers  $\{p - jm_F \mid 1 \leq j \leq e_F\}$  soit contenu dans  $\mathfrak{E}\left(\frac{t}{p}\right)$ .

*Démonstration.* — Si  $a = 0$ , l'inégalité (1) est vérifiée pour tout corps intermédiaire  $F$  entre  $\mathbf{Q}_p$  et  $E$ . Supposons  $a \neq 0$ . Soit  $F$  un corps intermédiaire entre  $\mathbf{Q}_p$  et  $E$ , et soit  $i$  un entier non multiple de  $m_F$ . On a :

$$e(K/F) \frac{i}{\underbrace{m_F}} - \frac{ia}{p(p-1)} \geq \frac{a}{p-1} - \frac{ia}{p(p-1)} \geq 0$$

et donc (1) est vérifiée. Le lemme 5 en résulte.

LEMME 6. — Soit  $d$  un diviseur de  $p-1$ ,  $d < p-1$ . Les entiers  $p - jd$ ,  $1 \leq j \leq \frac{p-1}{d}$ , appartiennent à  $\mathfrak{E}\left(\frac{t}{p}\right)$  si et seulement si  $a$  divise  $p-1$  et  $\frac{p-1}{a}$  divise  $d$ .

*Démonstration.* — On utilise le développement en fraction continue de  $t/p$ , en notant  $q_0 = 1$ ,  $q_1, \dots, q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}, \dots, q_n = p$ , les dénominateurs des réduites de  $t/p$  (on suppose  $a_n > 1$ ). On montre ([4]) :

$$\mathfrak{E}\left(\frac{t}{p}\right) = \{p\} \cup \left\{ q_{2i} + xq_{2i+1} \mid 0 \leq i < \frac{n-1}{2} \text{ et } x \text{ entier, } 0 \leq x \leq a_{2i+2} \right\}.$$

Supposons que  $p-d$  et  $p-2d$  appartiennent à  $\mathfrak{E}\left(\frac{t}{p}\right)$ ; il existe des entiers  $i, j, x, y$  tels que :

$$p-d = q_{2i} + xq_{2i+1}, \quad 0 \leq j \leq i < \frac{n-1}{2}$$

$$p-2d = q_{2j} + yq_{2j+1}, \quad 0 \leq x \leq a_{2i+2}, \quad 0 \leq y \leq a_{2j+2}.$$

On en déduit :  $p = 2(q_{2i} + xq_{2i+1}) - (q_{2j} + yq_{2j+1}) < 2q_{2i+2}$ . Comme  $p = a_n q_{n-1} + q_{n-2} > 2q_{n-1}$ , on a :  $2i+2 > n-1$ , et donc  $2i = n-2$ . Par suite  $p = a_{2i+2} q_{2i+1} + q_{2i}$ , et  $d = (a_{2i+2} - x)q_{2i+1}$ . Ceci entraîne :  $q_{2i+1}$  divise  $d$  et donc divise  $p-1$ . On en déduit :  $q_{2i+1}$  divise  $q_{2i}-1$  et donc  $q_{2i} = 1$ . D'où  $i = 0$ , et  $n = 2$ . Il en résulte :  $a$  divise  $p-1$ ,  $a \neq 1$ .

Posons  $q = \frac{p-1}{a}$ ; on a  $q_1 = q$  et  $a_2 = a$ . D'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\left(\frac{t}{p}\right) &= \{1 + xq \mid x \text{ entier et } 0 \leq x \leq a\} \\ &= \{p - jq \mid j \text{ entier et } 0 \leq j \leq a\}. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat annoncé.

On peut alors terminer la démonstration du théorème 3. Si  $a = 0$ , on a vu que  $F = E$ . *Supposons donc  $a \neq 0$ .* Si  $F$  est un corps intermédiaire entre  $\mathbf{O}_p$  et  $E$ ,  $m_F$  est un multiple de  $m = m_E$ , et  $F = \mathbf{O}_p$  si et seulement si  $m_F = p - 1$ . *Si  $a$  ne divise pas  $p - 1$ ,* les lemmes 5 et 6 montrent que  $m_F = p - 1$ , d'où  $F = \mathbf{O}_p$ . *Si  $a$  divise  $p - 1$ ,* pour tout corps  $F$  intermédiaire entre  $\mathbf{O}_p$  et  $E$ ,  $\frac{p-1}{a}$  divise  $m_F$ ; en effet,  $m_F = \frac{p-1}{a} \frac{a}{e_F}$ , et  $e_F$ , divisant  $e_K$  et  $p - 1$ , divise  $a = e_K - u(p - 1)$ . Par suite, si  $a = 1$ ,  $m_F = p - 1$ , et donc  $F = E = \mathbf{O}_p$ . Si  $a \neq 1$ , pour tout corps  $F$  intermédiaire entre  $\mathbf{O}_p$  et  $E$ ,  $\{p - jm_F \mid 1 \leq j \leq e_F\}$  est contenu dans  $\mathcal{E}\left(\frac{t}{p}\right)$ , d'après le lemme 6. D'où  $F = E$  (lemme 5).

On en déduit le théorème 3.

#### 4. Anneau des entiers d'une extension cyclique de degré premier d'un corps de nombres.

*Notations et hypothèses.*

$K$  est un corps de nombres,  $A$  son anneau d'entiers,  
 $L$  une extension cyclique de degré  $p$  de  $K$ ,  
 $B$  l'anneau des entiers de  $L$ ,  
 $\sigma$  est un générateur de  $G = \text{Gal}(L/K)$ .

$B$  est un  $A[G]$ -module de rang 1; on se propose de déterminer la décomposition de  $B$  en somme directe de sous-modules indécomposables.

##### 4.1. Les extensions $L_{\mathfrak{P}}/K_p$ .

Pour tout idéal premier  $\mathfrak{P}$  de  $L$ , on note :

$L_{\mathfrak{P}}$  un complété de  $L$  pour la valuation  $\mathfrak{P}$ -adique;  
 $B_{\mathfrak{P}}$  l'anneau des entiers de  $L_{\mathfrak{P}}$ ;  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P} \cap A$ ;  
 $K_p$  le complété de  $K$  dans  $L_{\mathfrak{P}}$  pour la valuation  $p$ -adique;

$A_{\mathfrak{p}}$  l'anneau des entiers de  $K_{\mathfrak{p}}$ ;

$v_{\mathfrak{p}}$  (resp.  $v_p$ ) la valuation  $\mathfrak{p}$ -adique (resp.  $p$ -adique) normalisée de  $L_{\mathfrak{p}}$  (resp.  $K_p$ ).

La factorisation de  $\mathfrak{p}B$  en idéaux premiers de  $L$  a l'une des 3 formes suivantes :

- a)  $\mathfrak{p}B = \mathfrak{P}^p$  ( $\mathfrak{p}$  ramifié)
- b)  $\mathfrak{p}B = \mathfrak{P}$  ( $\mathfrak{p}$  inerte)
- c)  $\mathfrak{p}B = \mathfrak{P} \sigma \mathfrak{P} \dots \sigma^{p-1} \mathfrak{P}$  ( $\mathfrak{p}$  décomposé).

Dans les cas a) ou b),  $L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$  est une extension cyclique de degré  $p$ ; on identifie son groupe de Galois à  $G$ . On note  $t_p$  le nombre de ramification de l'extension  $L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$ . Si l'idéal  $\mathfrak{p}$  est au-dessus de  $p$ , et se ramifie dans  $L$ , l'extension  $L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}$  est sauvagement ramifiée. On connaît, d'après l'étude locale du § 3, les idempotents de l'ordre  $\mathfrak{D}(B_{\mathfrak{p}})$ , ordre associé à  $B_{\mathfrak{p}}$  dans l'algèbre  $K_p[G]$ . Dans le cas c), on a  $L_{\mathfrak{p}} = K_p$ .

#### 4.2. L'ordre $\mathfrak{D}(B)$ .

PROPOSITION 8. — Soit  $n_{\mathfrak{p},i}$  l'entier défini pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $K$ , et pour tout entier  $i$ ,  $0 \leq i \leq p-1$ , par  $n_{\mathfrak{p},i} = 0$ , sauf si  $\mathfrak{p}$  est sauvagement ramifié dans  $L$ , auquel cas on pose :

$$n_{\mathfrak{p},i} = \left[ \frac{i}{p} t_p \right] + \delta_i, \text{ avec } \delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } p-i \in \mathfrak{E} \left( \frac{t}{p} \right) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'ordre  $\mathfrak{D}(B)$  est donné par :

$$\mathfrak{D}(B) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{0 \leq i \leq p-1} a_i (\sigma - 1)^i \mid a_i \in K \text{ et } v_p(a_i) \geq -n_{\mathfrak{p},i}, \text{ pour tout} \\ \text{idéal premier } \mathfrak{p} \text{ de } K, \text{ et tout entier } i, 0 \leq i \leq p-1 \end{array} \right\}$$

Démonstration. — Soit  $\lambda = \sum_{0 \leq i \leq p-1} a_i (\sigma - 1)^i$  un élément de

$K[G]$ ;  $\lambda$  appartient à  $\mathfrak{D}(B)$  si et seulement si, pour tout  $\mathfrak{p}$  idéal premier de  $L$ , on a :

$$\text{pour tout } x \text{ appartenant à } B, v_{\mathfrak{p}}(\lambda x) \geq 0. \tag{1}$$

Si  $\mathfrak{p} \cap A$  n'est pas décomposé dans  $L$ , on voit facilement que (1) équivaut à :  $\lambda$  appartient à  $\mathfrak{D}(B_{\mathfrak{p}})$ ; par suite, (1) équivaut à  $v_p(a_i) \geq -n_{\mathfrak{p},i}$  d'après l'étude locale (proposition 6).

Si  $\mathfrak{P} \cap A$  est décomposé dans  $L$ , on montre, en utilisant par exemple le théorème des restes chinois relatif à l'anneau  $A$  et aux idéaux  $\sigma^i \mathfrak{P}$ , que (1) équivaut à :  $v_{\mathfrak{p}}(a_i) \geq 0$ , pour tout entier  $i$ ,  $0 \leq i \leq p-1$ .

De la proposition 8, on déduit :

PROPOSITION 9. — L'ordre  $\mathfrak{D}(B)$  vérifie l'hypothèse d'invariance (H).

#### 4.3. Modules $B$ décomposables.

On déduit facilement des résultats antérieurs :

THEOREME 4. — Le  $A[G]$ -module  $B$  est décomposable si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- (1) l'idempotent  $T/p$  appartient à  $\mathfrak{D}(B)$ ,
- (2) tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $K$  au-dessus de  $p$  est ramifié dans  $L$ , et le nombre de ramification correspondant  $t_{\mathfrak{p}}$  est presque maximal, c'est-à-dire :  $\frac{p}{p-1} e_K - 1 \leq t_{\mathfrak{p}} \leq \frac{p}{p-1} e_K$ .

#### 4.4. Décomposition de $B$ .

*Notations.*

Soit  $I$  l'ensemble des caractères irréductibles de  $G$  sur  $K$  ; notons  $a_{\mathfrak{p}}$  le reste de la division de  $t_{\mathfrak{p}}$  par  $p$ .

THEOREME 5. — Soit  $L/K$  une extension cyclique de degré  $p$  de corps de nombres telle que tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $K$  au-dessus de  $p$  soit ramifié dans  $L$ , le nombre de ramification correspondant  $t$  étant presque maximal.

1) Si, pour tout  $\mathfrak{p}$  au-dessus de  $p$ ,  $a_{\mathfrak{p}}$  est nul ou divise  $p-1$ , l'ensemble des idempotents primitifs de  $\mathfrak{D}(B)$  est  $\{e_{\chi} \mid \chi \in I\}$ , et la décomposition de  $B$  en somme directe de sous- $A[G]$ -modules indécomposables s'écrit :  $B = \bigoplus_{\chi \in I} e_{\chi} B$ .

2) S'il existe un idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $K$  au-dessus de  $p$  tel que  $a_{\mathfrak{p}} \neq 0$ , et  $a_{\mathfrak{p}}$  ne divise pas  $p-1$ , l'ensemble des idempotents primitifs de  $\mathfrak{D}(B)$  est  $\left\{ \frac{T}{p}, 1 - \frac{T}{p} \right\}$  et la décomposition de  $B$

en somme directe de sous- $A[G]$ -modules indécomposables s'écrit :

$$B = \frac{T}{p} B \oplus \left(1 - \frac{T}{p}\right) B.$$

*Démonstration.* — Elle se déduit facilement de l'étude locale (théorème 3) et du fait qu'un idempotent  $e$  de  $K[G]$  appartient à  $\mathfrak{D}(B)$  si et seulement si, pour tout  $\mathfrak{P}$  au-dessus de  $p$ ,  $e$  appartient à  $\mathfrak{D}(B_{\mathfrak{P}})$ .

*Remarque.* — (cf. remarque du § 3.3)  $B$  est décomposable en somme directe de sous  $A[G]$ -modules  $A$ -irréductibles si, et seulement si

1) tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $K$  au-dessus de  $p$  est ramifié dans  $L$ , et le nombre de ramification  $t_{\mathfrak{p}}$  correspondant est presque maximal ;

2) ou bien  $K$  et  $\mathbf{Q}^{(p)}$  sont linéairement disjoints sur  $\mathbf{Q}$ , ou bien, pour tout  $\mathfrak{p}$  au-dessus de  $p$ ,  $a_{\mathfrak{p}}$  est nul ou divise  $p-1$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. BERTRANDIAS et M.J. FERTON, Sur l'anneau des entiers d'une extension cyclique de degré premier d'un corps local, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 274 (1972), 1330-1333.
- [2] F. BERTRANDIAS, J.P. BERTRANDIAS et M.J. FERTON, Sur l'anneau des entiers d'une extension cyclique de degré premier d'un corps local, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 274 (1972), 1388-1391.
- [3] C.W. CURTIS et I. REINER, Representation theory of finite groups and associative algebras, *Pure and Appl. Math.*, XI, Interscience, New York, (1962).
- [4] M.J. FERTON, Sur l'anneau des entiers d'extensions cycliques de degré  $p$  et d'extensions diédrales de degré  $2p$  d'un corps local, *Thèse de doctorat de troisième cycle*, Grenoble, (1972).
- [5] H. JACOBINSKI, Über die Hauptordnung eines Körpers als Gruppen modul, *J. reine angew. Math.*, 213 (1964), 151-164.



