Annales de l'institut Fourier

Jean Coquet

Sur la mesure spectrale des suites multiplicatives

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 3 (1979), p. 163-170
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_3_163_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 3 (1979), 163-170

SUR LA MESURE SPECTRALE DES SUITES MULTIPLICATIVES

par Jean COQUET

I. INTRODUCTION

I.1.

Dans l'article [2], T. Kamae, M. Mendès-France et l'auteur ont établi des résultats généraux concernant les propriétés spectrales des suites arithmétiques. Comme application de ces résultats, ils ont démontré qu'une suite q-multiplicative de module 1 possédait une mesure spectrale purement singulière ou purement atomique (en fait, c'est une classe de suites un peu plus large qui a été étudiée). Nous nous proposons ici de montrer le théorème suivant :

THEOREME. – *Soit* g *une suite multiplicative* [4] *de module* $\leqslant 1$. *Si le spectre de Fourier-Bohr de* g *est non vide,* g *a une mesure spectrale atomique.*

Nous commencerons par établir un résultat partiel.

PROPOSITION. – *Soit* g *une suite multiplicative de module* $\leqslant 1$. *Si* g *n'a pas une valeur moyenne nulle, c'est-à-dire si*

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{1}{N} \left| \sum_{n \leqslant N} g(n) \right| > 0,$$

g *a une mesure spectrale atomique.*

S'appuyant sur la propriété suivante démontrée par J.P. Bertrandias [1], la preuve du théorème évitera le calcul de la corrélation de g :

PROPRIETE. – *Soit* g *une suite de module* 1. g *est* M – *presque – périodique (autrement dit possède une mesure spectrale atomique) si et seulement si, quel que soit* $\epsilon > 0$, *il existe un sous-ensemble* E_ϵ *de* $\mathbf{N}$ *relativement dense tel que, pour tout* t *appartenant à* E_ϵ :

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} |g(n+t) - g(n)| \leqslant \epsilon .$$

I.2. Notations.

Pour tout x réel, on pose $e(x) = e^{2i\pi x}$ et $\|x\| = \operatorname{Min}_{n \in \mathbf{Z}} |x - n|$

P désigne l'ensemble des nombres premiers et p un élément de P.

II. DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION

II.1. Rappels.

II.1.1. *Un résultat de G. Halasz* [6].

LEMME 1. – *Soit* g *une suite multiplicative de module* $\leqslant 1$. *Une condition suffisante pour que* g *ait une valeur moyenne nulle est que :*

$$\forall u \in \mathbf{R}, \quad \sum_{p \in P} \frac{1}{p} (1 - \mathcal{R}e(g(p)\, p^{-2i\pi u})) = +\infty .$$

II.1.2. *Inégalité de Turan-Kubilius* [7].

LEMME 2. – *Il existe* $c > 0$ *tel que, pour tout* $N \in \mathbf{N}^*$ *et toute suite additive réelle* f,

$$\sum_{n=1}^{N} \Big(f(n) - \sum_{\substack{p \in P \\ p \leqslant N}} \frac{f(p)}{p} \Big)^2 \leqslant c\, N \sum_{\substack{(p,\alpha) \in P \times \mathbf{N}^* \\ p^\alpha \leqslant N}} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha} .$$

II.2. Cas où g est de module 1.

D'après le lemme 1, si g n'a pas une valeur moyenne nulle, il existe u réel tel que :

$$\sum_{p\in P} \frac{1}{p} \left(1 - \mathcal{R}e(g(p)\, p^{-2i\pi u})\right) < +\infty . \qquad ①$$

On pose $h(n) = g(n)\, n^{-2i\pi u}$ de sorte que h est multiplicative de module 1 et on définit la suite additive réelle f par :

$$h(p^\alpha) = e(f(p^\alpha)) \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} < f(p^\alpha) \leqslant \frac{1}{2} \cdot$$

On remarque que $h(n) = e(f(n))$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Et d'après ①,

$$\sum_{p\in \mathrm{P}} \frac{f^2(p)}{p} < +\infty , \quad \text{donc}$$

$$\sum_{(p,\alpha)\in \mathrm{P}\times\mathbf{N}^*} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha} < +\infty . \qquad ②$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\sum_{\substack{(p,\alpha)\in \mathrm{P}\times\mathbf{N}^* \\ p^\alpha \geqslant k}} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha} \leqslant \frac{\epsilon^2}{16\pi^2 c} . \qquad ③$$

Soit f_k additive définie par :

$$f_k(n) = \sum_{\substack{p\in \mathrm{P} \\ p^{\alpha_\mathrm{P}} \geqslant k}} f(p^{\alpha_\mathrm{P}}) \quad \text{où}$$

$$\alpha_p = \mathrm{Max}\, \{\alpha \in \mathbf{N} / p^\alpha \mid n\} .$$

L'inégalité de Turan-Kubilius appliquée à f_k donne, d'après ③ :

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \Big(f_k(n+t) - \sum_{\substack{p\in\mathrm{P} \\ p\leqslant \mathrm{N}+t}} \frac{f(p)}{p}\Big)^2 \leqslant \frac{\epsilon^2}{16\pi^2} (\mathrm{N}+t) \quad \text{et}$$

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \Big(f_k(n) - \sum_{\substack{p\in\mathrm{P} \\ p\leqslant \mathrm{N}+t}} \frac{f(p)}{p}\Big)^2 \leqslant \frac{\epsilon^2}{16\pi^2} (\mathrm{N}+t) .$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (f_k(n+t) - f_k(n))^2 \leqslant \frac{\epsilon^2}{4\pi^2} (\mathrm{N}+t) . \qquad ④$$

Soit alors $m_k = \prod_{\substack{p\in\mathrm{P} \\ p<k}} p^{\beta_p+1}$ où $\beta_p = \mathrm{Max}\, \{ j \in \mathbf{N} / p^j < k\}$.

Si $t \in m_k \mathbf{N}^*$ (relativement dense !),

$$f(n+t) - f(n) = f_k(n+t) - f_k(n)\,.$$

On obtient :

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} |h(n+t) - h(n)|\Big)^2 \leqslant N \sum_{n=1}^{N} |e(f(n+t) - f(n)) - 1|^2$$

$$\leqslant 4\pi^2 N \sum_{n=1}^{N} (f(n+t) - f(n))^2$$

$$\leqslant \epsilon^2 N(N+t)\,.$$

Donc, $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}} \dfrac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} |h(n+t) - h(n)| \leqslant \epsilon$.

Comme

$$|g(n+t) - g(n)| \leqslant |h(n+t) - h(n)| + 2\pi\,|u|\,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{t}{n}\right)$$

$$\leqslant |h(n+t) - h(n)| + 2\pi\,|u|\,\frac{t}{n}\,,$$

on a également :

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |g(n+t) - g(n)| \leqslant \epsilon\,.$$

II.3. Cas où g est de module $\leqslant 1$.

On définit g^* multiplicative par :

$$g^*(p^\alpha) = \frac{g(p^\alpha)}{|g(p^\alpha)|} \quad \text{si} \quad g(p^\alpha) \neq 0 \quad \text{et}$$

$$g^*(p^\alpha) = 1 \quad \text{si} \quad g(p^\alpha) = 0\,.$$

Alors (1) entraîne

$$\sum_{p\in P} \frac{1}{p}\,(1 - |g(p)|) < +\infty \quad \text{et}$$

$$\sum_{p\in P} \frac{1}{p}\,(1 - \mathcal{R}e(g^*(p)\,p^{-2i\pi u})) < +\infty\,.$$

Le raisonnement fait dans le paragraphe précédent s'applique à g^* qui est donc M – presque – périodique.

D'autre part, $|g|$ est évidemment B – presque – périodique [4].

Puisque $g = |g|\,.\,g^*$, g est M – presque – périodique.

III. DEMONSTRATION DU THEOREME

III.1. Un résultat de Daboussi et Delange [4].

LEMME 3. – *Soit g une suite multiplicative de module $\leqslant 1$. Une condition nécessaire et suffisante pour que le spectre de g soit non vide est qu'il existe un nombre réel u et un caractère de Dirichlet χ tels que :*

$$\sum_{p \in \mathrm{P}} \frac{1}{p} (1 - \mathcal{R}e(g(p)\, p^{-2i\pi u}\, \chi(p))) < + \infty .$$

III.2. Un lemme.

LEMME 4. – *Soit $d \in \mathbf{N}^*$. Soit*

$$\Delta = \{n \in \mathbf{N}^* / \forall p \in \mathrm{P}, p \mid n \Longrightarrow p \mid d\} .$$

Il existe $\mathrm{K} \in \mathbf{N}^*$ tel que, $\forall \delta \in \Delta$, $\forall r \in \mathbf{N}^*$,

$$\delta \leqslant d^r \Longrightarrow \delta \mid d^{\mathrm{K}r} .$$

Démonstration. – Si $d = p_1^{\alpha_1} \,.\, p_j^{\alpha_j}$ est la décomposition de d en facteurs premiers, il suffit de prendre K au moins égal à :

$$\operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant j} \operatorname{Log} d \,.\, (\alpha_i \operatorname{Log} p_i)^{-1} .$$

III.3. Démonstration du théorème.

Soit g multiplicative de module $\leqslant 1$ à spectre non vide. Le lemme 3 exprime qu'il existe un caractère de Dirichlet χ tel que $g' = g\chi$, multiplicative, n'ait pas une valeur moyenne nulle. D'après la proposition, g' est M – presque – périodique.

Soit d la période de χ (nous supposerons évidemment que $d \geqslant 2$).

D'après la démonstration de la proposition, $\epsilon > 0$ étant donné, il existe $m_k \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\forall t \in m_k \mathbf{N}^*, \ \overline{\lim_{\mathrm{N} \to \infty}} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} |g'(n + t) - g'(n)| \leqslant \frac{\epsilon \phi(d)}{2d} . \qquad (5)$$

Puisque $\sum_{\delta \in \Delta} \frac{1}{\delta}$ converge, il existe $s \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \delta \geqslant d^s}} \frac{1}{\delta} \leqslant \frac{\epsilon}{4}. \tag{6}$$

Nous allons vérifier que, si $t \in m_k d^{Ks+1} \mathbf{N}^*$ (relativement dense),

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |g(n+t) - g(n)| \leqslant \epsilon ,$$

K étant la constante définie au lemme 4.

Soit donc $t \in m_k d^{Ks+1} \mathbf{N}^*$.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |g(n+t) - g(n)| = \sum_{\delta | d^{Ks+1}} \Bigg(\frac{1}{N} \sum_{\substack{n=1 \\ (n, d^{Ks+1}) = \delta}}^{N} |g(n+t) - g(n)| \Bigg)$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\delta | d^{Ks+1} \\ \delta \geqslant d^s}} \Bigg(\frac{2}{N} \sum_{\substack{n=1 \\ \delta | n}}^{N} 1 \Bigg) + \sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \delta < d^s}} \Bigg(\frac{1}{N} \sum_{\substack{n=1 \\ (n, d^{Ks+1}) = \delta}}^{N} |g(n+t) - g(n)| \Bigg). \tag{7}$$

On remarque que, si $(n, d^{Ks+1}) = \delta < d^s$, on a, en posant $n = m\delta$,

$$1 \leqslant (m, d) \,\Big|\, \Big(m, \frac{d^{Ks+1}}{\delta}\Big) = 1 \quad \text{donc} \quad (m, d) = 1 .$$

De même, $\Big(m + \frac{t}{\delta}, d\Big) = 1$ car $d \,|\, \frac{t}{\delta}$.

Donc $\displaystyle\sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \delta < d^s}} \Bigg(\frac{1}{N} \sum_{\substack{n=1 \\ (n, d^{Ks+1}) = \delta}}^{N} |g(n+t) - g(n)| \Bigg)$

$$\leqslant \sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \delta < d^s}} \Bigg(\frac{1}{N} \sum_{\substack{m=1 \\ (m, d) = 1}}^{[N/\delta]} \Big| g\Big(m + \frac{t}{\delta}\Big) - g(m) \Big| \Bigg)$$

$$= \sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \delta < d^s}} \Bigg(\frac{1}{N} \sum_{\substack{m=1 \\ (m, d) = 1}}^{[N/\delta]} \Big| g'\Big(m + \frac{t}{\delta}\Big) - g'(m) \Big| \Bigg) \text{ car } \chi(m) = \chi\Big(m + \frac{t}{\delta}\Big) \neq 0$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \delta < d^s}} \Bigg(\frac{1}{N} \sum_{m=1}^{[N/\delta]} \Big| g'\Big(m + \frac{t}{\delta}\Big) - g'(m) \Big| \Bigg) \tag{8}$$

⑤ , ⑥ , ⑦ et ⑧ donnent :

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |g(n+t) - g(n)| \leqslant 2 \sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \delta \geqslant d^s}} \frac{1}{\delta} + \frac{\epsilon \phi(d)}{2d} \sum_{\substack{\delta \in \Delta \\ \delta < d^s}} \frac{1}{\delta} \leqslant \epsilon .$$

g est M – presque – périodique.

IV. REMARQUES

1) Sous l'hypothèse du théorème, on peut préciser en calculant la corrélation de g que la mesure spectrale de g est concentrée sur $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (comparer avec les résultats obtenus dans [4] et [5]).

2) La technique précédente permet, à l'aide des résultats de [3], de retrouver le théorème suivant prouvé dans [2] : si g est une suite q – multiplicative de module $\leqslant 1$ non pseudo-aléatoire, elle est M – presque – périodique.

Elle s'adapte évidemment aux produits de telles suites (pour différentes valeurs de q) ou de leurs translatées.

3) *Soit* g *fortement multiplicative de module* 1 *telle que* $\lim_{\substack{p \in P \\ p \to \infty}} g(p) = 1$.

Ce qui précède montre que, si $\sum_{p \in P} \frac{1}{p} (1 - \mathcal{R}e\, g(p)) < +\infty$, la mesure spectrale de g est atomique.

Si $\sum_{p \in P} \frac{1}{p} (1 - \mathcal{R}e\, g(p)) = +\infty$, la mesure spectrale de g est la mesure de Haar sur le tore $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Ceci résulte du théorème suivant qui se démontre comme un théorème de Kubilius ([7], th. 5.3) :

THEOREME. – *Soit* $t \in \mathbf{N}^*$, *soit* g *fortement multiplicative de module* 1. *Si* $\lim_{\substack{p \in P \\ p \to \infty}} g(p) = 1$, *la suite* $(g(n+t)\overline{g(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ *a une valeur moyenne* $\gamma(t)$ *donnée par :*

$$\gamma(t) = \prod_{p \nmid t} \left(1 - \frac{2(1 - \mathcal{R}e\, g(p))}{p}\right) ;$$

en particulier, si $\sum_{p \in P} \frac{1}{p} (1 - \mathcal{R}e\, g(p)) = +\infty$, γ *est nulle sur* $\mathbf{N}^*$.

4) Compte tenu de la remarque précédente, il semble raisonnable de conjecturer que si g est une suite multiplicative de module 1 dont le spectre de Fourier-Bohr est vide, la mesure spectrale de g existe et est la mesure de Haar sur le tore.

L'auteur remercie H. Delange et J.-P. Kahane pour leurs remarques qui ont permis d'améliorer la rédaction de l'article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.P. BERTRANDIAS, Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p, *Bull. Soc. Math. France,* mémoire 5 (1966), 1-106.

[2] J. COQUET, T. KAMAE, M. MENDES-FRANCE, Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France,* 105 (1977), 369-384.

[3] J. COQUET, Sur les fonctions q-multiplicatives pseudo-aléatoires, *C.R.A.S.,* Paris, 282 (1976), 175-178.

[4] H. DABOUSSI, H. DELANGE, Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module $\leqslant 1$, *C.R.A.S.,* Paris, 278 (1974), 657-660.

[5] H. DABOUSSI, M. MENDES-FRANCE, Spectrum, almost-periodicity and equidistribution modulo 1, *Studia Scientiarum Math. Hung.,* 9 (1974), 173-180.

[6] G. HALASZ, Uber die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen, *Acta Math. Acad. Sc. Hungaricae,* 19 (1968), 365-403.

[7] J. KUBILIUS, Probabilistic methods in the theory of numbers, *A.M.S., Mathematical monographs,* 11.

Manuscrit reçu le 20 novembre 1978.

Jean COQUET,
Département de Mathématiques
Centre Universitaire de Valenciennes
Le Mont Houy
59236 Aulnoy-les-Valenciennes.