

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GÉRALD TENENBAUM

## Lois de répartition des diviseurs. IV

*Annales de l'institut Fourier*, tome 29, n° 3 (1979), p. 1-15

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1979\\_\\_29\\_3\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_3_1_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## LOIS DE RÉPARTITION DES DIVISEURS, 4

par Gérald TENENBAUM (\*)

### 1. Introduction.

Nous avons montré dans les trois articles précédents [3], [5] et [6] que le cadre naturel pour l'étude de la répartition des diviseurs d'un entier  $n$  consiste à les placer relativement aux puissances de  $n$ . Dans cette optique, définissons, pour tout couple  $(\lambda, t)$  de réels appartenant à  $[0, 1] \times [1, +\infty[$  et tout entier  $n$ , la quantité

$$d(\lambda, t, n) := \text{card} \{d : d \mid n ; n^{\lambda/t} \leq d < n^{1/t}\} ;$$

si  $d(n)$  désigne le nombre total de diviseurs de  $n$ , la fonction arithmétique

$$n \mapsto \Delta(\lambda, t, n) := \frac{d(\lambda, t, n)}{d(n)}$$

est particulièrement bien adaptée à la détermination de la structure d'ordre de l'ensemble des diviseurs de  $n$  : désignant par  $D_n$  la variable aléatoire qui prend les valeurs  $(\log d / \log n)$ , lorsque  $d$  parcourt les diviseurs de  $n$ , avec probabilité uniforme  $1/d(n)$ , on a :

$$\Delta(\lambda, t, n) = \text{Prob}(\lambda \leq t D_n < 1) .$$

Dans [4], I. Kátai a donné une condition nécessaire et suffisante sur une suite d'entiers  $(n_i)_{i \geq 0}$  pour que la loi de probabilité de  $D_{n_i}$  tende vers la mesure de Dirac au point  $1/2$  lorsque  $i$  tend vers l'infini, c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \Delta(1 - \epsilon, 2, n_i) = \frac{1}{2} .$$

---

(\*) Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226.

Deshouillers, Dress et l'auteur ont étudié [3] la valeur moyenne de  $\Delta(\lambda, t, n)$ ; on a :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \sum_{n \leq x} \Delta(\lambda, t, n) = \frac{2}{\pi} \left\{ \text{Arc sin } \sqrt{\frac{1}{t}} - \text{Arc sin } \sqrt{\frac{\lambda}{t}} \right\} \quad (1)$$

Cependant, il n'existe pas de suite  $(n_i)_{i \geq 0}$  de densité positive telle que la suite  $(D_{n_i})_{i \geq 0}$  possède une loi limite [5].

Nous avons montré dans [5] que la suite des entiers  $n$  tels que  $\Delta(\lambda, t, n) \neq 0$  possède une densité  $h(\lambda, t)$  qui est une fonction continue pour  $(\lambda, t) \neq (1, 1)$  et qui vérifie :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists c(\epsilon) \quad \forall t \geq 2 \quad h(\lambda, t) \leq c(\epsilon) (1 - \lambda)^\delta |\log(1 - \lambda)|^{-\frac{1}{2} + \epsilon} \quad (2)$$

avec

$$\delta := 1 - \frac{\log(e \log 2)}{\log 2} = 0,0860 \dots$$

De plus la limite suivante existe et est une fonction continue de  $\lambda$  sur  $[0, 1]$  (voir [6])

$$h(\lambda) := \lim_{t \rightarrow \infty} h(\lambda, t).$$

Nous nous proposons ici d'étudier plus précisément la fonction  $n \mapsto \Delta(\lambda, t, n)$ , en particulier sous l'aspect de sa fonction de répartition.

**THEOREME.** — Soit  $\Gamma$  l'ensemble des rationnels  $\gamma$  de  $[0, 1]$  dont le dénominateur est une puissance de 2.

(i) Pour tout  $\gamma$  de  $\Gamma$  la suite des entiers  $n$  tels que

$$\Delta(\lambda, t, n) = \gamma$$

possède une densité  $h(\lambda, t, \gamma)$  qui est une fonction continue de  $(\lambda, t)$  sur  $]0, 1[ \times ]1, +\infty[$  telle que les fonctions partielles  $t \mapsto h(0, t, \gamma)$  et  $\lambda \mapsto h(\lambda, 1, \gamma)$  soient, pour  $\gamma \neq 1$ , continues respectivement sur  $]1, +\infty[$  et  $[0, 1[$ .

(ii) Pour tout réel  $\chi$  de  $[0, 1]$  la suite des entiers  $n$  tels que

$$\Delta(\lambda, t, n) \leq \chi$$

possède une densité  $H(\lambda, t, \chi)$  donnée par la formule :

$$H(\lambda, t, \chi) = \sum_{\substack{\gamma \leq \chi \\ \gamma \in \Gamma}} h(\lambda, t, \gamma) \quad (3)$$

La fonction  $(\lambda, t) \mapsto H(\lambda, t, \chi)$  est, pour tout  $\chi$ , continue sur  $]0, 1] \times ]1, +\infty[$  et les fonctions partielles  $t \mapsto H(0, t, \chi)$  et  $\lambda \mapsto H(\lambda, 1, \chi)$  sont, pour  $\chi \neq 1$ , continues respectivement sur  $]1, +\infty[$  et  $[0, 1[$ .

(iii) Pour tout couple  $(\lambda, t)$  de  $[0, 1] \times [1, +\infty[$  la fonction  $\chi \mapsto H(\lambda, t, \chi)$  est continue à droite; de plus, sauf dans les cas triviaux  $(\lambda = 0, t \leq 2)$ ,  $(\lambda \leq \frac{1}{2}, t = 1)$  et  $(\lambda = 1)$  on a, pour tout  $\chi$  positif :

$$H(\lambda, t, \chi) > H(\lambda, t, 0).$$

COROLLAIRE 1. — Pour tout couple  $(\lambda, t)$  de  $[0, 1] \times [1, +\infty[$ , on a :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma h(\lambda, t, \gamma) = \frac{2}{\pi} \left\{ \text{Arc sin } \sqrt{\frac{1}{t}} - \text{Arc sin } \sqrt{\frac{\lambda}{t}} \right\}.$$

COROLLAIRE 2. — Soit  $\lambda$  dans  $[0, 1]$ ; on a :

(i) pour tout  $\gamma$  non nul de  $\Gamma$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(\lambda, t, \gamma) = 0$$

(ii) pour tout  $\chi$  de  $]0, 1]$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(\lambda, t, \chi) = 1.$$

COROLLAIRE 3. — Soit  $(\lambda, t)$  un couple de  $[0, 1] \times [1, +\infty[$  et soit  $n \mapsto \psi(n)$  une fonction qui tend vers  $+\infty$ .

Il existe une suite d'entiers  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\lambda, t, \psi)$  de densité 1 telle que, pour tout entier  $n$  de  $\mathcal{A}$ , l'une des deux assertions suivantes soit vérifiée :

(i)  $d(\lambda, t, n) = 0$

(ii)  $d(\lambda, t, n) \geq d(n)/\psi(n).$

De plus ce résultat est le meilleur possible en ce sens que, sauf dans les cas triviaux  $(\lambda = 0, t \leq 2)$ ,  $(\lambda \leq \frac{1}{2}, t = 1)$  et  $(\lambda = 1)$ , si

*l'on remplace  $\psi$  par une fonction constante, la suite des entiers  $n$  vérifiant (i) ou (ii) est de densité inférieure à 1.*

## 2. Notations.

Outre celles introduites ci-dessus, nous utiliserons les notations suivantes :

Les lettres  $a, b, d, g, k, n$  désigneront des entiers positifs alors que la lettre  $p$  désignera exclusivement un nombre premier.

Les lettres  $c, c_1, c_2, \dots$  désigneront des constantes absolues positives.

Pour tout entier  $n$  nous noterons  $\Omega(n)$  (resp.  $\omega(n)$ ) le nombre des facteurs premiers de  $n$  comptés avec (resp. sans) leur ordre de multiplicité.

La fonction  $t \mapsto \rho(t)$  est définie pour  $t \geq 0$  par

$$\begin{cases} \rho(t) = 1 & \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \\ \rho & \text{continue à droite en } t = 1 \\ t\rho'(t) + \rho(t-1) = 0 & \text{pour } t > 1 \end{cases}$$

$\Gamma$  désignera l'ensemble des rationnels  $\gamma$  de  $[0, 1]$  de la forme  $\gamma = r2^{-s}$ , avec  $r, s$  entiers. Lorsque  $r$  est impair (resp. nul) on pose :

$$\|\gamma\| = s \text{ (resp. } = 0).$$

Dans tout l'article,  $\delta$  désignera la quantité

$$\delta = 1 - \frac{\log(e \log 2)}{\log 2} = 0,0860 \dots$$

## 3. Preuve des corollaires.

Fixons  $(\lambda, t)$  dans  $[0, 1] \times [1, +\infty[$  et définissons pour tout entier  $n$  une fonction :

$$\begin{aligned} \epsilon_n : [0, 1] &\mapsto \{0, 1\} \\ \chi &\mapsto \epsilon_n(\chi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta(\lambda, t, n) \leq \chi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

D'après le théorème, on a

$$H(\lambda, t, \chi) = x^{-1} \sum_{n \leq x} \epsilon_n(\chi) + o(1) \quad (4)$$

Nous allons prouver le corollaire 1 en calculant de deux façons différentes l'intégrale :

$$I = \int_0^1 H(\lambda, t, \chi) d\chi \quad (5)$$

D'une part, en utilisant (4) et (1), on a :

$$\begin{aligned} I &= x^{-1} \sum_{n \leq x} \int_0^1 \epsilon_n(\chi) d\chi + o(1) = x^{-1} \sum_{n \leq x} \{1 - \Delta(\lambda, t, n)\} + o(1) \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \left\{ \text{Arc sin } \sqrt{\frac{1}{t}} - \text{Arc sin } \sqrt{\frac{\lambda}{t}} \right\}. \end{aligned}$$

D'autre part, grâce à l'assertion (ii) du théorème, il vient, en intégrant (5) par parties :

$$I = 1 - \int_0^1 \chi dH(\lambda, t, \chi) = 1 - \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma h(\lambda, t, \gamma),$$

d'où le résultat attendu.

Pour tout  $\gamma$  de  $\Gamma \setminus \{0\}$  et tout  $\chi$  de  $]0, \gamma[$  on a donc :

$$\begin{aligned} \chi \gamma h(\lambda, t, \gamma) &\leq \chi \sum_{\gamma' > \chi} \gamma' h(\lambda, t, \gamma') \leq \chi \{1 - H(\lambda, t, \chi)\} \\ &= \chi \sum_{\gamma' > \chi} h(\lambda, t, \gamma') < \sum_{\gamma' \in \Gamma} \gamma' h(\lambda, t, \gamma') \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \text{Arc sin } \sqrt{\frac{1}{t}} - \text{Arc sin } \sqrt{\frac{\lambda}{t}} \right\} \end{aligned}$$

ce qui prouve le corollaire 2, en faisant tendre  $t$  vers  $+\infty$ .

Le corollaire 3 est immédiat en remarquant que l'assertion (iii) du théorème implique que la suite des entiers  $n$  tels que

$$1 \leq d(\lambda, t, n) \leq \chi d(n)$$

possède, pour tout  $\chi$  positif, une densité qui tend vers 0 avec  $\chi$  et que, sauf dans les cas triviaux mentionnés, cette densité est positive lorsque  $\chi$  est positif.

#### 4. Démonstration du théorème .

Soit  $(\lambda, t)$  un couple de réels fixé dans  $]0, 1[ \times ]1, +\infty[$  ; pour tout entier  $n \leq x$ , nous posons :

$$\Delta_x(n) := \Delta_x(\lambda, t, n) := d(n)^{-1} \text{card} \{d : d | n ; x^{\lambda/t} \leq d < x^{1/t}\},$$

et, pour  $\epsilon$  positif,

$$n(\epsilon) := \prod_{\substack{p^v || n \\ p > x^{\epsilon\lambda/t}}} p^v.$$

Le principe de la démonstration de l'existence de  $h(\lambda, t, \gamma)$  consiste à remarquer que pour tous les entiers  $n \leq x$  sauf au plus  $O(\epsilon^\delta x)$ , on a :

$$\Delta(\lambda, t, n) = \Delta_x(\lambda, t, n(\epsilon)).$$

Comme le nombre des facteurs premiers de  $n(\epsilon)$  est borné indépendamment de  $x$  pour chaque  $\epsilon$  positif, on peut alors utiliser les techniques de [5] pour déterminer un équivalent à  $O(\epsilon^\delta x)$  près de la quantité

$$\text{card} \{n \leq x : \Delta(\lambda, t, n) = \gamma\};$$

on en déduit l'existence de  $h(\lambda, t, \gamma)$  en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0.

Le fait que seuls les  $\gamma$  de  $\Gamma$  interviennent dans la fonction de répartition de  $\Delta(\lambda, t, n)$  provient de ce que  $n(\epsilon)$  est "presque toujours" un entier sans facteur carré ce qui implique que  $\Delta_x(\lambda, t, n(\epsilon))$  appartient à  $\Gamma$ .

\*

En utilisant la symétrie des diviseurs de  $n$  autour de  $n^{\frac{1}{2}}$ , nous pouvons nous limiter à prouver l'existence de  $h(\lambda, t, \gamma)$  lorsque  $(\lambda, t)$  parcourt  $]0, 1[ \times ]1, +\infty[$ . Nous en déduisons le cas général par les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} h(0, 1, \gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ h(0, t, \gamma) = \begin{cases} h\left(\frac{2}{t}, 2, \frac{1}{2} - \gamma\right) & \text{si } t > 2 \\ h\left(\frac{t}{2}, t, \gamma - \frac{1}{2}\right) & \text{si } 1 < t \leq 2 \end{cases} \\ h(\lambda, 1, \gamma) = \begin{cases} h\left(2\lambda, 2, \gamma - \frac{1}{2}\right) & \text{si } 0 < \lambda \leq \frac{1}{2} \\ h\left(\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{2} - \gamma\right) & \text{si } \frac{1}{2} < \lambda \leq 1. \end{cases} \end{array} \right. \quad (6)^{(1)}$$

De plus la formule de transformation suivante, valable pour  $t$  dans  $]1, 2[$ ,

$$h(\lambda, t) = \begin{cases} h\left(\frac{t-1}{t-\lambda}, \frac{t}{t-\lambda}\right) & \text{si } 1 < t \leq 2\lambda \\ h\left(2\frac{t-1}{t}, 2\right) & \text{si } 2\lambda \leq t \leq 1 + \lambda \\ h\left(\frac{2\lambda}{t}, 2\right) & \text{si } 1 + \lambda \leq t < 2 \end{cases}$$

montre, à l'aide de (2), que pour tout  $\epsilon$  positif, il existe une constante positive  $c_1(\epsilon)$  telle que l'on ait, pour  $t \geq 1 + \epsilon$ ,

$$h(\lambda, t) \leq c_1(\epsilon) (1 - \lambda)^\delta |\log(1 - \lambda)|^{-\frac{1}{2} + \epsilon} \quad (7)$$

LEMME 1. — Pour tout couple  $(\lambda, t)$  de  $]0, 1[ \times ]1, +\infty[$  et tous réels positifs  $u$  et  $\epsilon$ , on a l'inégalité asymptotique

$$\text{card} \{n \leq x : n > n(\epsilon) x^{u\lambda\epsilon/t}\} \leq (1 + o(1)) x \left\{ \int_u^\infty \rho(v) dv + \rho\left(\frac{t}{\lambda\epsilon}\right) \right\}.$$

*Démonstration.* — Notons  $a$  (resp.  $b$ ) un entier inférieur ou égal à  $x$  dont tous les facteurs premiers sont inférieurs ou égaux (resp. supérieurs) à  $x^{\lambda\epsilon/t}$ . On a les estimations asymptotiques (voir [1] et [2])

<sup>(1)</sup> Dans toutes ces expressions et les suivantes, nous posons bien entendu  $h(\lambda, t, \gamma') = 0$  lorsque  $\gamma' < 0$ .

$$\left| \sum_{a \leq y} 1 - y \rho \left( \frac{t \log y}{\lambda \epsilon \log x} \right) \right| \leq c_1 \frac{ty}{\lambda \epsilon \log x} \quad (8)$$

$$\sum_{b \leq y} 1 \leq \frac{ty}{\lambda \epsilon \log x} + c_2 \frac{t^2 y}{\lambda^2 \epsilon^2 \log^2 x} + c_3 \frac{tx^{\lambda \epsilon / t}}{\lambda \epsilon \log x} \quad (9)$$

Désignant par  $S$  la quantité à majorer, on obtient :

$$\begin{aligned} S &\leq \sum_{x^{\lambda \epsilon / t} \leq a \leq x^{(t-\lambda \epsilon)/t}} \sum_{1 < b \leq x/a} 1 + \sum_{a \leq x} 1 \\ &\leq \frac{tx}{\lambda \epsilon \log x} \sum_{x^{\lambda \epsilon / t} \leq a \leq x} \frac{1}{a} + x \rho \left( \frac{t}{\lambda \epsilon} \right) + O \left( \frac{t^2 x}{\lambda^2 \epsilon^2 \log x} \right) \\ &\leq \frac{tx}{\lambda \epsilon \log x} \int_{x^{\lambda \epsilon / t}}^x \rho \left( \frac{t \log y}{\lambda \epsilon \log x} \right) \frac{dy}{y} + x \rho \left( \frac{t}{\lambda \epsilon} \right) + O \left( \frac{t^2 x}{\lambda^2 \epsilon^2 \log x} \right) \\ &\leq (1 + o(1)) x \left\{ \int_u^{t/\lambda \epsilon} \rho(v) dv + \rho \left( \frac{t}{\lambda \epsilon} \right) \right\} \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

LEMME 2. — Pour tout couple  $(\lambda, t)$  de  $]0, 1] \times ]1, +\infty[$  et tout réel positif  $\epsilon$ , on a l'estimation asymptotique

$$\text{card} \{n \leq x : \Delta(\lambda, t, n) \neq \Delta_x(\lambda, t, n(\epsilon))\} = O(\epsilon^\delta x)$$

où la constante impliquée par le symbole  $O$  est indépendante de  $\epsilon$ .

Démonstration. — Posons  $u := \log \frac{1}{\epsilon}$  et désignons par  $\mathcal{E}_x$

l'ensemble des entiers  $n$  inférieurs ou égaux à  $x$  qui vérifient les trois conditions suivantes :

- (i)  $\Delta(\lambda, t, n) = \Delta_x(\lambda, t, n)$
- (ii)  $\Delta_x \left( 1 - u\epsilon, \frac{t}{\lambda}, n \right) = \Delta_x(1 - \lambda u\epsilon, t, n) = 0$
- (iii)  $n \leq n(\epsilon) x^{u\lambda \epsilon / t}$ .

D'après le lemme 7 de [5], le nombre des entiers  $n$  inférieurs ou égaux à  $x$  qui ne vérifient pas (i) est  $o(x)$ ; d'après (7) le nombre des  $n$  qui ne vérifient pas (ii) est  $O(\epsilon^\delta x)$ ; enfin, d'après le lemme 1, le nombre des  $n$  qui ne vérifient pas (iii) est majoré par :

$$x \left\{ \int_u^\infty \rho(v) dv + \rho\left(\frac{t}{\lambda \epsilon}\right) \right\} \leq c_4 \epsilon x^{(1)} .$$

On obtient donc :  $x - \text{card } \mathcal{E}_x = O(\epsilon^\delta x)$ .

Pour achever la démonstration du lemme, il nous suffit de montrer que tout entier  $n$  de  $\mathcal{E}_x$  vérifie :

$$\Delta(\lambda, t, n) = \Delta_x(\lambda, t, n(\epsilon)) . \tag{10}$$

Posons, pour  $n$  inférieur ou égal à  $x$

$$d_x(\lambda, t, n) = d(n) \Delta_x(\lambda, t, n) = \text{card} \{d : d | n ; x^{\lambda/t} \leq d < x^{1/t}\} .$$

Si  $n$  vérifie (i), on a

$$d(n) \Delta(\lambda, t, n) = d_x(\lambda, t, n) = \sum_{d_1 | n(\epsilon)} \sum_{\substack{d_2 | (n/n(\epsilon)) \\ x^{\lambda/t} \leq d_1 d_2 < x^{1/t}}} 1 ;$$

si  $n$  vérifie (iii), tous les diviseurs  $d_2$  de la sommation intérieure sont inférieurs ou égaux à  $x^{u\lambda\epsilon/t}$ , donc la sommation extérieure porte en fait sur les  $d_1$  qui sont comptés dans  $d_x(\lambda(1 - u\epsilon), t, n(\epsilon))$  ; si en outre  $n$  vérifie (ii) on a

$$d_x(\lambda(1 - u\epsilon), t, n(\epsilon)) = d_x(\lambda, t, n(\epsilon)) = d(n(\epsilon)) \Delta_x(\lambda, t, n(\epsilon))$$

et l'on voit sans peine que si la sommation extérieure porte sur les  $d_1$  comptés dans  $d_x(\lambda, t, n(\epsilon))$  alors tous les diviseurs de  $n/n(\epsilon)$  sont comptés dans la sommation intérieure.

On obtient donc, pour tout entier  $n$  de  $\mathcal{E}_x$  :

$$d(n) \Delta(\lambda, t, n) = d(n(\epsilon)) \Delta_x(n(\epsilon)) d\left(\frac{n}{n(\epsilon)}\right)$$

ce qui équivaut à (10) puisque  $\left(\frac{n}{n(\epsilon)}, n(\epsilon)\right) = 1$ .

\*

Nous sommes maintenant en mesure de montrer l'assertion (i) du théorème.

Soit  $(\lambda, t)$  un couple de  $]0, 1] \times ]1, +\infty[$  et soit  $\gamma$  un rationnel de  $\Gamma$ . On pose :  $\nu(x) := x^{-1} \text{card} \{n \leq x : \Delta(\lambda, t, n) = \gamma\}$ .

---

(<sup>1</sup>) On utilise ici par exemple la majoration  $\rho(u) \leq e^{1-u}$  qui est loin d'être optimale mais suffisante dans notre cas.

D'après le lemme 2, on a pour tout  $\epsilon$  positif :

$$\nu(x) = x^{-1} \text{card} \{n \leq x : \Delta_x(\lambda, t, n(\epsilon)) = \gamma\} + O(\epsilon^\delta).$$

Si nous notons toujours  $a$  (resp.  $b$ ) un entier inférieur à  $x$  dont tous les facteurs premiers sont inférieurs ou égaux (resp. supérieurs) à  $x^{\lambda\epsilon/t}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \nu(x) &= x^{-1} \sum_{\substack{b \leq x \\ \Delta_x(b) = \gamma}} \sum_{\substack{n \leq x \\ n(\epsilon) = b}} 1 + O(\epsilon^\delta) \\ &= x^{-1} \sum_{\substack{b \leq x \\ \Delta_x(b) = \gamma}} \sum_{a \leq x/b} 1 + O(\epsilon^\delta) \end{aligned}$$

d'où en utilisant (8)

$$\nu(x) = \sum_{\substack{b \leq x \\ \Delta_x(b) = \gamma}} b^{-1} \rho\left(\frac{t \log(xb^{-1})}{\lambda\epsilon \log x}\right) + O\left(\log^{-1} x \sum \frac{1}{b}\right) + O(\epsilon^\delta).$$

Comme on a la majoration

$$\sum_{b \leq x} \frac{1}{b} \leq \prod_{x^{\lambda\epsilon/t} < p \leq x} (1 - p^{-1})^{-1} = O(\epsilon^{-1})$$

on obtient :

$$\nu(x) = \sum_{\substack{b \leq x \\ \Delta_x(b) = \gamma}} b^{-1} \rho\left(\frac{t \log(xb^{-1})}{\lambda\epsilon \log x}\right) + O(\epsilon^\delta) + o(1) \quad (11)$$

Dans le terme principal de (11) la contribution des  $b$  ayant au moins un facteur carré est :  $O\left(\sum_{\rho > x^{\lambda\epsilon/t}} p^{-2}\right) = o(1)$  ;

on peut donc écrire ce terme principal sous la forme d'une somme :

$$\sum_{k \leq t/\lambda\epsilon} S_k + o(1)$$

où  $S_k$  porte sur les entiers  $b$  tels que  $\Omega(b) = \omega(b) = k$ .

Si nous posons  $b = p_1 \dots p_k$ , la condition  $\Delta_x(b) = \gamma$  est équivalente à  $\left(\frac{\log p_1}{\log x}, \dots, \frac{\log p_k}{\log x}\right) \in D_k$ , où  $D_k$  est un domaine de  $\mathbf{R}^k$  inclus dans  $\left[\frac{\lambda\epsilon}{t}, 1\right]^k$  et défini par des inégalités linéaires ;

$D_k$  est donc intégrable au sens de Riemann et, d'après le lemme 9 de [5], on a :

$$S_k = \int_{D_k} \rho\left(\frac{t}{\lambda\epsilon} \left(1 - \sum_{i=1}^k u_i\right)\right) \frac{du_1}{u_1} \dots \frac{du_k}{u_k} + o(1).$$

Cela montre donc l'existence d'une fonction  $h_\epsilon(\lambda, t, \gamma)$  telle que

$$\nu(x) = h_\epsilon(\lambda, t, \gamma) + O(\epsilon^\delta) + o(1) \tag{12}$$

En faisant tendre  $x$  vers l'infini puis  $\epsilon$  vers 0 dans (12) on déduit l'existence de la densité  $h(\lambda, t, \gamma)$  pour tout  $\gamma$  de  $\Gamma$  et tout couple  $(\lambda, t)$  de  $]0, 1] \times ]1, +\infty[$ . Compte tenu de (6), cela montre l'existence de  $h(\lambda, t, \gamma)$  dans le cas général.

La continuité de  $(\lambda, t) \mapsto h(\lambda, t, \gamma)$  pour  $(\lambda, t)$  dans  $]0, 1] \times ]1, +\infty[$  est une conséquence immédiate de (7) ; grâce aux formules (6), on en déduit la continuité de  $t \mapsto h(0, t, \gamma)$  en tout point  $t \neq 1$  et celle de  $\lambda \mapsto h(\lambda, 1, \gamma)$  en tout point  $\lambda$  différent de 0 ou 1.

De plus, on a pour  $t \leq 2$  et  $\lambda > 0$

$$h(0, t, \gamma) = h\left(0, \frac{t}{t-1}, 1 - \gamma\right)$$

et

$$h(\lambda, 1, \gamma) = h\left(0, \frac{1}{\lambda}, 1 - \gamma\right)$$

ce qui implique, pour  $\gamma \neq 1$ , d'après le corollaire 2

$$\lim_{t \rightarrow 1} h(0, t, \gamma) = 0 = h(0, 1, \gamma)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} h(\lambda, 1, \gamma) = 0 = h(0, 1, \gamma).$$

\*

Montrons maintenant l'assertion (ii) du théorème.

Pour tout couple  $(\lambda, t)$  de  $]0, 1] \times ]1, +\infty[$  et tout réel  $\chi$  de  $[0, 1]$  posons  $H(x) = x^{-1} \text{card} \{n \leq x : \Delta(\lambda, t, n) \leq \chi\}$  et, pour tout entier positif  $g$

$$H_g(x) = x^{-1} \text{card} \{n \leq x : \exists \gamma \in \Gamma \|\gamma\| \leq g ; \gamma \leq \chi ; \Delta(\lambda, t, n) = \gamma\}.$$

D'après l'assertion (i) du théorème, on a :

$$H_g(x) = \sum_{\substack{\gamma \leq x \\ \|\gamma\| \leq g}} h(\lambda, t, \gamma) + o(1) \tag{13}$$

Soit  $n$  un entier inférieur ou égal à  $x$  ; alors  $n\left(\frac{t}{\lambda g}\right)$  n'a que des facteurs premiers supérieurs à  $x^{1/g}$ , d'où :

$$\begin{aligned} \Omega\left(n\left(\frac{t}{\lambda g}\right)\right) &\leq g \\ \text{et} \\ d\left(n\left(\frac{t}{\lambda g}\right)\right) &\leq 2^g. \end{aligned}$$

On voit donc que si  $\Delta_x\left(n\left(\frac{t}{\lambda g}\right)\right)$  est égal à un  $\gamma$  de  $\Gamma$ , on a nécessairement  $\|\gamma\| \leq g$ .

Considérons un entier  $n$  qui fournit une contribution différente à  $H(x)$  et  $H_g(x)$  ; alors l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- (i)  $\Delta(\lambda, t, n) \neq \Delta_x\left(n\left(\frac{t}{\lambda g}\right)\right)$
- (ii)  $\Delta_x\left(n\left(\frac{t}{\lambda g}\right)\right) \notin \Gamma$ .

D'après le lemme 2, le nombre des entiers  $n$  inférieurs ou égaux à  $x$  vérifiant (i) est  $O(g^{-\delta}x)$  ; de plus si  $n$  vérifie (ii) alors  $n\left(\frac{t}{\lambda g}\right)$  possède au moins un facteur carré, donc le nombre des  $n$  vérifiant (ii) est  $O\left(\sum_{p > x^{1/g}} p^{-2}\right) = o(1)$ . Compte tenu de (13) on obtient donc :

$$H(x) = \sum_{\substack{\gamma \leq x \\ \|\gamma\| \leq g}} h(\lambda, t, \gamma) + O(g^{-\delta}) + o(1) \quad (14)$$

En faisant tendre  $x$  puis  $g$  vers l'infini dans (14), on obtient l'existence de la densité  $H(\lambda, t, \chi)$  et la formule (3).

La démonstration des propriétés de continuité de

$$(\lambda, t) \mapsto H(\lambda, t, \chi), t \mapsto H(0, t, \chi) \text{ et } \lambda \mapsto H(\lambda, 1, \chi)$$

utilise (7) et les propriétés de symétrie des diviseurs ; elle est laissée au lecteur.

La formule (14) implique

$$H(\lambda, t, \chi) = \sum_{\substack{\gamma \leq \chi \\ \|\gamma\| \leq g}} h(\lambda, t, \gamma) + O(g^{-\delta}) \quad (15)$$

En faisant tendre dans (15)  $\chi$  vers  $\chi_0$  puis  $g$  vers l'infini on voit facilement que l'on a pour tout  $\chi_0$  de  $[0, 1[$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \chi_0 \\ x > \chi_0}} H(\lambda, t, \chi) = H(\lambda, t, \chi_0).$$

Pour achever la démonstration du théorème, il nous suffit donc de montrer le lemme suivant :

LEMME 3. — Soit  $(\lambda, t)$  un couple de réels appartenant à

$$[0, 1[ \times [1, +\infty[ \setminus (\{0\} \times [1, 2] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \{1\})$$

et soit  $\chi$  un réel positif.

Alors la suite des entiers  $n$  tels que

$$1 \leq d(\lambda, t, n) \leq \chi d(n) \quad (16)$$

possède une densité strictement positive.

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que l'existence de la densité découle de l'assertion (ii) du théorème.

Nous distinguerons deux cas.

Si  $\lambda = 0$ , alors  $t > 2$ . Nous allons définir une suite d'entiers  $\mathfrak{S}$  de densité positive telle que tout  $n$  de  $\mathfrak{S}$  vérifie (16). Nous utiliserons pour cela le résultat suivant, dû à Kátai [4] :

Si  $n = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}$ , on a :

$$\frac{1}{d(n)} \sum_{d|n} \left\{ \frac{\log d}{\log n} - \frac{1}{2} \right\}^2 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^k a_i(a_i + 2) \frac{\log^2 p_i}{\log^2 n} \quad (17)$$

Posons  $\epsilon := \min \left\{ \frac{1}{t}, \left(1 - \frac{2}{t}\right)^2 \chi \right\}$ ; la suite  $\mathfrak{S}$  sera la suite

des entiers  $n$  sans facteur carré dont le plus grand facteur premier est inférieur à  $n^\epsilon$ . On voit sans difficulté que  $\mathfrak{S}$  possède une

densité positive, égale à  $\frac{6}{\pi^2} \rho\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ . De plus, en utilisant (17), on obtient pour tout  $n$  de  $\mathfrak{S}$  :

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t}\right)^2 \frac{d(0, t, n)}{d(n)} \leq \frac{1}{d(n)} \sum_{d|n} \left\{ \frac{\log d}{\log n} - \frac{1}{2} \right\}^2 \leq \frac{1}{4} \sum_{p|n} \frac{\log^2 p}{\log^2 n} \leq \frac{\epsilon}{4} \quad (18)$$

Comme  $\epsilon$  est majoré par  $\frac{1}{t}$ ,  $d(0, t, n)$  n'est pas nul et (18) montre que  $n$  vérifie (16).

Si  $\lambda \neq 0$ , ou bien  $t = 1$  et l'on peut se ramener, par symétrie, au cas  $\lambda = 0$ , ou bien  $t > 1$  et l'on peut supposer, quitte à remplacer  $\chi$  par  $\chi/2$ , que l'on a  $t \geq 2$ .

Soit alors  $\epsilon$  un réel vérifiant  $0 < \epsilon < \min \left\{ 1 - \lambda, \chi, \frac{1}{e^4} \right\}$  ;

on pose :

$$k := 1 + \left\lceil \frac{\log 1/\epsilon}{\log 2} \right\rceil \quad \text{et} \quad u := \frac{2t \log 1/\epsilon}{\lambda}.$$

Considérons la suite  $\mathfrak{S}$  des entiers  $n$  ayant exactement  $k$  facteurs premiers distincts  $p_1, \dots, p_k$  dans l'intervalle  $]n^{\epsilon/u}, n^{1/u}[$  et au moins un facteur premier  $p$  dans l'intervalle  $]n^{(t-\lambda)/t} - (\epsilon/u), n^{(t-\lambda)/t}[$ . En utilisant le théorème B de [5] on montre sans difficulté qu'il existe une constante absolue positive  $c$  telle que la densité de  $\mathfrak{S}$  soit minorée par :  $c \frac{\lambda}{t} \epsilon^2 \frac{\log^{k-1} 1/\epsilon}{k!}$ .

Considérons d'autre part un diviseur  $d$  de  $n \in \mathfrak{S}$  dans l'intervalle  $]n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$  ; puisque  $\frac{n}{p}$  est inférieur à  $n^{1/2}$  et que  $d' = \frac{n}{d}$  est dans l'intervalle  $]n^{1/2}, n^{(t-\lambda)/t}[$  on voit que  $p | d'$  et donc qu'aucun  $p_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) ne peut diviser  $d'$  ; le nombre des diviseurs  $d$ , égal au nombre des diviseurs  $d'$ , est donc majoré par

$$d\left(\frac{n}{p_1 \cdots p_k}\right) = 2^{-k} d(n) \leq \epsilon d(n) \leq \chi d(n)$$

d'où :  $d(\lambda, t, n) \leq \chi d(n)$ .

De plus  $d(\lambda, t, n)$  n'est pas nul puisque  $\frac{n}{p}$  appartient à l'intervalle  $[n^{\lambda/t}, n^{(\lambda/t)+(\epsilon/u)}[ \subseteq [n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ . Les entiers  $n$  de  $\mathfrak{S}$  vérifient donc (16), et ceci achève la démonstration.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] N.G. de BRUIJN, On the number of positive integers  $\leq x$  and free of prime factors  $> y$ , *Indag. Math.*, 13 (1951), 50-60.
- [2] J.D. BOVEY, On the size of prime factors of integers, *Acta Arithmetica*, 23 (1977), 65-80.
- [3] J.M. DESHOULLERS, F. DRESS, G. TENENBAUM, Lois de répartition des diviseurs, 1, *Acta Arithmetica*, 34, n° 4 (1979), 7-19.
- [4] I. KATAI, The distribution of additive functions on the set of divisors, *Publicationes Mathematicae*, 24 (1-2) (1977), 91-96.
- [5] G. TENENBAUM. Lois de répartition des diviseurs, 2, à paraître à *Acta Arithmetica*, 38, n° 1 (1980).
- [6] G. TENENBAUM, Lois de répartition des diviseurs, 3, à paraître à *Acta Arithmetica*, 39, n° 1 (1980).

Manuscrit reçu le 27 juin 1978.

Gérald TENENBAUM,  
U.E.R. de Mathématiques  
et d'Informatique de  
l'Université de Bordeaux I  
351, cours de la Libération  
33405 Talence Cedex.