

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN COQUET

GEORGES RHIN

PHILIPPE TOFFIN

## **Représentations des entiers naturels et indépendance statistique. II**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 31, n° 1 (1981), p. 1-15

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1981\\_\\_31\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_1_1_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# REPRÉSENTATIONS DES ENTIERS NATURELS ET INDÉPENDANCE STATISTIQUE 2

par J. COQUET, G. RHIN et Ph. TOFFIN

## 1. INTRODUCTION

### 1.1. Rappels.

Dans l'article [2], Coquet et Toffin ont démontré :

**THEOREME 1.** — *Soit  $q$  un entier naturel  $\geq 2$ .  $s(n)$  désigne la somme des chiffres de  $n$  en base  $q$  et  $\sigma(n)$  la somme des chiffres de  $n$  en écriture Fibonacci. La suite de terme général  $x s(n) + y \sigma(n)$  est équirépartie modulo 1 si et seulement si l'un au moins des nombres  $x$  et  $y$  est irrationnel.*

Nous nous proposons d'établir un résultat plus général faisant intervenir la  $\alpha$ -somme des chiffres définie dans [3] :

Soit  $\alpha$  un nombre irrationnel, soit  $[a_0; a_1, \dots, a_k, \dots]$  son développement en fraction continue. Les dénominateurs  $q_0, q_1, \dots, q_k, \dots$  des réduites successives de  $\alpha$  vérifient les relations :

$$q_0 = 1, q_1 = a_1 \text{ et } q_{k+2} = a_{k+2}q_{k+1} + q_k \text{ pour tout } k \in \mathbf{N}.$$

Tout entier naturel  $n$  se développe de manière unique sous la forme :  $n = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k(n) q_k$  où la suite  $(\epsilon_k(n))_{k \in \mathbf{N}}$  vérifie :

- 1)  $\epsilon_0(n) \in \{0, 1, \dots, a_1 - 1\}$
- 2)  $\epsilon_k(n) \in \{0, \dots, a_{k+1}\}$  quel que soit  $k \in \mathbf{N}^*$  et
- 3)  $\epsilon_{k+1}(n) = a_{k+2} \implies \epsilon_k(n) = 0$  quel que soit  $k \in \mathbf{N}$ .

Ces conditions se traduisent par :

$$\sum_{k < K} \epsilon_k(n) q_k < q_{K+1} \text{ pour tout } K \in \mathbf{N}.$$

Le développement précédent est appelé  $\alpha$ -développement de  $n$  et  $\sigma_\alpha(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k(n)$  la  $\alpha$ -somme des chiffres de  $n$ .

Dans [3], le résultat suivant est prouvé :

**THEOREME 2.** — *La suite de terme général  $y \sigma_\alpha(n)$  est équirépartie modulo 1 si et seulement si  $y$  est irrationnel.*

### 1.2. Résultat principal.

La suite  $\sigma$  envisagée au théorème 1 est la suite  $\sigma_\alpha$  relative à  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Le résultat qui suit généralise donc les théorèmes 1 et 2.

**THEOREME 3.** — *Soient  $\alpha$  un irrationnel,  $q$  un entier naturel  $\geq 2$ ,  $s(n)$  la somme des chiffres de  $n$  en base  $q$  et  $\sigma_\alpha(n)$  la  $\alpha$ -somme des chiffres de  $n$ . La suite de terme général  $x s(n) + y \sigma_\alpha(n)$  est équirépartie modulo 1 si (et seulement si) l'un au moins des nombres  $x$  et  $y$  est irrationnel.*

### 1.3. Principe de la démonstration.

On suit essentiellement le schéma de démonstration du théorème 1. On pose encore, pour tout  $u$  réel,  $e(u) = e^{2i\pi u}$  et  $\|u\|$  désigne la distance de  $u$  à  $\mathbf{Z}$ .

D'après le critère de Weyl, il s'agit de prouver que, si l'un au moins des nombres  $x$  et  $y$  est irrationnel, la suite de terme général  $G(n) = g(n) g'(n)$  où  $g(n) = e(x s(n))$  et  $g'(n) = e(y \sigma_\alpha(n))$  a une valeur moyenne nulle.

Lorsque  $x(q-1) \in \mathbf{Z}$ , la suite  $q$ -multiplicative  $g$  est périodique ; on montre au paragraphe 2 que  $G$  a alors une valeur moyenne nulle si  $y$  est irrationnel.

Au paragraphe 3, on montre que  $g'$  possède une corrélation.

Dans le cas où  $x(q-1) \notin \mathbf{Z}$ ,  $g$  est pseudo-aléatoire [1] ; on en déduit au paragraphe 4 que  $G$  l'est aussi donc a une valeur moyenne nulle.

2. CAS OU  $g$  EST PERIODIQUE

2.1. Un type de suites arithmétiques [3].

Lorsque  $x(q - 1) \in \mathbb{Z}$ ,  $g(n) = e(xn)$  puisque  $n \equiv s(n)$  modulo  $q - 1$ . La suite  $G(n) = e(xn + y \sigma_\alpha(n))$  fait partie d'une famille de suites arithmétiques introduite dans [3].

DEFINITIONS. —

1)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite *additive relativement à  $\alpha$*  si

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\epsilon_k(n) q_k) \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}.$$

2)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite *multiplicative relativement à  $\alpha$*  si  $f(0) = 1$  et  $f(n) = \prod_{k=0}^{\infty} f(\epsilon_k(n) q_k)$  quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ .

La suite  $n \mapsto xn + y \sigma_\alpha(n)$  est additive relativement à  $\alpha$  donc  $G$  est multiplicative relativement à  $\alpha$ .

2.2. Condition de moyenne nulle [3].

LEMME 1. —  $f$  étant une suite de module  $\leq 1$  multiplicative relativement à  $\alpha$ , on pose  $\mu_k(f) = \frac{1}{q_k} \sum_{n < q_k} f(n)$ . Alors  $f$  a une valeur moyenne nulle sur  $\mathbb{N}$  si et seulement si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(f) = 0$ .

2.3. Relations de récurrence [3].

Les notations sont celles du lemme 1.

LEMME 2. —

$$1) \quad q_{k+2} \mu_{k+2}(f) = q_{k+1} \mu_{k+1}(f) \sum_{0 \leq b < a_{k+2}} f(bq_{k+1}) + q_k \mu_k(f) f(a_{k+2} q_{k+1})$$

2) si  $a_{k+2} = a_{k+1} = 1$ ,

$$q_{k+2} \mu_{k+2}(f) = q_k \mu_k(f) (1 + f(q_{k+1})) + q_{k-1} \mu_{k-1}(f) f(q_k).$$

## 2.4. Etude de G.

On suppose  $y$  irrationnel et on pose  $\mu_k(G) = \mu_k$ .

2.4.1. *Premier cas* :  $\{k \in \mathbf{N} ; a_k \neq 1\}$  est fini.

Pour  $k \geq K$ ,  $a_k = 1$ . Soit  $k \geq K$ . Le lemme 2. 2) donne :

$$q_{k+2} |\mu_{k+2}| \leq q_k |\mu_k| |1 + e(xq_{k+1} + y)| + q_{k-1} |\mu_{k-1}|. \quad (1)$$

L'hypothèse faite ici sur la suite  $(a_k)$  implique que :

$$\frac{q_{k+1}}{q_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \alpha_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (2)$$

Soit  $\mu = \limsup_{k \rightarrow \infty} |\mu_k|$ . Puisque  $x \in (q-1)^{-1} \mathbf{Z}$ ,  $\|xq_{k+1} + y\|$  est minoré par la distance de  $y$  à  $(q-1)^{-1} \mathbf{Z}$ , qui est  $> 0$ . Donc il existe  $A < 2$  tel que, pour tout  $k \in \mathbf{N}$  :

$$|1 + e(xq_{k+1} + y)| \leq A. \quad (3)$$

Les relations (1), (2) et (3) donnent :  $\mu \leq \mu(A\alpha_0^{-2} + \alpha_0^{-3})$ , de sorte que  $\mu = 0$ , et d'après le lemme 1, G a une moyenne nulle.

2.4.2. *Deuxième cas* :  $\{k \in \mathbf{N} ; a_k \geq 2\}$  est infini.

On pose  $M_k = \text{Max} \{|\mu_k|, |\mu_{k-1}|\}$  pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ . D'après le lemme 2.1)

$$q_{k+1} |\mu_{k+1}| \leq M_k \left( \left| \sum_{0 \leq b < a_{k+1}} e(b(xq_k + y)) \right| q_k + q_{k-1} \right), \quad (4)$$

de sorte que la suite  $(M_k)$  est décroissante.

D'autre part, il existe  $\beta > 0$  tel que :

$$\left| \sum_{0 \leq b < m} e(b(xq_k + y)) \right| \leq (1 - \beta) m \quad (5)$$

pour tout entier  $k$  et tout entier  $m \geq 2$ .

Ceci résulte de l'inégalité :

$$\left| \frac{\sin(\pi mz)}{\sin(\pi z)} \right| \leq \text{Min} \left( \frac{1}{|\sin(\pi z)|}, m - 2 + 2 |\cos \pi z| \right) \text{ pour } z \notin \mathbf{Z}$$

et du fait que  $\|xq_k + y\|$  est minoré par une quantité strictement positive indépendante de  $k$ .

Soit alors  $k$  tel que  $a_{k+1} \geq 2$ . (4) et (5) donnent :

$$q_{k+1} |\mu_{k+1}| \leq ((1 - \beta) a_{k+1} q_k + q_{k-1}) M_k,$$

d'où il résulte en tenant compte de  $a_{k+1} q_k > \frac{2}{3} q_{k+1}$ ,

$$|\mu_{k+1}| \leq \left(1 - \frac{2\beta}{3}\right) M_k. \quad (6)$$

(6) et le lemme 2.1) donnent ensuite :

$$q_{k+2} |\mu_{k+2}| \leq M_k \left( a_{k+2} q_{k+1} \left(1 - \frac{2\beta}{3}\right) + q_k \right);$$

puis en remarquant que  $a_{k+2} q_{k+1} > \frac{q_{k+2}}{2}$ ,

$$|\mu_{k+2}| \leq \left(1 - \frac{\beta}{3}\right) M_k. \quad (7)$$

De (6) et (7), il vient :

$$a_{k+1} \geq 2 \implies M_{k+2} \leq \left(1 - \frac{\beta}{3}\right) M_k. \quad (8)$$

L'inégalité (8), la décroissance de la suite  $(M_k)$  et l'hypothèse faite sur la suite  $(a_k)$  entraînent finalement :  $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = 0$ , et d'après le lemme 1,  $G$  a une valeur moyenne nulle.

### 3. EXISTENCE DE LA CORRELATION DE $g'$

#### 3.1. Existence de densités asymptotiques.

$h$  étant un entier naturel,  $\psi_h$  désigne l'application de  $\mathbf{N}$  dans  $\mathbf{N}$  définie par  $\psi_h(n) = \sum_{k < h} \epsilon_k(n) q_k$ . Le but de ce paragraphe est de prouver le

**THEOREME 4.** — Soit  $a$  un entier naturel  $< q_{h+1}$ . L'ensemble  $\mathcal{E}(h, a) = \{n \in \mathbf{N}; \psi_h(n) = a\}$  possède une densité asymptotique égale à :

$$\delta = (q_{h+1} + q_h [0; a_{h+2}, a_{h+3}, \dots])^{-1} \quad \text{si } a \geq q_h$$

$$\delta' = \delta(1 + [0; a_{h+2}, a_{h+3}, \dots]) \quad \text{si } a < q_h.$$

On commence par évaluer  $d(\mathbf{N}) = \text{Card} \{n \in \mathcal{E}(h, a); n < \mathbf{N}\}$ .

3.1.1. *Un lemme de dénombrement.*

LEMME 3. — On pose  $\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } a \geq \sum_{k < h} \epsilon_k(N) q_k \\ 1 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$

1) Lorsque  $a \geq q_h$ ,  $d(N) = \sum_{k > h} \epsilon_k(N) \omega_k + \theta$ ,  $(\omega_k)$  étant la suite définie pour  $k \geq h - 1$  par :

$$\omega_{h-1} = 1, \omega_h = 0, \omega_{k+1} = a_{k+1} \omega_k + \omega_{k-1} \text{ pour } k \geq h$$

2) Lorsque  $a < q_h$ ,  $d(N) = \sum_{k > h} \epsilon_k(N) \omega'_k + \theta$ ,  $(\omega'_k)$  étant la suite définie pour  $k \geq h - 1$  par :

$$\omega'_{h-1} = 1 - a_{h+1}, \omega'_h = 1 \text{ et } \omega'_{k+1} = a_{k+1} \omega'_k + \omega'_{k-1} \text{ pour } k \geq h.$$

Principe de la démonstration. — On pose  $N_h = \sum_{k > h} \epsilon_k(N) q_k$ .

On a :  $d(N) = d(N_h) + \theta$ . Reste à évaluer  $d(N_h)$ .

Par récurrence sur  $k \geq h$ , on vérifie d'abord que

$$d(q_k) = \begin{cases} \omega_k & \text{si } a \geq q_k \\ \omega'_k & \text{si } a < q_k. \end{cases}$$

Par récurrence sur l'entier  $\lambda \geq h$ , on montre ensuite en supposant que  $N \in [q_\lambda, q_{\lambda+1}[$ , les relations

$$d(N_h) = \begin{cases} \sum_{k > h} \epsilon_k(N) \omega_k & \text{si } a \geq q_k \\ \sum_{k > h} \epsilon_k(N) \omega'_k & \text{si } a < q_k. \end{cases}$$

3.1.2. *Comportement des suites  $(\omega_k \cdot q_k^{-1})$  et  $(\omega'_k \cdot q_k^{-1})$ .*

LEMME 4. —  $\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\omega_k}{q_k}$  et  $\delta' = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\omega'_k}{q_k}$ ,  $\delta$  et  $\delta'$  étant les quantités introduites au théorème 4.

Démonstration. — On pose  $M_n = \begin{bmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{bmatrix}$ ,  $\frac{p_n}{q_n}$  étant la  $n^{\text{ième}}$  réduite de  $\alpha$ ,  $\Lambda_n = \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , et on désigne par  $\left( \frac{v_{n+h}}{\omega_{n+h}} \right)_{n \geq 1}$ ,

la suite des réduites de  $[a_{h+1}; a_{h+2}, \dots]$

$$M_{n+h} = (\Lambda_0 \Lambda_1 \dots \Lambda_h) (\Lambda_{h+1} \dots \Lambda_{n+h})$$

donc

$$\begin{bmatrix} p_{n+h} & p_{n+h-1} \\ q_{n+h} & q_{n+h-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_h & p_{h-1} \\ q_h & q_{h-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{n+h} & v_{n+h-1} \\ \omega_{n+h} & \omega_{n+h-1} \end{bmatrix}$$

d'où 
$$\frac{\omega_{n+h}}{q_{n+h}} = \left( q_{h-1} + q_h \frac{v_{n+h}}{\omega_{n+h}} \right)^{-1}.$$

Il apparaît que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\omega_k}{q_k} = (q_{h-1} + q_h [a_{h+1}; a_{h+2}, \dots])^{-1} = \delta.$$

D'autre part, soit  $\omega_k'' = \omega_k' - \omega_k$  pour  $k \geq h-1$

$$\omega_h'' = 1, \omega_{h+1}'' = 0 \text{ et } \omega_{k+1}'' = a_{k+1} \omega_k'' + \omega_{k+1}' \text{ pour } k \geq h.$$

Soit  $\left( \frac{v_{n+h}''}{\omega_{n+h}''} \right)_{n \geq 2}$  la suite des réduites de  $[a_{h+2}; a_{h+3}, \dots]$ .

$$M_{n+h} = M_{h+1} \begin{bmatrix} v_{n+h}'' & v_{n+h-1}'' \\ \omega_{n+h}'' & \omega_{n+h-1}'' \end{bmatrix}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\omega_k''}{q_k} &= (q_h + q_{h+1} [a_{h+2}; a_{h+3}, \dots])^{-1} \\ &= \frac{[0; a_{h+2}, \dots]}{q_{h+1} + q_h [0; a_{h+2}, \dots]} = \delta' - \delta. \end{aligned}$$

### 3.1.3. Fin de la preuve du théorème 4.

On traite par exemple le cas où  $a \geq q_k$ . Il s'agit de prouver que :  $\delta = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k > h} \epsilon_k(N) \omega_k$ . Soit  $\epsilon > 0$ . D'après le lemme 4, il existe  $r > h$  tel que :

$$\forall k \geq r, \delta q_k (1 - \epsilon) \leq \omega_k \leq \delta q_k (1 + \epsilon). \quad (9)$$

D'autre part, il existe  $K \in \mathbf{N}^*$  tel que :

$$q_r \leq \epsilon \delta q_K. \quad (10)$$



On suppose  $N \geq q_K$ . Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k>h} \epsilon_k(N) \omega_k &\leq \sum_{k<r} \epsilon_k(N) q_k + \sum_{k>r} \epsilon_k(N) q_k \delta(1 + \epsilon) \text{ d'après (9)} \\ &< q_r + \delta(1 + \epsilon)N \leq \delta(1 + 2\epsilon)N \text{ d'après (10)}. \end{aligned} \quad (11)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{k>h} \epsilon_k(N) \omega_k &\geq \delta(1 - \epsilon) \sum_{k>r} \epsilon_k(N) q_k \text{ d'après (9)} \\ &> \delta(1 - \epsilon) (N - q_r) \geq \delta(1 - 2\epsilon)N \text{ d'après (10)}. \end{aligned} \quad (12)$$

(11) et (12) donnent finalement, pour  $N \geq q_K$ :

$$\delta(1 - 2\epsilon) \leq \frac{1}{N} \sum_{k>h} \epsilon_k(N) \omega_k \leq \delta(1 + 2\epsilon).$$

### 3.2. Une partition de $N$ .

**LEMME 5.** — *Pour tout entier naturel  $t$ , il existe une partition de  $N$  en sous-ensemble  $Q_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , et une suite  $(\lambda'_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telles que :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \in Q_k$ ,  $\sigma_\alpha(n + t) - \sigma_\alpha(n) = \lambda'_k$ .*

*Démonstration.* — Soit  $t \in \mathbb{N}^*$ . On définit  $\ell \in \mathbb{N}$  par  $q_{\ell-1} < t \leq q_\ell$ . Pour tout  $v \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$\mathcal{R}_v = \{n \in \mathbb{N} ; \psi_{\ell+v}(n) + t < q_{\ell+v+1} \text{ et } \epsilon_{\ell+v+1}(n) < a_{\ell+v+2}\}.$$

$N = \bigcup_{v \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_v$  : en effet, si  $n < q_{\ell+m}$ ,  $m \geq 1$ ,

$$\psi_{\ell+m+1}(n) + t = n + t < q_{\ell+m} + t \leq q_{\ell+m+1} \text{ et } \epsilon_{\ell+m+2}(n) = 0,$$

de sorte que  $n \in \mathcal{R}_{m+1}$ .

Soit alors  $\mathfrak{S}_0 = \mathcal{R}_0$  et, pour  $v \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathfrak{S}_v = \mathcal{R}_v - \bigcup_{k=0}^{v-1} \mathcal{R}_k$ . Les ensembles  $\mathfrak{S}_v$ ,  $v \in \mathbb{N}$ , forment une partition de  $N$ . Si  $n \in \mathfrak{S}_v$ ,

$$n + t - \sum_{k>\ell+v} \epsilon_k(n) q_k = \psi_{\ell+v}(n) + t < q_{\ell+v+1}.$$

Il résulte de l'inégalité précédente et de  $\epsilon_{\ell+v+1}(n) < a_{\ell+v+2}$ , que :  $\epsilon_k(n + t) = \epsilon_k(n)$  si  $k \geq \ell + v + 1$ . Donc, si  $n \in \mathfrak{S}_v$ ,

$$\sigma_\alpha(n + t) - \sigma_\alpha(n) = \sigma_\alpha(\psi_{\ell+v}(n) + t) - \sigma_\alpha(\psi_{\ell+v}(n)).$$

Lorsque  $\mathfrak{S}_v \cap \mathcal{E}(\ell + v, a)$  est non vide,

$$n \in \mathfrak{S}_v \cap \mathcal{E}(\ell + v, a) \Rightarrow \sigma_\alpha(n + t) - \sigma_\alpha(n) = \sigma_\alpha(a + t) - \sigma_\alpha(a).$$

Il suffit de numérotter les ensembles  $\mathfrak{S}_v \cap \mathcal{E}(\ell + v, a)$  non vides pour obtenir la partition  $\{Q_k; k \in \mathbf{N}\}$ .

Notons que, si  $\mathfrak{S}_v \cap \mathcal{E}(\ell + v, a)$  est non vide,

$$\mathfrak{S}_v \cap \mathcal{E}(\ell + v, a) = \mathcal{E}(\ell + v, a) \cap \{n \in \mathbf{N}; \epsilon_{\ell+v+1}(n) < a_{\ell+v+2}\}$$

est réunion finie d'ensembles  $\mathcal{E}(\ell + v + 1, b)$  donc, d'après le théorème 4, les ensembles  $Q_k$  possèdent une densité asymptotique.

### 3.3. Minoration d'une densité.

Les notations sont celles des paragraphes 3.1 et 3.2.

LEMME 6. — Soit  $\epsilon > 0$ . Il existe  $w \in \mathbf{N}^*$  tel que :

$$B_w = \mathbf{N} - \bigcup_{v < w} \mathcal{R}_v$$

ait une densité  $\leq \epsilon$ .

*Démonstration.* —  $B_w = \{n \in \mathbf{N}; \forall v \leq w, \psi_{\ell+v}(n) \geq q_{\ell+v+1} - t$   
ou  $\epsilon_{\ell+v+1}(n) = a_{\ell+v+2}\}$ . Si  $v \geq 1$ ,

$$q_{\ell+v+1} - t \geq q_{\ell+v+1} - q_\ell \geq a_{\ell+v+1} q_{\ell+v}.$$

Donc

$$B_w \subset \{n \in \mathbf{N}; \forall v \leq w, \epsilon_{\ell+v}(n) = a_{\ell+v+1} \text{ ou } \epsilon_{\ell+v+1}(n) = a_{\ell+v+2}\}.$$

On pose  $w = 2r$ . Si  $n \in B_{2r}$ ,

$$(\epsilon_{\ell+1}(n), \dots, \epsilon_{\ell+2r}(n)) = (a_{\ell+2}, 0, a_{\ell+4}, 0, \dots, 0, a_{\ell+2r}, b)$$

avec  $b < a_{\ell+2r+1}$ , ou bien

$$(\epsilon_{\ell+1}(n), \dots, \epsilon_{\ell+2r}(n)) = (0, a_{\ell+3}, 0, \dots, a_{\ell+2r-1}, 0, a_{\ell+2r+1}).$$

Dans le premier cas, puisque nécessairement  $\epsilon_\ell(n) = 0$ ,  $\psi_{\ell+2r}(n)$  peut prendre au plus  $q_\ell a_{\ell+2r+1}$  valeurs. Dans le deuxième cas,  $\psi_{\ell+2r}(n)$  peut prendre au plus  $q_{\ell+1}$  valeurs. D'après le théorème 4, la densité de  $B_{2r}$  est majorée par :

$$[1; a_{\ell+2r+2}, \dots] (q_{\ell+2r+1} + q_{\ell+2r} [0; a_{\ell+2r+2}, \dots])^{-1} (q_{\ell+1} + q_\ell a_{\ell+2r+1}),$$

donc par  $2(q_{\ell+1} + q_{\ell} a_{\ell+2r+1}) q_{\ell+2r+1}^{-1}$ , enfin par :

$$2 \left( \frac{q_{\ell+1}}{q_{\ell+2r+1}} + \frac{q_{\ell}}{q_{\ell+2r}} \right).$$

Le lemme est démontré.

### 3.4. $g'$ possède une corrélation.

A l'aide des lemmes 5 et 6 et du théorème 4, on démontre exactement comme dans [2] au paragraphe 3.4 que  $g'$  possède une corrélation  $\gamma_{g'}$ , donnée par :  $\gamma_{g'}(t) = \sum_{k \in \mathbf{N}} d(Q_k) e(y\lambda'_k)$ .

## 4. CAS OU $g$ EST PSEUDO-ALEATOIRE

### 4.1. Valeur de la corrélation de $G$ .

Besineau a démontré [1] :

LEMME 7. — 1) Pour tout  $t \in \mathbf{N}$ , il existe une partition de  $\mathbf{N}$  en progressions arithmétiques  $\mathcal{P}_j$ ,  $j \in \mathbf{N}$ , et une suite  $(\lambda_j)_{j \in \mathbf{N}}$  telles que :  $\forall j \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathcal{P}_j, s(n+t) - s(n) = \lambda_j$ .

2)  $g$  possède une corrélation donnée par :

$$\gamma_g(t) = \sum_{j \in \mathbf{N}} d(\mathcal{P}_j) e(x\lambda_j).$$

En reprenant les arguments des paragraphes 3.3 et 3.4, on montre que  $G = gg'$  possède une corrélation donnée par :

$$\gamma_G(t) = \sum_{j,k} d(\mathcal{P}_j \cap Q_k) e(x\lambda_j) e(y\lambda'_k).$$

Le lemme 8 qui suit montre que cette quantité est égale à :

$$\sum_{j,k} d(\mathcal{P}_j) d(Q_k) e(x\lambda_j) e(y\lambda'_k) \text{ soit } \gamma_g(t) \gamma_{g'}(t).$$

Donc  $|\gamma_G(t)| \leq |\gamma_g(t)|$ , et si  $g$  est pseudo-aléatoire,  $G$  l'est aussi donc a une moyenne nulle, ce qui achève la démonstration du théorème 3.

4.2. Un résultat d'indépendance statistique.

LEMME 8. — Pour tout  $k \in \mathbf{N}$ ,  $Q_k$  est statistiquement indépendant de toute progression arithmétique.

Il revient au même de prouver que  $\mathcal{G}(h, a)$  est statistiquement indépendant de toute progression arithmétique  $u\mathbf{N} + v$ ,  $u \geq 2$ .

On désigne par  $\chi$  la fonction caractéristique de  $u\mathbf{N} + v$  et par  $\chi'$  celle de  $\mathcal{G}(h, a)$ , de sorte que :

$$\chi(n) \chi'(n) = \frac{1}{u} \sum_{0 < z < u} e\left(-\frac{zv}{u}\right) \chi'(n) e\left(\frac{zn}{u}\right).$$

Il s'agit de prouver que, si  $1 \leq z < u$ , la suite de terme général  $\chi'(n) e\left(\frac{zn}{u}\right)$  a une moyenne nulle.

Puisque  $\chi'(n) = \frac{1}{q_{h+1}} \sum_{0 < z' < q_{h+1}} e\left(-\frac{z'a}{q_{h+1}}\right) e\left(\frac{z'\psi_h(n)}{q_{h+1}}\right)$ , il est équivalent de vérifier que la suite de terme général

$$H'_{z,z'}(n) = e\left(\frac{zn}{u} + \frac{z'\psi_h(n)}{q_{h+1}}\right)$$

a une moyenne nulle si  $1 \leq z < u$ .

Il est clair que  $H_{z,z'}$  est multiplicative relativement à  $\alpha$  et que, si  $k \geq h + 1$  et  $0 \leq b \leq a_{k+1}$

$$H_{z,z'}(bq_k) = e\left(\frac{zbq_k}{u}\right).$$

Le lemme 2 donne, en posant  $\delta_k = \mu_k(H_{z,z'})$  :

LEMME 2bis. — On a pour  $k \geq h + 2$

$$1) \quad q_{k+2} \delta_{k+2} = q_{k+1} \delta_{k+1} \sum_{0 < b < a_{k+2}} e\left(\frac{zbq_{k+1}}{u}\right) + q_k \delta_k e\left(\frac{za_{k+2}q_{k+1}}{u}\right)$$

2) si  $a_{k+2} = a_{k+1} = 1$ ,

$$q_{k+2} \delta_{k+2} = q_k \delta_k \left(1 + e\left(\frac{zq_{k+1}}{u}\right)\right) + q_{k-1} \delta_{k-1} e\left(\frac{zq_k}{u}\right).$$

## 4.3. Fin de la démonstration du lemme 8.

Il reste à prouver que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$ . On distingue plusieurs cas. Les deux lemmes suivants seront utiles.

LEMME 9. — Soit  $D_k = \text{Max} \{|\delta_k|, |\delta_{k+1}|\}$ . La suite  $(D_k)$  est décroissante.

*Démonstration.* — Le lemme 9 résulte du lemme 2 bis.

LEMME 10. — L'égalité  $1 = e\left(\frac{zq_k}{u}\right) = e\left(\frac{zq_{k+1}}{u}\right)$  est impossible si  $z \in \{1, \dots, u-1\}$ .

*Démonstration.* — L'égalité précédente entraîne, par récurrence descendante,  $e\left(\frac{zq_0}{u}\right) = 1$  donc  $z \equiv 0$  modulo  $u$ .

4.3.1. *Premier cas :*  $\{k \in \mathbf{N}; a_{k+2} \geq 2 \text{ et } a_{k+1} \geq 2\}$  est infini.

D'après le lemme 10,

$$S_1 = \left\{ k \geq h; a_{k+2} \geq 2 \text{ et } e\left(\frac{zq_{k+1}}{u}\right) \neq 1 \right\} \text{ est infini.}$$

Soit  $k \in S_1$ . D'après le lemme 2 bis 1),

$$q_{k+2} |\delta_{k+2}| \leq D_k (q_k + q_{k+1}) \left| \sum_{0 < b < a_{k+2}} e\left(\frac{bzq_{k+1}}{u}\right) \right|. \quad (18)$$

Puisque  $\left| 1 - e\left(\frac{zq_{k+1}}{u}\right) \right| \geq \left| 1 - e\left(\frac{1}{u}\right) \right|$ , on peut affirmer comme au paragraphe 2.4.2 qu'il existe  $\beta > 0$  tel que, pour tout  $k \in S_1$

$$\left| \sum_{0 < b < a_{k+2}} e\left(\frac{bzq_{k+1}}{u}\right) \right| \leq (1 - \beta) a_{k+2}. \quad (19)$$

Comme au paragraphe 2.4.2, on obtient

$$k \in S_1 \implies D_{k+2} \leq \left(1 - \frac{\beta}{3}\right) D_k. \quad (20)$$

A l'aide du lemme 9, on conclut que  $D_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ .

4.3.2. *Deuxième cas :*  $\{k \in \mathbf{N}; a_{k+3} = a_{k+2} = a_{k+1} = 1\}$  est infini.

D'après le lemme 10,

$$S_2 = \left\{ k > h; a_{k+2} = a_{k+1} = 1 \text{ et } e\left(\frac{zq_{k+1}}{u}\right) \neq 1 \right\} \text{ est infini.}$$

D'après le lemme 2 bis 2), si  $k \in S_2$

$$q_{k+2} |\delta_{k+2}| \leq D_k \left( q_k \left| 1 + e\left(\frac{1}{u}\right) \right| + q_{k-1} \right),$$

donc,

$$|\delta_{k+2}| \leq \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) D_k. \quad (21)$$

A l'aide du lemme 2 bis 1), on en déduit :

$$q_{k+3} |\delta_{k+3}| \leq D_k \left( \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) a_{k+3} q_{k+2} + q_{k+1} \right)$$

$$|\delta_{k+3}| \leq \left(1 - \frac{\beta}{4}\right) D_k, \quad (22)$$

$$\text{de sorte que } k \in S_2 \implies D_{k+2} \leq \left(1 - \frac{\beta}{4}\right) D_k.$$

4.3.3. *Troisième cas :*

$$\left\{ k \in \mathbf{N}; a_{k+3} \geq 2, a_{k+2} = a_{k+1} = 1 \text{ et } e\left(\frac{zq_{k+2}}{u}\right) \neq 1 \right\} \text{ infini.}$$

$$S_3 = \left\{ k > h; a_{k+3} \geq 2, a_{k+2} = a_{k+1} = 1 \text{ et } e\left(\frac{zq_{k+2}}{u}\right) \neq 1 \right\}$$

est infini.

Soit  $k \in S_3$ . D'après le lemme 2 bis 1),

$$q_{k+3} |\delta_{k+3}| \leq q_{k+2} |\delta_{k+2}| a_{k+3} (1 - \beta) + q_{k+1} |\delta_{k+1}|$$

$$\leq D_{k+1} (q_{k+3} - \beta a_{k+3} q_{k+2}),$$

donc

$$|\delta_{k+3}| \leq \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) D_{k+1}. \quad (23)$$

En appliquant le lemme 2 bis 1),  $|\delta_{k+4}| \leq \left(1 - \frac{\beta}{4}\right) D_{k+1}$ .

Finalement,  $k \in S_3 \implies D_{k+3} \leq \left(1 - \frac{\beta}{4}\right) D_{k+1}$ .

4.3.4. *Quatrième cas :*

$$\left\{ k \in \mathbf{N}; a_{k+3} \geq 2, a_{k+2} = a_{k+1} = 1 \text{ et } e\left(\frac{zq_{k+2}}{u}\right) = 1 \right\} \text{ infini}$$

Dans ce cas,  $S_2 = \left\{ k > h; a_{k+2} = a_{k+1} = 1 \text{ et } e\left(\frac{zq_{k+1}}{u}\right) \neq 1 \right\}$  est infini. On conclut comme dans le deuxième cas.

4.3.5. *Cinquième cas : aucune des conditions précédentes n'est réalisée.*

Alors il existe  $K \in \mathbf{N}$  tel que, pour tout  $p \in \mathbf{N}$ ,  $a_{K+2p} \geq 2$  et  $a_{K+2p+1} = 1$ . D'autre part, l'égalité

$$1 = e\left(\frac{zq_{K+2p+3}}{u}\right) = e\left(\frac{zq_{K+2p+1}}{u}\right)$$

est impossible. En effet, elle entraîne  $e\left(\frac{zq_{K+2p+2}}{u}\right) = 1$  car  $q_{K+2p+2} = q_{K+2p+3} - q_{K+2p+1}$ . Et l'égalité

$$1 = e\left(\frac{zq_{K+2p+2}}{u}\right) = e\left(\frac{zq_{K+2p+1}}{u}\right)$$

est impossible d'après le lemme 10.

L'ensemble

$$S_4 = \left\{ k > h; a_{k+2} \geq 2, a_{k+1} = 1, a_k \geq 2 \text{ et } e\left(\frac{zq_{k+1}}{u}\right) \neq 1 \right\}$$

est donc infini. Si  $k \in S_4$ , on a d'après le lemme 2 bis 1) :

$$\begin{aligned} q_{k+2} |\delta_{k+2}| &\leq (1 - \beta) a_{k+2} q_{k+1} |\delta_{k+1}| + q_k |\delta_k| \\ &\leq D_k (q_{k+2} - \beta a_{k+2} q_{k+1}), \end{aligned}$$

$$\text{donc } |\delta_{k+2}| \leq D_k \left(1 - \frac{\beta}{2}\right).$$

On obtient, grâce au lemme 2 bis 1) à nouveau :

$$k \in S_4 \implies D_{k+2} \leq \left(1 - \frac{\beta}{4}\right) D_k. \quad (24)$$

Le lemme 8 est prouvé et le théorème 3 aussi.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BESINEAU, Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction "somme des chiffres", *Acta Arithmetica*, 20 (1972), 401-414.

- [2] J. COQUET, Ph. TOFFIN, Représentations des entiers naturels et indépendance statistique, *Bull. des Sciences Math.*, à paraître 1981.
- [3] J. COQUET, Répartition de la somme des chiffres associée à une fraction continue, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* à paraître 1980.

Manuscrit reçu le 10 juillet 1980.

J. COQUET,  
Département de Mathématiques  
Université de Valenciennes  
59326 Aulnoy-les-Valenciennes.

G. RHIN,  
Département de Mathématiques  
Université de Metz  
Ile du Saulcy  
57000 Metz.

Ph. TOFFIN,  
U.E.R. des Sciences  
Université de Caen  
Esplanade de la Paix  
14000 Caen.