ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DOMINIQUE HULIN

Le second nombre de Betti d'une variété riemannienne $(\frac{1}{4}-\varepsilon)$-pincée de dimension 4

Annales de l'institut Fourier, tome 33, nº 2 (1983), p. 167-182

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_2_167_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 2 (1983), 167-182.

LE SECOND NOMBRE DE BETTI D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE $\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)$-PINCÉE DE DIMENSION 4

par Dominique HULIN

INTRODUCTION

Une variété riemannienne sera dite δ-pincée si sa courbure sectionnelle est partout comprise entre δ et 1, $(\delta \leqslant 1)$.

Nous rappelons d'abord le théorème de rigidité suivant :

THÉORÈME : [1], [3]. — *Soit* (M,g) *une variété riemannienne* δ-*pincée de dimension* n, *alors :*

(i) *Si* $\delta > \frac{1}{4}$, *alors* M *est homéomorphe à la sphère de même dimension*

(ii) Si $\delta = \frac{1}{4}$, *soit* M *est homéomorphe à* S^n; *soit* (M,g) *est isométrique à un espace riemannien symétrique de rang un.*

Une question naturelle se pose : existe-t-il un réel ε positif, éventuellement dépendant de la dimension, et tel que, pour $\delta > \frac{1}{4} - \varepsilon(n)$, une variété de dimension n qui admet une métrique riemannienne δ-pincée soit encore homéomorphe à l'une de ces variétés ?

Nous nous restreignons ici au premier cas non banal, celui de la dimension 4. En remarquant que le second nombre de Betti des variétés impliquées dans le résultat précédent (soient $\mathbf{CP}^2$ et $\mathbf{S}^4$) est majoré par 1, nous pouvons donner un élément de réponse :

THÉORÈME. — *Soit* M *une variété connexe de dimension* 4, *qui admet une métrique riemannienne* g *telle que* (M,g) *soit* $\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)$*-pincée avec* $\varepsilon < 2{,}5.10^{-4}$ *alors* $b_2(M) \leqslant 1$, *où* $b_2(M)$ *représente le second nombre de Betti réel de* M.

Je tiens à remercier S. Gallot pour ses indications qui m'ont permis d'améliorer considérablement les résultats du II.1 (estimations de volume).

Dans toute la suite $V(M) = V(g)$ désignera le volume de (M,g), qui est compacte, et sera supposée connexe.

Ce texte présente un résultat paru aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, dans une version améliorée et détaillée [5].

RAPPELS

(i) *Le théorème de Hodge - de Rham,* qui affirme que pour toute métrique g donnée sur une variété différentiable M, $b_2(M) = \dim H^2(M,g)$, où $H^2(M,g)$ est l'espace des deux-formes harmoniques sur (M,g), et où b_2 désigne le second nombre de Betti réel de la variété M.

(ii) *La formule de Weitzenböck :*

Si α est une 2-forme extérieure sur (M,g), avec $\dim M = 4$, on a l'égalité :

$$(1) \qquad \langle \alpha, \Delta\alpha \rangle = \frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2) + |D\alpha|^2 + \langle R\alpha,\alpha \rangle$$

avec, si en $p, \alpha = \frac{|\alpha|_p}{2}(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4)$ où (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base orthonormée de T_pM,

$$(2) \qquad \langle R\alpha,\alpha \rangle_p = (\sigma_{13}+\sigma_{14}+\sigma_{23}+\sigma_{24}-2R_{1234}).|\alpha|_p^2,$$

où σ_{ij} est la courbure sectionnelle du 2-plan engendré par (e_i, e_j).

(iii) *Les estimations du tenseur de courbure* [7] :

Si (M,g) est δ-pincée, si $p \in M$ et si (u,v,w,z) est une base orthonormée de T_pM,

$$|R(u,v,v,w)| \leqslant \frac{1}{2}(1-\delta) \tag{3}$$

$$|R(u,v,w,z)| \leqslant \frac{2}{3}(1-\delta). \tag{4}$$

(iv) Enfin, quand M est orientable et orientée de dimension 4, la décomposition de l'espace des 2-formes harmoniques sous l'action de l'opérateur de Hodge, en somme des espaces des 2-formes harmoniques positives et négatives, $H^2 = H^2_+ \oplus H^2_-$ [2].

Dans ce qui suit, nous supposerons que (M,g) est une variété riemannienne δ-pincée de dimension 4 et orientée.

En effet, si $p : \tilde{M} \to M$ est un revêtement riemannien, $\tilde{M}$ est elle aussi δ-pincée et $b_2(M) \leqslant b_2(\tilde{M})$. On prendra alors pour $\tilde{M}$ le revêtement d'orientation de M.

I. LE SECOND NOMBRE DE BETTI D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE DE DIMENSION 4 ET 1/4-PINCÉE

(M,g) est ici $\frac{1}{4}$ -pincée.

THÉORÈME 1. — *Soit* (M,g) *une variété* $\left(\frac{1}{4} - \textit{pincée}\right)$, *alors* $b_2(M) \leqslant 1$.

Nous devons d'abord prouver le lemme :

LEMME 2. — *Soit* α *une 2-forme harmonique non nulle sur* (M,g). *Alors* α *est parallèle, donc de norme constante, et si en* $p \in M$ *on a* $\alpha_p = \frac{|\alpha|_p}{2}(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4)$, où (e_1, e_2, e_3, e_4) *est une base orthonormée de*

T_pM, on a

$$\sigma_{13} = \sigma_{14} = \sigma_{23} = \sigma_{24} = \frac{1}{4}$$
$$\sigma_{12} = \sigma_{34} = 1$$
$$R_{1234} = \frac{1}{2}.$$

C'est la situation de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et de sa forme de Kähler.

Preuve. — Écrivons la formule de Weitzenböck :

$$(1') \qquad \frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2) + |D\alpha|^2 + \langle R\alpha,\alpha\rangle = 0 \quad \text{car} \quad \Delta\alpha = 0.$$

En $p \in M$:

$$\langle R\alpha,\alpha\rangle_p = (\sigma_{13}+\sigma_{14}+\sigma_{23}+\sigma_{24}-2R_{1234})\,|\alpha|_p^2$$
$$\langle R\alpha,\alpha\rangle_p \geqslant 4.\frac{1}{4} - 2.\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right) \quad \text{par} \quad (4)$$
$$\langle R\alpha,\alpha\rangle_p \geqslant 0.$$

En intégrant (1′), on obtient :

$$\int_M |D\alpha|^2 + \langle R\alpha,\alpha\rangle = 0.$$

Donc $|D\alpha|^2 \equiv \langle R\alpha,\alpha\rangle \equiv 0$, donc α est parallèle. Comme α est non nulle et parallèle, on obtient pour tout point $p \in M$,

$$\langle R\alpha,\alpha\rangle_m = 0 \Rightarrow \sigma_{13} + \sigma_{14} + \sigma_{23} + \sigma_{24} - 2R_{1234} = 0.$$

Compte tenu de (4), on a donc $\sigma_{13} = \sigma_{14} = \sigma_{23} = \sigma_{24} = \frac{1}{4}$ et $R_{1234} = \frac{1}{2}\cdot$ Estimons maintenant σ_{12} et σ_{34}, (ce n'est pas nécessaire pour la démonstration du Théorème 1, mais nous sera utile dans la généralisation du II). D'après les rappels (iii),

$$\begin{aligned} 3 = 6R(e_1,e_2,e_3,e_4) &= R(e_1,e_2+e_4,e_3,e_2+e_4) - R(e_1,e_2-e_4,e_3,e_2-e_4) \\ &- R(e_2,e_1+e_4,e_3,e_1+e_4) + R(e_2,e_1-e_4,e_3,e_1-e_4). \end{aligned}$$

Comme (M,g) est $\frac{1}{4}$-pincée, $\left|R(e_i, e_j+e_k, e_l, e_j+e_k)\right| \leqslant \frac{3}{4}$ avec i,j,k,l distincts dans $\{1,2,3,4\}$.

Donc

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2+e_4, e_3, e_2+e_4) &= -R(e_1, e_2-e_4, e_3, e_2-e_4) \\ &= R(e_2, e_1-e_4, e_3, e_1-e_4) \\ &= -R(e_2, e_1+e_4, e_3, e_1+e_4) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} R(e_1+e_3, e_2+e_4, e_1+e_3, e_2+e_4) - R(e_1-e_3, e_2+e_4, e_1-e_3, e_2+e_4) \\ = 4R(e_1, e_2+e_4, e_3, e_2+e_4). \end{aligned}$$

Donc

$$R(e_1+e_3, e_2+e_4, e_1+e_3, e_2+e_4) = 4$$

et

$$R(e_1-e_3, e_2+e_4, e_1-e_3, e_2+e_4) = 1.$$

$$\begin{aligned} R(e_1+e_3, e_2+e_4, e_1+e_3, e_2+e_4) &= 4 \\ &= \sigma_{12} + \sigma_{14} + \sigma_{23} + \sigma_{34} + 2R_{1214} + 2R_{3234} \\ &\quad + 2R(e_1, e_2+e_4, e_3, e_2+e_4). \end{aligned}$$

On a $R_{1214} = R_{3234} = 0$ car R_{1414} (resp. R_{3232}) sont égaux à $\frac{1}{4}$ donc extrêmaux : on obtient $\sigma_{12} + \sigma_{34} = 2$, donc $\sigma_{12} = \sigma_{34} = 1$.

Achevons maintenant la preuve du théorème 1. Supposons que $b_2(M) \geqslant 2$. Deux cas se présentent :

1^er^ *cas :* il existe sur M deux 2-formes harmoniques α et β de même type (positives ou négatives) et globalement orthogonales. Comme ces formes sont parallèles (lemme 1) elles sont ponctuellement orthogonales. Nous pouvons en tous points les réduire simultanément :

$$\alpha_m = \frac{|\alpha|_m}{2}(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4), \qquad \beta_m = \frac{|\beta|_m}{2}(e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2),$$

et d'après le lemme appliqué à α :

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{14} = \sigma_{24} = \frac{1}{4}$$

et à β :

$$\sigma_{14} = \sigma_{12} = \sigma_{34} = \sigma_{32} = \frac{1}{4}.$$

La variété est à courbure constante $\frac{1}{4}$; elle est donc revêtue par $\mathbf{S}^4$ et donc $b_2(\mathrm{M}) \leqslant 1$.

2[nd] *cas :* il existe sur M deux 2-formes harmoniques α et β avec α positive et β négative. Nous pouvons réduire α et β en tout point de M : $\alpha_m = \frac{|\alpha|_m}{2}(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4)$ et $\beta_m = \frac{|\beta|_m}{2}(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4)$:

$$\sigma_{13} + \sigma_{14} + \sigma_{23} + \sigma_{24} - 2\mathrm{R}_{1234} = 0$$
$$\sigma_{13} + \sigma_{14} + \sigma_{23} + \sigma_{24} + 2\mathrm{R}_{1234} = 0.$$

En sommant on trouve $\sigma_{13} + \sigma_{14} + \sigma_{23} + \sigma_{24} = 0$, contradiction avec l'hypothèse du pincement.

II. LE SECOND NOMBRE DE BETTI D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE DE DIMENSION 4 ET $\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)$-PINCÉE

(M,g) est dans toute cette partie $\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)$-pincée.

La démonstration que nous présentons ici utilise une généralisation du lemme 2. On utilise toujours la formule de Weitzenböck, pour α une 2-forme harmonique :

$$(1') \qquad \frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2) + |\mathrm{D}\alpha|^2 + \langle \mathrm{R}\alpha,\alpha\rangle = 0.$$

Mais ici les estimations des rappels (iii) donnent

$$(5) \qquad \langle \mathrm{R}\alpha,\alpha\rangle \geqslant -\frac{16}{3}\varepsilon|\alpha|^2.$$

La forme α n'a plus aucune raison d'être parallèle; par (5) on sait que $\left(\frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2) \leqslant \frac{16}{3}\varepsilon|\alpha|^2\right)$ mais ce laplacien peut *a priori* être très négatif en certains points de M.

Pour obtenir des estimations sur la courbure sectionnelle, nous devons donc nous restreindre à un ouvert de la variété :

$$M_\eta(\alpha) = \left\{p \in M, \frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2) > -\eta|\alpha|^2\right\} \text{ où } \eta > 0.$$

II.1. Estimations de volume.

THÉORÈME [6]. — *Soit* (M,g) *une variété riemannienne de dimension* 4, *telle que* ricci $\geqslant 3\delta g$, $\delta > 0$, (*par exemple* (M,g) δ-*pincée*); *alors si* $f \in H_2^1(M,g)$, *on a :*

$$\|f\|_4^2 \leqslant (c(\delta)\|df\|_2^2 + \|f\|_2^2).V(g)^{-1/2}$$

où $c(\delta) = \frac{1}{2\delta}.\left(\frac{3}{8\pi^2}\right)^{1/2}$.

THÉORÈME [4]. — *Si* (M,g) *vérifie* ricci $\geqslant 3\delta g$, *avec* $\dim M = 4$, *et si* $f \in H_2^2(M,g)$ *vérifie* $\Delta f \leqslant \lambda f$ p.p. et $f \geqslant 0$, *alors*

$$\|f\|_4 \leqslant (1 + \lambda . c(\delta))^{1/2}\|f\|_2 V(g)^{-1/4}.$$

COROLLAIRE 3. — *Si* (M,g) *de dimension* 4 *est* $\left(\delta=\frac{1}{4}-\varepsilon\right)$-*pincée et si* α *est une* 2-*forme harmonique sur* (M,g), *alors* $\|\alpha\|_4 \leqslant k(\varepsilon).\|\alpha\|_2.V^{-1/4}$ *où*

$$k(\varepsilon) = \left(\frac{8\varepsilon}{3} \times .\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)^{-1}.\left(\frac{3}{8\pi^2}\right)^{1/2}+1\right)^{1/2}.$$

Preuve. — Par (5) et (1′) nous avons $\Delta(|\alpha|) \leqslant \frac{16}{3}\varepsilon.|\alpha|$ [4]. On applique les deux théorèmes précédents avec $\delta = \frac{1}{4} - \varepsilon$ et $\lambda = \frac{16}{3}\varepsilon$.

α est toujours une 2-forme harmonique sur (M,g); nous avons :

COROLLAIRE 4. — *Si* $M_\eta(\alpha) = \left\{x \in M, \frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2) > -\eta|\alpha|^2\right\}$ *on a*

$$\text{vol}\,(M_\eta(\alpha)) \geqslant V(g).\left[k(\varepsilon)^4\left(1+\frac{16}{3}\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2\right]^{-1}. \tag{6}$$

Preuve. — Par définition : $\int_{M-M_\eta} \frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2) \leqslant \int_{M-M_\eta} -\eta|\alpha|^2$, d'où

$$\eta \int_{M-M_\eta} |\alpha|^2 \leqslant \int_{M-M_\eta} \left(-\frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2)\right) \leqslant \int_{M-M_0} \left(-\frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2)\right)$$
$$= \int_{M_0} \frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2);$$

d'autre part

$$\int_{M_0} \frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2) \leqslant \frac{16}{3}\varepsilon \int_{M_0} |\alpha|^2 \leqslant \frac{16}{3}\varepsilon \int_{M_\eta} |\alpha|^2,$$

finalement

$$\int_{M-M_\eta} |\alpha|^2 + \int_{M_\eta} |\alpha|^2 = \|\alpha\|_2^2 \quad \text{et} \quad \int_{M-M_\eta} |\alpha|^2 \leqslant \frac{16}{3}\frac{\varepsilon}{\eta} \int_{M_\eta} |\alpha|^2,$$

donc

$$\int_{M_\eta} |\alpha|^2 \geqslant \left[1 + \frac{16}{3}\frac{\varepsilon}{\eta}\right]^{-1} \|\alpha\|_2^2.$$

On a en utilisant l'inégalité de Schwarz :

$$\int_{M_\eta} |\alpha|^2 \leqslant \left(\int_{M_\eta} |\alpha|^4\right)^{1/2} . (\operatorname{Vol} M_\eta)^{1/2} \leqslant k(\varepsilon)^2 . \|\alpha\|_2^2 V^{-\frac{1}{2}} V(M_\eta)^{1/2},$$

d'où enfin :

$$\operatorname{Vol}(M_\eta) \geqslant \left[k(\varepsilon)^4 \left(1 + \frac{16}{3}\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2\right]^{-1} V(8).$$

LEMME 5. — *Soit* $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, *telle que* $\|f\|_4 \leqslant k(\varepsilon) . \|f\|_2 . V^{-\frac{1}{4}}$; *si* $\mu = \|f\|_2 . V^{-\frac{1}{2}}$, *alors* $\int (f^2 - \mu^2)^2 \leqslant (k(\varepsilon)^4 - 1)\mu^4 V$.

Preuve.

$$\int_M (f^2 - \mu^2)^2 = \int f^4 - 2\mu^2 . \int f^2 + \mu^4 \int 1$$
$$= \|f\|_4^4 - 2\|f\|_2^4 V^{-1} + \|f\|_2^4 V^{-2} . V$$
$$= \|f\|_4^4 - \|f\|_2^4 . V^{-1} \leqslant (k(\varepsilon)^4 - 1)\|f\|_2^4 . V^{-1} = (k(\varepsilon)^4 - 1)\mu^4 . V.$$

COROLLAIRE 6. — *Si* $M^h(\alpha) = \{x \in M, \left||\alpha|^2 - \mu^2\right| > h\mu^2\}$ *où* $\mu = \|\alpha\|_2 . V^{-1/2}$, *alors*

$$\text{Vol}(M^h(\alpha)) \leqslant \frac{k(\varepsilon)^4 - 1}{h^2} \text{Vol}(g). \tag{7}$$

Preuve.

$$\int_{M^h(\alpha)} [|\alpha|^2 - \mu^2]^2 \geqslant \text{Vol}\, M^h . h^2 . \mu^4$$

et

$$\int_{M^h(\alpha)} [|\alpha|^2 - \mu^2]^2 \leqslant \int_M [|\alpha|^2 - \mu^2]^2 \leqslant (k(\varepsilon)^4 - 1)\, \mu^4\, \text{Vol}(g)$$

donc

$$\text{Vol}(M^h(\alpha)) \leqslant \frac{k(\varepsilon)^4 - 1}{h^2} \text{Vol}(g).$$

II.2. Notion de cône acceptable.

Nous donnons d'abord une généralisation des estimations de la courbure sectionnelle du lemme 2, puis nous montrons que ces estimations confèrent une certaine rigidité au système considéré; cette généralisation repose en quelque sorte sur la continuité des opérations algébriques menées pour la démonstration du lemme 2.

PROPOSITION 7. — *Soit* α *une 2-forme harmonique sur* (M,g).

Soit $p \in M_\eta(\alpha)$ *tel que* $\alpha(p) \neq 0$:

Si $\alpha_p = \frac{|\alpha|_p}{2}(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4)$, *où* (e_i) *est une base orthonormée de* T_pM,

$$\sigma_{12} \quad \text{et} \quad \sigma_{34} \geqslant 1 - u \tag{8}$$

$$\sigma_{13}, \sigma_{14}, \sigma_{23}, \sigma_{24} \quad \text{sont} \quad \leqslant \frac{1}{4} + v \tag{9}$$

$$\frac{1}{2} - 2\varepsilon - \frac{\eta}{2} \leqslant R_{1234} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\varepsilon \tag{10}$$

avec $u = 4\eta + \left(18 + \frac{10}{3}\right)\varepsilon + 4\sqrt{\eta + \frac{16}{3}\varepsilon}$ et $v = \eta + \frac{13}{3}\varepsilon$.

Preuve. — Cette preuve est calquée sur celle du lemme 2 :
Sur $M_\eta(\alpha)$:

$$\sigma_{13} + \sigma_{14} + \sigma_{23} + \sigma_{24} - 2R_{1234} \leqslant \eta$$

en utilisant le rappel (iii), on obtient : $R_{1214}; \leqslant \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\varepsilon$, d'où :

$$\sigma_{13} \leqslant \eta - 3\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\varepsilon\right).2 = \frac{1}{4} + \eta + \frac{13}{3}\varepsilon.$$

De même $R_{1234} \geqslant \frac{1}{2} - 2\varepsilon - \frac{\eta}{2}$.

Nous donnons maintenant une estimation de R_{1214}; en effet, dans le cas du pincement $\frac{1}{4}$ nous avions obtenu $\sigma_{14} = \frac{1}{4}$; considérant alors la fonction

$$\varphi(\theta) = R(e_1, e_\theta, e_1, e_\theta) \qquad \text{où} \qquad e_\theta = \cos\theta . e_2 + \sin\theta . e_4,$$

on a

$$\varphi'(\theta) = 2R(e_1, -\sin\theta . e_2 + \cos\theta . e_4, e_1, \cos\theta . e_2 + \sin\theta . e_4),$$

et comme $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est extrêmal, $\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = -2R(e_1, e_2, e_1, e_4)$, soit $R_{1214} = 0$.

De la même façon, dans le cas du pincement $\left(\delta = \frac{1}{4} - \varepsilon\right)$, nous écrivons :

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= R(e_1, \sin\theta . e_2 + \cos\theta . e_4, e_1, \sin\theta . e_2 + \cos\theta . e_4) \\ &= \cos^2\theta . \sigma_{14} + \sin^2\theta . \sigma_{12} + R_{1214}\sin 2\theta \end{aligned}$$

$\sigma_\theta \leqslant s_\theta = \left(\dfrac{\sigma_{14}+1}{2}\right) + \cos 2\theta\left(\dfrac{\sigma_{14}-1}{2}\right) + R_{1214}\sin 2\theta$, en majorant σ_{12} par 1.

$$\frac{1}{4} - \varepsilon \leqslant \inf_{\theta\in[0,2\pi]} \sigma_\theta \leqslant \inf_{\theta\in[0,2\pi]} s_\theta = \left(\frac{\sigma_{14}+1}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{14}-1}{2}\right)^2 + R_{1214}^2},$$

donc

$$R_{1214}^2 \leqslant \left(\sigma_{14}-\frac{1}{4}+\varepsilon\right)\left(\frac{3}{4}+\varepsilon\right);$$

d'où puisque $\varepsilon < \frac{1}{4}$, $|R_{1214}| \leqslant \sqrt{\eta + \frac{16}{3}\varepsilon}$.

Suivant le lemme 2 nous obtenons enfin :

$$\sigma_{12} \text{ et } \sigma_{34} \geqslant 1 - 4\eta - \left(18+\frac{10}{3}\right)\varepsilon - 4\sqrt{\eta + \frac{16}{3}\varepsilon} = 1 - u.$$

PROPOSITION 7 *bis*. — *Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition* 7, *si nous supposons de plus que la variété est d'Einstein, nous obtenons les mêmes résultats avec*

$$u' = 2\eta + \left(9+\frac{5}{3}\right)\varepsilon + 2\sqrt{\frac{\eta}{2} + \frac{8}{3}\varepsilon},$$
$$v' = \frac{\eta}{2} + \frac{5}{3}\varepsilon.$$

Preuve. — Calcul identique au précédent.

COROLLAIRE 8. — *Il existe une fonction* $\tilde{\theta}(\varepsilon,\eta)$ *qui tend vers* 0 *avec* (ε,η), *telle que si* α *et* β *sont deux 2-formes harmoniques positives sur* M, *si* $p \in M_\eta(\alpha) \cap M_\eta(\beta)$, *si* $\alpha_p \neq 0$ *et* $\beta_p \neq 0$ (*cette dernière condition étant réalisée sur un ouvert dense de* M[0]), *on puisse écrire :*

$$\alpha_p = \frac{|\alpha|_p}{2}(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4)$$
$$\beta_p = \frac{|\beta|_p}{2}[(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4)\cos\theta + (e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4)\sin\theta)]$$

avec $|\cos\theta| \geqslant \cos\tilde{\theta}(\varepsilon,\eta)$, *et* (e_i) *base orthonormée de* T_pM.

Preuve. — Il est facile de voir que α et β se réduisent sous la forme indiquée : a priori : si $\alpha_p = \frac{|\alpha|_p}{2}(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4)$, comme β est positive :

$$\beta_p = \frac{|\beta|_p}{2}[(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) \times a + (e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2) \times b + (e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3).c].$$

Il suffit de faire tourner la base (e_1, e_2) dans le plan qu'elle définit pour obtenir le résultat.

On écrit alors :

$$\beta_p = \frac{|\beta|_p}{2}[e_1 \wedge (\cos\theta . e_2 + \sin\theta . e_3) + (\cos\theta . e_3 - \sin\theta . e_2) \wedge e_4].$$

Soient

$$e'_2 = \cos\theta . e_2 + \sin\theta . e_3 \qquad \text{et} \qquad e'_3 = \cos\theta . e_3 - \sin\theta . e_2$$

$$\sigma'_{12} = \sigma(e_1, e'_2) = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\sigma_{12} + \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\sigma_{13} + \sin 2\theta . R_{1213};$$

on a

$$1 - u \leqslant \sigma'_{12} = \left(\frac{\sigma_{12}+\sigma_{13}}{2}\right) + \cos 2\theta\left(\frac{\sigma_{12}-\sigma_{13}}{2}\right) + \sin 2\theta . R_{1213};$$

par (8) et (9) :

$$\frac{\sigma_{12}+\sigma_{13}}{2} \leqslant \frac{5}{8} + \frac{v}{2}, \qquad \text{et} \qquad \frac{\sigma_{12}-\sigma_{13}}{2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \varepsilon\right),$$

d'où

$$\frac{3}{8} - u - \frac{v}{2} \leqslant \left(\frac{3}{8} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\cos 2\theta + \sin 2\theta . \sqrt{\eta + \frac{16}{3}\varepsilon} = \psi(\theta)$$

et comme classiquement $\psi(\theta) = A^2 . \cos(2\theta - \alpha)$, où

$$A^2 = \left(\frac{3}{8} + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \eta + \frac{16}{3}\varepsilon \quad \text{et} \quad \cos\alpha = \frac{\frac{3}{8} + \frac{\varepsilon}{2}}{A},$$

on pose $\cos\omega = \dfrac{\frac{3}{8} - u - \frac{v}{2}}{A}$; *la condition s'écrit alors* $|2\theta - \omega| \leqslant \alpha$ soit

$$|\theta| \leqslant \frac{\alpha + \omega}{2} \quad \text{ou} \quad |\pi - \theta| \leqslant \frac{\alpha + \omega}{2} : \ \tilde{\theta} = \frac{\alpha + \omega}{2} \ \text{convient.}$$

Remarques. — Dans le cas d'une variété d'Einstein, on obtient $|\cos\theta| \geqslant \cos\tilde{\theta}'$ où $\tilde{\theta}'$ est obtenu à partir de u' et v' de la même façon que θ l'est à partir de u et v.

Les autres estimations sur σ'_{13} donnent des valeurs de $\tilde{\theta}$ du même ordre de grandeur que celle-ci.

On peut finalement dire que, la forme α étant fixée, toute autre 2-forme β positive se trouve, dans $M_\eta(\alpha) \cap M_\eta(\beta)$, dans un cône de direction α et d'angle $\tilde{\theta}(\varepsilon,\eta)$.

II.3. Preuve du théorème.

Considérons tout d'abord deux 2-formes harmoniques α et β, toutes deux positives.

PROPOSITION 9. — *Si* (M,g) *est* $\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)$*-pincée, avec* $\varepsilon < 2{,}5.10^{-4}$ *il ne peut exister deux 2-formes harmoniques positives non nulles et globalement orthogonales.*

Preuve. — En normalisant,

$$\|\alpha\|_2^2 = \|\beta\|_2^2 = 1; \quad (\alpha|\beta) = 0; \quad \gamma = \alpha + \beta; \quad \|\gamma\|_2^2 = 2.$$

Plaçons-nous sur $M_{h,\eta}(\alpha,\beta) = M_\eta(\alpha) \cap \complement M^h(\alpha) \cap M_\eta(\beta) \cap \complement M^h(\beta)$; sur cet ensemble :

$$\big|\,|\alpha|^2 - \|\alpha\|_2^2 V^{-1}\big| \leqslant h.\|\alpha\|_2^2 V^{-1};$$

posons $\mu^2 = V^{-1} = V^{-1}\|\beta\|_2^2$.

$$\begin{gathered}\big|\,|\alpha|^2 - \mu^2\big| \leqslant h.\mu^2\\ \big|\,|\beta|^2 - \mu^2\big| \leqslant h.\mu^2\\ \frac{1}{2}\Delta(|\alpha|^2) \geqslant -\eta|\alpha|^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\Delta(|\beta|^2) \geqslant -\eta.|\beta|^2.\end{gathered}$$

Nous nous restreignons au seul cas intéressant, pour lequel $\tilde{\theta} < \frac{\pi}{2}$ (sinon nous n'avons pas d'information sur les positions respectives de α et β), et distinguons alors

$$\begin{aligned}V^+ &= \{x \in M_{h,\eta}(\alpha,\beta),\ |\theta| \leqslant \tilde{\theta}\}\\ V^- &= \{x \in M_{h,\eta}(\alpha,\beta),\ |\theta - \pi| \leqslant \tilde{\theta}\},\end{aligned}$$

avec les notations précédentes.

$$\mathrm{Vol}\,(\mathrm{M}_{h,\eta}(\alpha,\beta)) \geqslant \mathrm{V}\left[2\left(\left(k(\varepsilon)^4.\left(1+\frac{16}{3}\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2\right)^{-1}+\frac{1-k(\varepsilon)^4}{h^2}\right)-1\right]$$
$$= \mathrm{Vol}\,(\varepsilon,\eta)$$

d'après les corollaires 4 et 6.

On a donc soit $\mathrm{Vol}\,(\mathrm{V}^+) \geqslant \frac{\mathrm{Vol}\,(\varepsilon,\eta)}{2}$, soit $\mathrm{Vol}\,(\mathrm{V}^-) \geqslant \frac{\mathrm{Vol}\,(\varepsilon,\eta)}{2}$. Pour ε et η assez petits, l'un de ces deux ensembles sera « assez gros ».

Sur V^+ :

$$\gamma_p = \alpha_p + \beta_p = \frac{1}{2}[(|\alpha|_p+|\beta|_p\cos\theta)(e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4)$$
$$+ |\beta|_p\sin\theta\,(e_1\wedge e_3+e_4\wedge e_2]$$

et

$$|\gamma|_p^2 \geqslant (|\alpha|_p+|\beta|_p\cos\theta)^2 \geqslant (1+\cos\tilde{\theta})^2(1-h)\mu^2 = (1+h_0).2.\mu^2$$

avec

$$h_0 = \frac{(1-h)(1+\cos\tilde{\theta})^2}{2} - 1\,.$$

Nous nous restreindrons au cas où l'on obtient $h_0 > 0$.

Sur V^- :

$$|\gamma|_p^2 \leqslant (\sqrt{1+h}.\mu-\cos\tilde{\theta}.\mu\sqrt{1-h})^2+(1+h)\mu^2.(1-\cos^2\tilde{\theta})$$
$$|\gamma|_p^2 = (1-h_1).2\mu^2\,.$$

Nous nous restreindrons ici aussi au cas oú $h_1 > 0$.

Nous avons donc

$\mathrm{V}^+ \subset \complement\,\mathrm{M}_{h_0}(\gamma)$ et $\mathrm{V}^- \subset \complement\,\mathrm{M}_{h_1}(\gamma)$, ainsi que

$$\mathrm{Vol}\,(\mathrm{V}^+) \quad \text{ou} \quad \mathrm{Vol}\,(\mathrm{V}^-) \geqslant \frac{\mathrm{Vol}\,(\varepsilon,\eta)}{2}.$$

Nous obtiendrons une contradiction tant que

$$\frac{\mathrm{Vol}\,(\varepsilon,\eta)}{2} > \sup\,[\mathrm{Vol}\,(\mathrm{M}_{h_1}(\gamma));\,\mathrm{Vol}\,(\mathrm{M}_{h_0}(\gamma))]\,.$$

Ceci se produit, environ, jusqu'à $\varepsilon = 2{,}5.10^{-4}$ (pour $\eta = 6.10^{-3}$ et $h = 0{,}144$). D'où le théorème.

PROPOSITION 9 *bis*. — *Pour une variété d'Einstein on a le résultat de la proposition* 9 *pour* $\varepsilon = 5{,}59.10^{-4}$, (*pour* $\eta = 1{,}644.10^{-2}$ *et* $h = 0{,}191$).

PROPOSITION 10. — *Pour une variété* $\left(\delta = \frac{4}{19}\right)$*-pincée la forme d'intersection de* M *est non dégénérée* (*il ne peut exister simultanément deux 2-formes harmoniques dont l'une est positive et l'autre est négative*).

C'est un résultat de M. Berger, amélioré par J. P. Bourguignon dans [2]; en posant $\delta = \frac{1}{4} - \varepsilon$, on obtient $\varepsilon \simeq 3{,}95.10^{-2}$.

Nous en donnons une preuve pour $\varepsilon \simeq 3{,}44.10^{-2}$, ce qui est un peu moins bon, mais par une méthode totalement différente :

Preuve. — Écrivons la formule de Weitzenböck pour α et β. On a par (2) et (5),

$$\begin{aligned}\langle R\alpha,\alpha\rangle_p &= (\sigma_{13}+\sigma_{14}+\sigma_{23}+\sigma_{24}-2R_{1234})|\alpha|_p^2\\ \langle R\beta,\beta\rangle_p &= (\sigma_{13}+\sigma_{14}+\sigma_{23}+\sigma_{24}+2R_{1234})|\beta|_p^2,\end{aligned}$$

d'où $\sigma_{13} + \sigma_{14} + \sigma_{23} + \sigma_{24} \leqslant \eta$ presque partout sur $M_\eta(\alpha) \cap M_\eta(\beta)$. Soit

$$1 - 4\varepsilon \leqslant \sigma_{13} + \sigma_{14} + \sigma_{23} + \sigma_{24} \leqslant \eta .$$

On aura une contradiction pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, où ε_0 tel que

$$M_\eta(\alpha) \cap M_\eta(\beta) \neq \varnothing \qquad \text{avec} \qquad \eta = 1 - 4\varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$2\left[k(\varepsilon)^4\left(1+\frac{16}{3}\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2\right]^{-1} - 1 > 0,$$

ou bien

$$k(\varepsilon)^4\left(1+\frac{16}{3}\frac{\varepsilon}{\eta}\right)^2 - 2 < 0 .$$

Une application numérique donne $\varepsilon_0 > 3{,}44.10^{-2}$.

Les conclusions des propositions 9 et 10 donnent le théorème annoncé.

On peut énoncer de même :

THÉORÈME *bis*. — *Si* M *est une variété sur laquelle il existe une structure riemannienne d'Einstein* $\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)$*-pincée avec* $\varepsilon < 5{,}59 . 10^{-4}$, *alors* $b_2(\mathrm{M}) \leqslant 1$.

Ce théorème découle immédiatement des propositions 9 *bis* et 10.

BIBLIOGRAPHIE

[0] N. ARONSZAJN, A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order, *J. Math. Pure et Appl.*, 35 (1957), 235-249.

[1] M. BERGER, Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées, *Bull. Soc. Math. de France*, 88 (1960), 57.

[2] Géométrie riemannienne en dimension 4, Séminaire Arthur Besse, Cedic-Nathan, Paris, 1981.

[3] I. CHAVEL, *Riemannian symmetric spaces of rank one*, Lecture notes n° 5, M. Dekker. Inc., New-York, 1972.

[4] S. GALLOT, Inégalités isopérimétriques sur les variétés riemanniennes compactes sans bord (à paraître).

[5] D. HULIN, Majoration du second nombre de Betti d'une variété riemannienne $\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)$ – pincée, *C.R.A.S.*, Paris, t. 295 (Sept. 82), Série I.

[6] S. ILIAS, Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes compactes, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 33, 2 (1983).

[7] H. KARCHER, A short proof of Berger's curvature tensor estimates, *Proc. of A.M.S.*, Vol. 26, n° 4 (Déc. 1970), 642.

Manuscrit reçu le 27 juillet 1982.

Dominique HULIN,
Université de Paris VII
2, place Jussieu
75251 Paris Cedex 05.

Adresse personnelle :
29, rue Berthollet
75005 Paris.