ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

J. H. DAVENPORT

Intégration algorithmique des fonctions élémentairement transcendantes sur une courbe algébrique

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 2 (1984), p. 271-276

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_2_271_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 2 (1984), 271-276.

INTÉGRATION ALGORITHMIQUE DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIREMENT TRANSCENDANTES SUR UNE COURBE ALGÉBRIQUE

par J. H. DAVENPORT

1. Introduction.

Les équations différentielles ordinaires dites « de Risch » sont très liées au problème de l'intégration formelle. En fait, le problème d'intégration $\int ge^h\,dx$ est équivalent à la résolution d'une équation de Risch $z' + h'z = g$ (l'intégrale étant alors ze^h). Risch [6] a donné un théorème et un algorithme qui résolvent les problèmes d'intégration et d'équations de Risch sur un corps $K(x,\theta_1,\ldots,\theta_n)$, où chaque θ_i est élémentairement transcendant sur $K(x,\theta_1,\ldots,\theta_{i-1})$. Malgré des remarques de Risch [7], le problème plus général, sans la condition de transcendance des θ_i, me semble être non résolu.

Le but de cet article est de résoudre un cas plus général que le cas étudié en [6] bien qu'il n'ait pas encore toute la généralité souhaitée. Plus précisément, on résoudra les mêmes problèmes sur un corps $K(x,y,\theta_1,\ldots,\theta_n)$, où y est algébrique sur $K(x)$, et chaque θ_i est élémentairement transcendant sur $K(x,y,\theta_1,\ldots,\theta_{i-1})$. Avant de pouvoir le faire il nous faudra une définition des équations de Risch et une formulation de son théorème qui se prête à généralisation.

2. Théorème de Risch.

Le théorème principal (« Main Theorem », p. 179) de [6] peut être présenté de la façon suivante (qui sera plus adaptée à nos besoins). Soient F un corps différentiel, où l'opérateur de dérivation est $'$, et K son corps de constantes (ensemble des éléments à dérivée nulle), tels que F et K soient effectifs (ce qui veut dire que sur eux, on peut calculer et trouver les factorisations). On suppose que $x \in \mathrm{F}$, avec $x' = 1$. On rappelle la définition de Risch selon laquelle θ est un *monôme* sur F si θ est transcendant sur F, $\mathrm{F}(\theta)$ a les mêmes constantes que F, et θ est un logarithme ou une exponentielle d'un élément de F.

Le problème d'intégration de F est : étant donné $f \in \mathrm{F}$, déterminer (par un nombre fini d'opérations) s'il existe (et trouver) $v_0 \in \mathrm{F}$, $v_1, .., v_m \in \bar{\mathrm{K}}\mathrm{F}$, et $c_1, \ldots, c_m \in \bar{\mathrm{K}}$ ($\bar{\mathrm{K}}$ étant la clôture algébrique de K) tels que $f = \left(v_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \log v_i\right)'$. On sait d'après les théorèmes de Liouville que, si f a une intégrale élémentaire, elle est d'une telle forme.

Le problème des équations différentielles ordinaires de Risch de F est : étant donné $f, g_1, \ldots, g_m \in \mathrm{F}$, trouver (en un nombre fini d'opérations) $h_1, \ldots, h_r \in \mathrm{F}$ et un ensemble S de $m + r$ équations linéaires sur K tels que l'équation $z' + fz = \sum_{i=1}^{m} c_i g_i$ soit satisfaite avec $z \in \mathrm{F}$ et $c_1, \ldots, c_m \in \mathrm{K}$ si et seulement si, $z = \sum_{i=1}^{r} z_i h_i$ où $z_1, \ldots, z_r \in \mathrm{K}$ et $c_1, \ldots, c_m, z_1, \ldots, z_r$ satisfont S.

PROPOSITION 1. — *Le problème d'intégration de* $\mathrm{K}(x)$ *est résolu.*
En fait, cette résolution est bien connue [6].

PROPOSITION 2. — *Le problème des équations différentielles de Risch de* $\mathrm{K}(x)$ *est résolu.*

PROPOSITION 3. — *Si les deux problèmes sont résolus pour un corps* F, *et si* θ *est un monôme sur* F, *alors le problème d'intégration est résolu sur* $\mathrm{F}(\theta)$.

PROPOSITION 4. — *Si le problème des équations différentielles ordinaires de Risch de* F *est résolu, si* θ *est un monôme sur* F *tel que le problème d'intégration est résolu pour* $\mathrm{F}(\theta)$, *alors le problème des équations différentielles de Risch est résolu pour* $\mathrm{F}(\theta)$.

Une récurrence démontre que les problèmes d'intégration et d'équations différentielles ordinaires de Risch sont résolus sur toute extension élémentairement transcendante de $\mathrm{K}(x)$ par un nombre fini de monômes. On peut aussi trouver cette présentation dans [4] chapitre 5.

3. La généralisation.

On veut traiter $K(x,y)$, où y ést algébrique sur $K(x)$. Dans cette section, on suppose que K est algébriquement clos. On remarque d'abord que si K est effectif $K(x,y)$ est effectif [5, 9]. La solution donnée par Risch est fondée sur les décompositions en éléments simples, mais si on la réexprime avec les notions de *place* et de *valuation* [1], elle se généralise assez facilement.

PROPOSITION 2'. — *Le problème des équations différentielles de Risch de* $K(xy)$ *est résolu.*

On peut réécrire l'équation sous la forme

$$dz + fz\,dx = (\Sigma\, c_i g_i)\,dx\,. \tag{1}$$

Si nous prenons une variable autre que x, soit t, les données changent, en ce sens que l'on multiplie f et les g_i par dx/dt mais la forme de l'équation n'est pas changée.

Alors, soient p une place de $K(x,y)$, t une uniformisante de p, et ν la valuation correspondante. Si l'on écrit (1) en fonction de t plutôt que de x, on trouve

$$dz + \hat{f}z\,dt = \sum c_i \hat{g}_i\,dt$$

où $\hat{f}$ et les $\hat{g}_i$ sont les nouvelles valeurs de f et des g_i, ce qui peut être écrit sous la forme

$$\frac{dz}{dt} + \hat{f}z = \Sigma c_i \hat{g}_i\,. \tag{2}$$

Soient α, β et γ les valuations de z, de $\hat{f}$ et de la partie droite de (2) respectivement (notez que notre notation a des signes négatifs par rapport à celle de Risch). α est à trouver, β est connue, et bien que γ soit inconnue, sa valeur est bornée $\gamma \geqslant \min(\nu(\hat{g}_i))$. Appelons cette borne γ'. Si α est négative, ce qui est la seule possibilité qui nous intéresse, on a $\nu(dz/dt) = \alpha - 1$. On sait aussi que $\nu(fz) = \alpha + \beta$. Il existe trois possibilités pour la valuation de la partie gauche de (2).

(i) $\alpha - 1 < \alpha + \beta$. Alors la valuation de la partie gauche de (2) est $\alpha - 1$ et on a $\alpha - 1 = \gamma \geqslant \gamma'$.

(ii) $\alpha - 1 > \alpha + \beta$. Alors la valuation de la partie gauche de (2) est $\alpha + \beta$, et on a $\alpha + \beta = \gamma \geqslant \gamma'$.

(iii) $\alpha - 1 = \alpha + \beta$. Ici, *a priori*, l'on ne connaît pas la valuation de la partie gauche. Mais, s'il n'y a pas d'annulation entre les deux termes, la valuation de la partie gauche est $\alpha + \beta$, et l'analyse du cas précédent s'applique. Alors, supposons que les valeurs de $zt^{-\alpha}$ et $\hat{f}t^{-\beta}$ dans le corps de résidus soient Z et F respectivement. L'annulation a lieu si, et seulement si $\alpha Z + ZF = 0$, c'est-à-dire $F = -\alpha$.

On déduit donc une borne

(3) $$\alpha \geqslant \min(\gamma' + 1, \gamma' - \beta, -F), \ (*)$$

où F n'apparaît que si c'est un entier, et aux places où $\beta = -1$. On voit aussi que la valuation de z n'est négative qu'aux places où l'une des β ou γ est négative. Les bornes (3) déterminent donc un diviseur D tel que (z), le diviseur de z, satisfasse $(z) \geqslant D$. L'algorithme de Coates [2, 3] nous permet de calculer une base de solutions de cette inégalité. Cette base est $(h_1, \ldots, h_r)$, et les équations pour les z_i sont déterminées par substitution d'une solution générale $z = \Sigma z_i h_i$ dans l'équation donnée.

Proposition 1′. — *Le problème d'intégration de* $K(x,y)$ *est résolu.*

Nous avons déjà donné cette résolution [3].

Les propositions 3 et 4 restent encore valables, et donc, par la même récurrence, on voit que les problèmes d'intégration et d'équations différentielles ordinaires de Risch sont résolus sur toute extension de $K(x,y)$ par un nombre fini de monômes.

4. Cas de $K(x)$.

La méthode énoncée ci-dessus est, en fait, une simplification de la méthode due à Risch, parce que le cas de l'infini n'est pas traité séparément.

(*) En fait, on peut démontrer $\alpha \geqslant \min(\max(\gamma' + 1, \gamma' - \beta), -F)$ par une considération plus détaillée.

Dans le cas de $K(x)$, il n'est pas nécessaire de supposer que K est algébriquement clos pour les raisons suivantes. Si on n'est pas dans le cas (iii), tout ce qui nous intéresse est le degré de f et des g_i, et les places auxquelles les degrés ont des valeurs déterminées peuvent être calculées en prenant des décompositions quadrat-frei, ce qui se calcule sur le corps de définition de f et des g_i sans aucune extension. Dans le troisième cas, on peut supposer qu'il serait nécessaire de factoriser, mais, en fait F est le résidu de f à la place t, et nous ne sommes intéressés que par les résidus qui sont des entiers. Or, après factorisation du dénominateur de f sur les nombres rationnels, les résidus correspondant à un facteur sont ou bien des nombres rationnels, auquel cas ils sont tous égaux et l'élément simple correspondant a la forme kp'/p, ou bien non-rationnels [8, Theorem 5.2].

Actuellement, il n'existe aucune théorie correspondante pour le cas général, et il est nécessaire de supposer K algébriquement clos. On peut espérer qu'une telle théorie sortira des travaux (non-publiés) de Trager sur les bases d'intégrité dans les anneaux des fonctions algébriques.

Il existe une autre remarque intéressante. Dans la preuve de la proposition 4 pour θ logarithmique [4, 6], les places finies sont traitées exactement comme dans le cas rationnel, mais la place à l'infini est beaucoup plus difficile. Vu le fait que l'on ne peut pas poser $\eta = 1/\theta$ et garder la nature logarithmique de l'indéterminée, cette difficulté paraît normale.

Je tiens à remercier B. M. Trager pour d'instructives discussions, et le referee pour ses bons conseils.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Chevalley, Introduction to the Theory of Algebraic Functions of one Variable, *A.M.S. Surveys*, VI (1951).

[2] J. Coates, Construction of Rational Functions on a Curve, *Proc. Cam. Phil. Soc.*, 68 (1970), 105-113.

[3] J. H. Davenport, On the Integration of Algebraic Functions, *Springer Lecture Notes in Computer Science*, 102 (1981).

[4] J. H. Davenport. *Intégration Formelle*, Rapport de Recherche IMAG, Mai 1983.

[5] J. H. Davenport and B. M. Trager, Factorization over Finitely Generated Fields. *Proc. SYMSAC* 81 (ed. P. S. Wang), A.C.M., New York, 1981.

[6] R. H. Risch. The Problem of Integration in Finite Terms, *Trans. A.M.S.*, 139 (1969), 167-189.
[7] R. H. Risch, The Solution of the Problem of Integration in Finite Terms, *Bull. A.M.S.*, 76 (1970), 605-608.
[8] B. M. Trager, Algebraic Factoring and Rational Function Integration, *Proc. SYMSAC* 76 (ed. R. D. Jenks), A.C.M., New York, 1976.
[9] B. L. van der Waerden, *Modern Algebra*, F. Ungar, New York, 1949 (trad. de Moderne Algebra 2nd ed., Springer, Berlin, 1937).

Manuscrit reçu le 23 mars 1983.

J. H. Davenport,
Emmanuel College
Cambridge (Grande-Bretagne).