ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HENRI BUCHWALTER

GILLES CASSIER

Mesures canoniques dans le problème classique des moments

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 2 (1984), p. 45-52

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_2_45_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 2 (1984), 45-52.

MESURES CANONIQUES DANS LE PROBLÈME CLASSIQUE DES MOMENTS

par H. BUCHWALTER et G. CASSIER

On sait, en consultant par exemple [1], que le problème classique des moments de Hamburger consiste, étant donnée une suite $\alpha = (\alpha_n)$, $n \in \mathbf{N}$, telle que la matrice infinie $M = [\alpha_{i+j}]$ soit de type positif, à caractériser toutes les mesures positives μ sur la droite numérique telles que $\alpha_k = \int t^k \, d\mu(t)$ pour tout k. On distingue le cas déterminé lorsque la solution μ est unique et le cas indéterminé lorsqu'elle ne l'est pas. En éliminant le cas des mesures à support fini, on se ramène à supposer que la matrice M est de type défini positif. On peut alors plonger l'espace $\mathscr{P} = \mathbf{C}[X]$ des polynômes dans chacun des espaces $L^2(\mu)$, le produit scalaire induit ne dépendant que de la suite α puisque

$$(P \mid Q) = \sum_{i,j} \alpha_{i+j} p_i \bar{q}_j \quad \text{si} \quad P = \Sigma p_i X^i \quad \text{et} \quad Q = \Sigma q_j X^j .$$

En complétant abstraitement $\mathscr{P}$ on obtient un espace de Hilbert fondamental $H = H(\alpha)$, dont une base orthonormale importante (P_k), formée de polynômes tels que $d^\circ P_k = k$, s'obtient par le procédé habituel d'orthonormalisation. Avec quelques précautions on peut identifier isométriquement H à l'adhérence $\bar{\mathscr{P}}$ de $\mathscr{P}$ dans $L^2(\mu)$.

Un cas particulier intéressant est celui où $\mathscr{P}$ est dense dans $L^2(\mu)$. On sait alors que le problème peut être déterminé ou indéterminé. S'il est indéterminé on dit que μ est une solution N-extrémale.

Les mesures m-canoniques. — En suivant [1], on introduit, à côté des mesures N-extrémales, les mesures m-canoniques pour $m \geqslant 0$, entier fini, les mesures N-extrémales correspondant au cas $m = 0$. On trouve dans [1] deux définitions possibles des mesures m-canoniques. L'une est donnée par le biais de la représentation de Nevanlinna et nécessiterait d'assez longs détours de présentation. L'autre, équivalente, est plus directement accessible. Pour l'écrire, associons à chaque mesure μ et à chaque entier $m \geqslant 0$ la mesure $d\mu_m(t) = (1+t^2)^{-m}\, d\mu(t)$. Alors en suivant [1], p. 121, on a :

DÉFINITION 1. — *Soit μ une mesure ayant des moments de tous les ordres. On dit que μ est m-canonique, avec $m \geqslant 1$, lorsque l'espace $\mathscr{P}$ est dense dans $L^2(\mu_m)$ et ne l'est pas dans $L^2(\mu_{m-1})$.*

L'objet de cet article est de fournir une caractérisation nouvelle des mesures m-canoniques, en terme de codimension, faisant clairement apparaître le défaut de densité de $\mathscr{P}$ dans l'espace $L^2(\mu)$. Le théorème essentiel est le suivant :

THÉORÈME 1 (de la codimension). — *Soit $m \geqslant 1$. Une mesure μ est m-canonique si, et seulement si, l'espace fondamental $H = \bar{\mathscr{P}}$ est exactement de codimension m dans $L^2(\mu)$.*

Ce théorème a déjà été présenté dans [3] et [4], avec une démonstration assez longue. Nous reprenons ici la question en apportant quelques éléments nouveaux, permettant des simplifications dans la preuve. Rappelons tout d'abord un résultat classique de M. Riesz, à savoir

PROPOSITION 1. — *Soit μ une mesure ayant des moments de tous les ordres. Pour que $\mathscr{P}$ soit dense dans $L^2(\mu)$, il faut et il suffit que la mesure μ_1 soit déterminée.*

Avec la définition 1 on a sans difficulté :

PROPOSITION 2. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que μ soit m-canonique est que la mesure μ_m soit N-extrémale.*

Dégageons maintenant un résultat fréquemment utile, qui n'est pas correctement explicité dans la littérature relative au problème des moments. Désignons par $\mathscr{H} = \mathscr{H}(\mathbf{C})$ l'espace de Montel des fonctions entières sur le plan complexe.

THÉORÈME 2. — *Pour qu'une mesure* μ, *ayant des moments de tous les ordres, soit indéterminée, il faut et il suffit que le disque*

$$D_2(\mu) = D_2 = \left\{ P \in \mathscr{P} ; \int |P|^2 \, d\mu \leqslant 1 \right\}$$

soit relativement compact dans l'espace $\mathscr{H}$. *Cela revient à dire que l'injection canonique* $\mathscr{P} \cap L^2(\mu) \to \mathscr{H}$ *est continue (et même compacte).*

Preuve. — *a*) Supposons μ indéterminée. Elle est alors à support infini de sorte qu'on a $\mathscr{P} \subset L^2(\mu)$. Par ailleurs la suite orthonormale polynomiale (P_k) est telle que la série $\Sigma |P_k(z)|^2$ est uniformément convergente sur tout compact K de $\mathbf{C}$. Il suit de là, par Cauchy-Schwarz, que tout $P = \Sigma a_k P_k \in D_2$ est tel que

$$\|P\|_K \leqslant C_K = \sup_{z \in K} \left[\sum_0^{\infty} |P_k(z)|^2 \right]^{1/2}$$

et ainsi D_2 est borné, donc relativement compact, dans $\mathscr{H}$.

b) Réciproquement si la propriété est satisfaite alors μ est à support infini. Pour voir que μ est indéterminée, il faut prouver que l'on a $\sum_0^{\infty} |P_k(z)|^2 < +\infty$ pour tout $z \in \mathbf{C}$, ou même pour un seul $z = z_0 \in \mathbf{C} \backslash \mathbf{R}$. Pour cela commençons par remarquer qu'il est facile de vérifier que sur le disque D_2 la topologie faible de $L^2(\mu)$ est séparée et moins fine que celle de $\mathscr{H}$, de sorte qu'elle lui est en fait identique par compacité. Pour toute suite $a = (a_k) \in \ell^2$, telle que $\|a\|_2 \leqslant 1$, la suite $S_n = \sum_0^n a_k P_k$ est de Cauchy dans $L^2(\mu)$, donc est aussi suite de Cauchy faible. Par conséquent elle est encore suite de Cauchy dans $\mathscr{H}$, donc convergente. Il suit de là que la série $\Sigma a_k P_k(z)$ est convergente pour tout $z \in \mathbf{C}$ et toute suite $a = (a_k) \in \ell^2$. Alors la suite $(P_k(z))$ est bien élément de ℓ^2, et μ est indéterminée. □

COROLLAIRE 1. — *Soit* μ *une mesure indéterminée. Alors dans l'espace* $L^2(\mu)$ *on a la décomposition en somme directe topologique (non orthogonale)*

$$H = \bar{\mathscr{P}} = \mathbf{C}1 \oplus \overline{(t-i)\mathscr{P}}.$$

Preuve. — Il suffit de remarquer que la forme linéaire $P \to P(i)$ est continue pour la norme de $L^2(\mu)$. □

COROLLAIRE 2. — *Pour toute mesure* N-*extrémale* μ, *l'injection naturelle* $L^2\mu) \to \mathscr{H}$ *est compacte.*

Avant de passer à la preuve du théorème 1, il convient de remarquer que les espaces $L^2(\mu)$ et $L^2(\mu_m)$ sont canoniquement isométriques dans l'isométrie surjective

$$J_m : L^2(\mu) \to L^2(\mu_m), \qquad g \to J_m g = (t-i)^m g.$$

Preuve du théorème 1. — *a*) Supposons μ *m*-canonique. Alors μ_m est N-extrémale donc $L^2(\mu_m) = \mathbf{C}1 \oplus \overline{(t-i)\mathscr{P}}$ topologiquement. Avec l'isométrie J_m^{-1} on a donc topologiquement

$$L^2(\mu) = \mathbf{C}\, J_m^{-1}\mathbf{1} \oplus \overline{(t-i)^{-(m-1)}\mathscr{P}}$$

d'où il résulte aisément que $\bar{\mathscr{P}}$ est de codimension m dans $L^2(\mu)$, et même que $L^2(\mu)$ est engendré algébriquement par $H = \bar{\mathscr{P}}$ et les m fonctions $(t-i)^{-k}$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

b) Réciproquement si $\bar{\mathscr{P}}$ est de codimension m dans $L^2(\mu)$, avec $m \geqslant 1$, alors μ est déjà indéterminée. De plus on a $L^2(\mu) = \bar{\mathscr{P}} \oplus L_m$, où $L_m = [\mathscr{P}]^{\perp}$ est de dimension m. Par l'isométrie J_1 on a $L^2(\mu_1) = \overline{J_1\mathscr{P}} \oplus J_1 L_m$, et de la proposition 1 on déduit que la mesure μ_1 est indéterminée. Avec le corollaire 1 du théorème 2, on voit que $\overline{J_1\mathscr{P}} = \overline{(t-i)\mathscr{P}}$ est de codimension 1 dans $\bar{\mathscr{P}}$, d'où l'on tire que $\bar{\mathscr{P}}$ est de codimension $(m-1)$ dans $L^2(\mu_1)$. Il suffit de recommencer le raisonnement pour aboutir au fait que μ_m est indéterminée et que $\bar{\mathscr{P}}$ est de codimension nulle dans $L^2(\mu_m)$, ce qui montre que μ_m est N-extrémale, donc que μ est *m*-canonique. □

Remarque. — Dans tout cela il est facile de voir que le polynôme $(t-i)^m$ peut être remplacé par n'importe quel polynôme $R(t) = (t-z_1)\ldots(t-z_m)$ avec $z_k \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$, la mesure μ_m étant alors remplacée par la mesure $d\mu_R = |R|^{-2}\,d\mu$. En particulier on obtient ainsi que si μ est *m*-canonique alors l'espace $L^2(\mu)$ est engendré algébriquement par $H = \bar{\mathscr{P}}$ et les m fonctions $[(t-z_1)\ldots(t-z_k)]^{-1}$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

En remarquant déjà que la proposition 2 implique que toute mesure *m*-canonique est à support discret, on a

PROPOSITION 3. — *Soit* μ *une mesure à support non discret, ayant des moments de tous les ordres. On a l'alternative :*

a) *ou bien* $\mathscr{P}$ *est dense dans* $L^2(\mu)$ *et* μ *est déterminée;*

b) *ou bien* $\mathscr{P}$ *est de codimension hilbertienne infinie dans* $L^2(\mu)$ *et* μ *est indéterminée.*

Exemple. — Introduisons l'espace $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbf{R})$ de Schwartz et à toute $\varphi \in \mathscr{S}$ associons la mesure $d\mu = |\varphi|^2\, dt$, qui est tributaire de l'alternative. On dichotomise ainsi l'espace $\mathscr{S}$ en deux classes $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$, et un problème intéressant serait peut-être de caractériser chacune de ces deux classes et leurs propriétés algébriques et topologiques. Ces deux classes ne sont d'ailleurs pas vides puisque $\mathscr{S}_1$ contient les fonctions de Gauss tandis que $\mathscr{S}_2$ contient la fonction $\varphi \in \mathscr{S}$ telle que $|\varphi|^2$ soit la densité de la distribution log-normale. De plus on a évidemment, pour $\psi \in \mathscr{S}$:

$$\varphi \in \mathscr{S}_1 \quad \text{et} \quad |\psi| \leqslant |\varphi| \Rightarrow \psi \in \mathscr{S}_1$$
$$\varphi \in \mathscr{S}_2 \quad \text{et} \quad |\psi| \geqslant |\varphi| \Rightarrow \psi \in \mathscr{S}_2 .$$

Perturbation de mesures m-canoniques. — On utilise maintenant le théorème 2 de la codimension pour généraliser au cas des mesures *m*-canoniques des résultats de perturbation donnés dans [2] pour le cas des mesures N-extrémales. Donnons tout d'abord deux lemmes dont le premier n'est autre que le lemme 2 de [2] :

LEMME 1. — *Soit* μ *une mesure déterminée. Pour tout* $a > 0$ *et tout* $x \in \mathbf{R}$ *tel que* $\mu(\{x\}) = 0$, *on pose* $\lambda = \mu + a\delta_x$. *Alors* $\mathscr{P}$ *est dense dans l'espace* $L^2(\lambda)$.

Preuve. — Donnons une preuve différente de celle de [2], intéressante par elle-même. Soit $g \in L^2(\lambda)$, orthogonale à $\mathscr{P}$. Pour tout $P \in \mathscr{P}$ on a donc

$$ag(x)\overline{P(x)} = -\int g\bar{P}\, d\mu = -(g\,|\,P)_{L^2(\mu)}.$$

Si l'on suppose $g(x) \neq 0$, alors on voit avec la base orthonormale (P_k), que la suite $(P_k(x))$ est élément de ℓ^2. Il suit classiquement de là que l'opérateur auto-adjoint T, égal à la multiplication par t sur $L^2(\mu)$, admet la valeur propre x. On a donc $\mu(\{x\}) > 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi $g(x) = 0$ et g est orthogonale à $\mathscr{P}$ dans $L^2(\mu)$, donc $g = 0$ dans $L^2(\mu)$, et par suite $g = 0$ dans $L^2(\lambda)$. □

LEMME 2. — *Soit* μ *une mesure indéterminée et* $\lambda = \mu + a\,\delta_x$, *avec* $a > 0$ *et* $x \notin \operatorname{supp}\mu$. *Alors la mesure* λ_1 *est indéterminée.*

Preuve. — On applique le critère du théorème 2 et soit $P \in D_2(\lambda_1)$.

Posons $P = P(x) + (t-x)Q(t)$ et remarquons que

$$(t-x)^2|Q|^2 \leqslant 2[|P|^2 + |P(x)|^2]$$

d'où l'on déduit

$$\int \frac{(t-x)^2|Q|^2}{1+t^2}\,d\mu(t) \leqslant 2\left[\int \frac{|P|^2\,d\mu}{1+t^2} + |P(x)|^2 \int \frac{d\mu}{1+t^2}\right] \leqslant C_1$$

où C_1 est une constante indépendante de $P \in D_2(\lambda_1)$. Par ailleurs la condition $x \notin \operatorname{supp}\mu$ garantit l'existence d'une constante $k > 0$ telle que $(t-x)^2 \geqslant k(1+t^2)$ μ-presque partout, d'où il suit que l'on a $\int |Q|^2\,d\mu \leqslant C_2$, avec une constante C_2 convenable. Mais μ étant indéterminée, l'ensemble des polynômes Q est borné dans l'espace $\mathscr{H}$, et comme $P \in D_2(\lambda_1)$ implique $a|P(x)|^2 \leqslant 1 + x^2$, on voit que le disque $D_2(\lambda_1)$ est aussi borné dans $\mathscr{H}$, ce qui suffit. □

On tire de là un premier résultat de perturbation additive relatif aux mesures N-extrémales.

THÉORÈME 3. — *Soit* μ *une mesure ayant des moments de tous les ordres et* $\lambda = \mu + a\,\delta_x$ *avec* $a > 0$ *et* $\mu(\{x\}) = 0$. *On a les équivalences :*

a) μ *est* N-*extrémale ;*

b) λ *est* 1-*canonique.*

Preuve. — Si μ est N-extrémale, elle est indéterminée et à support discret donc $x \notin \operatorname{supp}\mu$. Par le lemme 2 la mesure λ_1 est indéterminée, et μ_1 est indéterminée par la proposition 1, donc $\lambda_1 = \mu_1 + b\,\delta_x$, avec $b = a(1+x^2)^{-1}$, est telle que $\mathscr{P}$ soit dense dans $L^2(\lambda_1)$ par le lemme 1. Ainsi λ_1 est N-extrémale.

Réciproquement supposons que λ_1 soit N-extrémale. Alors μ_1 est déterminée par le théorème 7 de [2]. De plus μ est indéterminée, car dans le cas contraire, $\mathscr{P}$ serait dense dans $L^2(\lambda)$ par le lemme 1, ce qui est absurde d'après le théorème 2 de la codimension puisque λ est 1-canonique. Ainsi μ est N-extrémale d'après la proposition 1. □

Par itération on déduit aisément du théorème 3 l'énoncé plus général.

PROPOSITION 4. — *Soit* μ *une mesure ayant des moments de tous les ordres,* $m \geqslant 1$ *un entier,* $x_1, \ldots, x_m$ *des points distincts de* $\mathbf{R}$ *n'appartenant pas au support de* μ, *et* $a_1, \ldots, a_m$ *des constantes strictement positives. On a alors les équivalences :*

a) μ *est* N-*extrémale;*

b) $\lambda = \mu + \sum_{k=1}^{m} a_k \delta_{x_k}$ *est* *m-canonique.*

Comme conséquence on en tire deux résultats généraux de perturbation figurant déjà dans [3] et [4].

THÉORÈME 4 (de soustraction). — *Soit* μ *une mesure* *m-canonique, avec* $m \geqslant 0$. *Pour toute partie finie* J *du support de* μ, *de cardinal* $n(\mathrm{J})$, *on note* ν_{J} *la mesure* $\mu - \mu|_{\mathrm{J}}$. *On a alors les deux cas :*

a) si $n(\mathrm{J}) \leqslant m$, *la mesure* ν_{J} *est* *m'-canonique avec* $m' = m - n(\mathrm{J})$;

b) si $n(\mathrm{J}) > m$, *la mesure* ν_{J} *est déterminée.*

THÉORÈME 5 (de perturbation). — *Soit* μ *une mesure* *m-canonique, avec* $m \geqslant 0$. *Pour toute partie finie* J *du support de* μ, *de cardinal* $n(\mathrm{J})$, *et pour toute mesure* τ *à support fini* $\mathrm{S}(\tau)$ *disjoint du support de* ν_{J} *et de même cardinal* $n(\mathrm{J})$, *la mesure perturbée* $\lambda = \nu_{\mathrm{J}} + \tau$ *est encore* *m-canonique.*

Application. Réponse à une question de Diaconis. — L'intérêt des théorèmes de perturbation, issus du théorème de la codimension, apparaît clairement dans la construction de contre-exemples répondant à une question de Diaconis : existe-t-il des mesures déterminées μ et ν dont le produit de convolution $\mu * \nu$ soit une mesure indéterminée ? Une réponse plus générale est fournie ci-dessous. Avant de l'énoncer rappelons qu'on désigne par $\mu \square \nu$ le produit de convolution multiplicatif, image de la mesure $\mu \otimes \nu$ par l'application produit $(s,t) \to st$, et telle que le n-ième moment de $\mu \square \nu$ soit égal au produit des n-ièmes moments de μ et ν.

PROPOSITION 5. — *Pour tout entier* $m \geqslant 0$ *il existe une mesure* μ, *déterminée et à support discret, et une mesure* ν *à support fini, telles que le produit de convolution* $\lambda = \mu * \nu$ *(resp. le produit de convolution multiplicatif* $\lambda = \mu \square \nu$) *soit une mesure indéterminée telle que l'espace* $\bar{\mathcal{P}}$ *soit de codimension hilbertienne* $\geqslant m$ *(éventuellement infinie) dans l'espace* $\mathrm{L}^2(\lambda)$.

Preuve. — Fixons une mesure m-canonique $\rho = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \delta_{x_k}$. Par le théorème 4 la mesure $\mu = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \, \delta_{x_k}$ est déterminée et à support discret et on peut supposer $x_{m+1} \neq 0$. La mesure

$$\nu = \delta_1 + \sum_{k=0}^{m} \frac{a_r}{a_{m+1}} \delta_{x_r/x_{m+1}}$$

est telle que $\lambda = \mu \,\square\, \nu \geqslant \rho$, d'où l'on tire $\lambda_m \geqslant \rho_m$. On sait que ρ_m est N-extrémale, donc indéterminée, ce qui implique que λ_m est indéterminée elle aussi par le théorème 2. Il est alors facile de voir que $\bar{\mathcal{P}}$ est de codimension q dans $L^2(\lambda)$, avec $m \leqslant q \leqslant +\infty$, et bien entendu λ est indéterminée. Pour le produit de convolution ordinaire $*$, il suffit de reprendre le même raisonnement avec la mesure

$$\nu = \delta_0 + \sum_{k=0}^{m} \frac{a_r}{a_{m+1}} \delta_{x_r - x_{m+1}}. \qquad \square$$

Ajouté à la correction des épreuves :

Depuis le 5 Juillet 1983, les auteurs ont eu connaissance d'un résultat de C. Berg, à paraître aux *Proc. Amer. Math. Soc.*, répondant négativement à la question de Diaconis, en donnant l'exemple d'une mesure déterminée μ telle que la mesure $\mu \star \mu$ soit indéterminée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. I. Akhiezer, *The classical moment problem*, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1965.

[2] C. Berg et J. P. R. Christensen, Density questions in the classical theory of moments, *Ann. Inst. Fourier*, 31-3 (1981), 99-114.

[3] G. Cassier, Mesures canoniques dans le problème classique des moments, *C.R.A.S.*, Paris, Série I, 296 (1983), 717-719.

[4] G. Cassier, Problème des moments n-dimensionnels, mesures quasi-spectrales et semi-groupes, Thèse 3e Cycle, Lyon (1983), 1-118.

Manuscrit reçu le 9 mars 1983
révisé le 5 juillet 1983.

H. Buchwalter et G. Cassier,
Laboratoire d'Analyse Fonctionnelle
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard - Lyon 1
69622 Villeurbanne Cedex.