ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANCISCO DIAZ Y DIAZ

Valeurs minima du discriminant pour certains types de corps de degré 7

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 3 (1984), p. 29-38

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_3_29_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 3 (1984), 29-38

VALEURS MINIMA DU DISCRIMINANT POUR CERTAINS TYPES DE CORPS DE DEGRÉ 7

par Francisco DIAZ y DIAZ

Nous avons décrit dans [2] les méthodes analytiques et de la géométrie des nombres justifiant les calculs qui nous ont conduit à la détermination des 4 premiers minima de la valeur absolue du discriminant des corps de nombres de degré 7 qui ont une seule place réelle.

Dans la première partie de ce travail nous utilisons les mêmes méthodes pour caractériser les 6 premiers minima du discriminant des corps de nombres de degré 7 avec 3 places réelles. Nous avons choisi d'être plus explicite sur les détails des calculs en faisant des renvois fréquents à nos références en ce qui concerne les considérations théoriques utilisées.

Dans la seconde partie nous montrons comment l'acceptation de la validité de l'hypothèse de Riemann généralisée pour la fonction zêta de Dedekind des corps de nombres de degré 7 ayant $r_1 = 1$ ou $r_1 = 3$ places réelles permet d'élargir la liste des petits discriminants (en valeur absolue) pour les deux types de corps considérés. Nous arrivons à la conclusion que les tables de corps euclidiens de Lenstra [3] pour $n = 7$, $r_1 = 1$ et de Leutbecher et Martinet [4] pour $n = 7$, $r_1 = 3$ contiennent, vraisemblablement, tous les corps de nombres dont le discriminant est plus petit, en valeur absolue, que 222 771 si l'on a $r_1 = 1$ et plus petit que 813 081 si l'on a $r_1 = 3$.

Nous remercions J. Martinet dont les nombreuses suggestions nous ont aidé à mener à bien ce travail.

1. Résultats inconditionnels.

Dans toute cette partie K désignera un corps de nombres de degré 7 avec $r_1 = 3$ places réelles et ρ un entier non rationnel de K dont $P(x) = x^7 + a_1 x^6 + \ldots + a_7$ sera le polynôme minimal. Les conjugués de ρ seront notés $\rho_i (i = 1, \ldots, 7)$, étant entendu que l'on choisira ρ_1, ρ_2 et ρ_3 réels et ρ_i et ρ_{i+2} complexes conjugués pour $i = 4, 5$. On utilisera aussi les fonctions symétriques $S_m = S_m(\rho) = \sum_{i=1}^{7} \rho_i^m$ et les expressions $T_m(\rho) = \sum_{i=1}^{7} |\rho_i|^m$ pour $m \in \mathbf{Z}$, $m \neq 0$. Finalement, on écrira $N(\rho) = N_{K/\mathbf{Q}}(\rho)$ pour désigner la norme absolue de l'entier ρ.

On trouve dans la table 3 de [1] que le discriminant du corps K doit être plus grand que 509 280 ; cette minoration, calculée par la méthode d'Odlyzko-Poitou-Serre [6], peut être améliorée si l'on tient compte de la contribution des "corrections locales" [6] correspondant aux petits nombres premiers. Dans le tableau suivant on a calculé des minorations pour le discriminant d'un corps K sous l'hypothèse que ce corps contient un idéal premier qui a la norme indiquée.

Tableau 1

Normes	Minorations
2	1 703 784
4	972 416
8 et 16	678 876
3	1 211 544
9,9 et 27	769 816
5	833 064
7	682 829
9 et 11	706 425

Leutbecher et Martinet [4] ont prouvé l'existence de nombreux corps euclidiens pour des valeurs du degré et de la signature dont aucun exemple n'était connu auparavant ; on trouve dans ce travail, en particulier, une table de 24 corps euclidiens de degré 7 ayant 3 places réelles. Nous nous proposons de démontrer que cette table contient tous les corps K dont le discriminant est plus petit que 678 876.

Le Théorème de Hunter-Pohst tel qu'il a été énoncé dans [2] permet d'affirmer que dans tout corps K de discriminant plus petit que 678 876 existe un entier non rationnel ρ pour lequel on a les inégalités: $0 \leqslant S_1 \leqslant 3$ et $7 \leqslant T_2(\rho) < 12{,}574$; de la dernière de ces inégalités et de l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique, on déduit l'inégalité :

$$|N(\rho)| \leqslant (T_2(\rho)/7)^{7/2} < 7{,}77 < 9,$$

ce qui entraîne $|N(\rho)| = 1$ d'après les minorations du tableau 1.

La valeur absolue de la norme des entiers $1 + \rho$ et $1 - \rho$ peut être majorée en utilisant une nouvelle fois l'inégalité entre moyennes et les identités $T_2(1 \pm \rho) = 7 \pm 2S_1 + T_2(\rho)$. Les majorations ainsi obtenues sont indiquées, pour chaque valeur de S_1, dans le tableau suivant :

Tableau 2

$S_1 =$	0	1	2	3
$\lvert P(1)\rvert \leqslant$	36	25	16	10
$\lvert P(-1)\rvert \leqslant$	36	51	70	93

En remarquant maintenant que P(0) et P(1) sont dans tous les cas plus petits que 2^7, on déduit que le polynôme minimal de l'entier ρ est irréductible mod. 2.

Pour pouvoir caractériser tous les coefficients de $P(x)$, d'autres inégalités sont nécessaires ; celles-ci seront trouvées au moyen du Théorème 4 de [5] qui indique comment calculer des majorations pour les expressions $T_m(\rho)$, $m \in \mathbf{Z}$, $m \neq 0,2$. Les résultats de ces calculs, pour les valeurs de m utilisées par la suite, sont indiqués dans le tableau 3 ; on y a distingué deux cas selon que la plus grande contribution à la majoration provient d'une racine réelle (colone R) ou d'un couple de racines complexes conjuguées (colonne C).

Il est clair que, pour toute valeur de m, on doit avoir $-T_m \leqslant S_m \leqslant T_m$. Pour m pair, on peut améliorer la borne inférieure en considérant la majoration de T_m indiquée dans la colonne C du tableau 3 et en gardant celle de la colonne R comme borne supérieure ; c'est ce qui a été fait pour m pair à

Tableau 3

m	R	C
-2	87,1	21,3
-1	13,4	9,4
2	12,8	12,8
3	27,8	24,1
4	72,9	50,9
5	204,8	111,2
6	586,9	246,4
7	1 693,0	548,2

l'exception de $m = -2$, où la borne inférieure pour S_{-2} a été calculée en cherchant, par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, les extrema de la fonction

$$F(x_1, \ldots, x_5) = x_1^{-2} + x_2^{-2} + x_3^{-2} - 2x_4^{-2} - 2x_5^{-2}$$

liés par les relations

$$x_1 x_2 x_3 x_4^2 x_5^2 = 1 \quad \text{et} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_5^2 \leqslant 12{,}574$$

et les conditions $x_i > 0$ pour $i = 1, \ldots, 5$. On obtient ainsi les encadrements suivants :

Tableau 4

-18	$\leqslant$	S_{-2}	$\leqslant$	87
-13	$\leqslant$	S_{-1}	$\leqslant$	13
0	$\leqslant$	S_1	$\leqslant$	3
-12	$\leqslant$	S_2	$\leqslant$	12
-27	$\leqslant$	S_3	$\leqslant$	27
-50	$\leqslant$	S_4	$\leqslant$	72
-204	$\leqslant$	S_5	$\leqslant$	204
-246	$\leqslant$	S_6	$\leqslant$	586
$-1\,692$	$\leqslant$	S_7	$\leqslant$	1 692

Nous indiquons maintenant brièvement les différents critères utilisés pour simplifier les calculs dans la détermination de tous les corps K de discriminant plus petit que 678 876. On fixe d'abord la valeur de $a_1 = -S_1$, puis celle de $a_7 = \pm 1$ (on prend $a_7 = 1$ pour $a_1 = 0$); on choisit alors P(1) et P(−1) en tenant compte des résultats des tableaux 1 et 2. Finalement, on fait varier S_2, S_3 et S_4 à l'intérieur des intervalles décrits dans le tableau 4, ces valeurs étant choisies de telle manière que dans les relations $S_r = -ra_r - \sum_{i=1}^{r-1} a_i S_{r-i}$ les coefficients a_r obtenus soient des entiers pour $r = 2, 3, 4$.

Le polynôme $P(x)$ étant maintenant entièrement déterminé, on s'assure qu'il est irréductible mod. 2 et, si c'est le cas, on calcule S_{-2}, S_{-1}, S_5, S_6 et S_7 pour vérifier que ces valeurs se trouvent dans les intervalles correspondants du tableau 4. On cherche ensuite les racines réelles de $P(x)$ et, s'il y en a trois, on utilise le lemme suivant qui permet d'éviter provisoirement le calcul des racines complexes :

LEMME. – *Si l'on a* $4(|\rho_1 \rho_2 \rho_3|)^{-1/2} + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 > 12{,}574$ *on a aussi* $T_2(\rho) > 12{,}574$.

En effet, on a, en notant N_1 et N_2 les normes des racines complexes : $\frac{1}{2}(N_1 + N_2) > \sqrt{N_1 N_2} = (|\rho_1 \rho_2 \rho_3|)^{-1/2}$.

L'intérêt pratique de cette démarche a été déjà remarqué par Pohst dans [5].

Pour les polynômes ayant passé ces différents tests, on calcule le discriminant D_P et le discriminant D du corps engendré par une de ses racines, ce qui revient à écrire D_P sous la forme $D_P = a^2 D$; on s'intéresse seulement au cas où la valeur de D ainsi obtenue est comprise entre 509 280 et 678 876.

Un théorème de Dedekind, que l'on trouve dans [5] sous une version de H. Zassenhaus, permet de caractériser les nombres premiers qui divisent a. Dans la plupart des cas traités ici, l'utilisation de ce théorème nous a permis soit de déterminer entièrement la valeur de D, soit d'éliminer le polynôme en question si cette valeur devait être plus grande que 678 876. Dans 29 cas seulement la valeur de D est restée douteuse ; après avoir fait l'étude de la ramification au moyen du polygone de Newton, nous avons éliminé 26 de ces cas douteux et les 3 cas qui restaient ont été éliminés par un calcul explicite d'une base d'entiers du corps correspondant.

Pour les 6 valeurs de D dans l'intervalle $509\,280 < D < 678\,876$ nous avons vérifié que tous les polynômes correspondant à un même discriminant engendraient le même corps à isomorphisme près. Dans le tableau suivant nous indiquons le nombre de polynômes trouvés pour chaque discriminant et les coefficients de l'un d'entre eux :

Tableau 5

D	nombre de polynômes	Polynôme générateur a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
612 233	22	−1	−1	−1	0	1	1	1
612 569	23	0	0	3	−1	−3	0	1
640 681	24	−1	−2	2	0	−2	2	1
649 177	27	0	−3	0	1	0	1	1
661 033	24	0	−2	−1	0	0	2	1
674 057	23	0	0	0	−4	0	3	1

Dans ces conditions nous pouvons énoncer :

THEOREME. — *Parmi les corps de degré 7 ayant exactement 3 places réelles, il y a, à isomorphisme près, 6 corps de discriminant* $\leqslant 678\,876$. *Les discriminants de ces corps sont* : 612 233, 612 569, 640 681, 649 177, 661 033 et 674 057.

Remarque. — Les polynômes ci-dessus ont été choisis parce qu'ils ont de petits coefficients et deux d'entre eux sont ceux de [4], p. 121 ; voici les transformations faisant passer d'une racine x de nos polynômes à la racine correspondante $y = b_0 x^6 + b_1 x^5 + \ldots + b_6$ des polynômes donnés en [4] dans les 4 cas restants :

Tableau 6

D	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
612 233	−1	1	1	0	0	0	0
612 569	−2	−2	−1	−7	−5	5	4
661 033	0	1	0	−1	0	−1	−1
674 057	1	0	0	0	−4	0	3

2. Conjectures.

Dans toute cette partie nous acceptons la validité de l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH) pour la fonction zêta de Dedekind du corps K.

2.1. $r_1 = 1$

Supposons que le corps K, de degré 7, a une seule place réelle. On a montré dans [2] que les 4 premiers minima de la valeur absolue du discriminant pour ce type de corps sont : 184 607, 193 327, 193 607 et 196 127. Or, les tables de corps euclidiens du type $n = 7$, $r_1 = 1$ de Lenstra [3] et de Leutbecher et Martinet [4], contiennent 32 autres corps et nous nous proposons de montrer que si l'on accepte GRH il est vraisemblable que la table 8 de Lenstra contient les 6 minima suivants de la valeur absolue du discriminant.

En effet, l'utilisation des "corrections locales" ([6]) dans la méthode de minoration de discriminants d'Odlyzko-Poitou-Serre permet d'établir, sous GRH, le tableau de minorations suivant qui est l'analogue du tableau 1 de la première partie de ce travail et que l'on doit comparer au tableau correspondant de [2] :

Tableau 7

Normes	Minoration
2	579 112
4	331 459
8 et 16	222 771
3	412 577
5	284 995
7	231 948

Par conséquent, si le corps K a un discriminant dont la valeur absolue est plus petite que 222 771 on déduit, sous GRH, qu'il y a dans K un seul idéal premier au-dessus de 2 et que cet idéal est de degré 7.

Pour un corps K de discriminant $D_K > -222\,771$, le Théorème de Hunter-Pohst [2] affirme que l'extension $K/\mathbf{Q}$ est engendrée par un entier ρ pour lequel on a $T_2(\rho) < 10{,}6607$ et il résulte de l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique, des minorations du tableau 7 et des majorations que l'on obtient pour $|P(1)|$ et $|P(-1)|$ (cf. [2]), que ρ est une unité de K dont le polynôme minimal est irréductible mod. 2.

L'étude des unités de polynôme minimal irréductible mod. 2 a été faite dans [2] et il semble raisonnable d'espérer que parmi les discriminants obtenus dans l'intervalle $-222\,771 < D_K < -196\,127$ se trouvent tous les minima suivants de la valeur absolue du discriminant des corps K ; ceci nous conduit à énoncer la conjecture suivante :

CONJECTURE 1. – *Les* 10 *premiers minima de la valeur absolue du discriminant des corps de degré* 7 *ayant une seule place réelle sont* : 184 607, 193 327, 193 607, 196 127, 199 559, 201 671, 202 471, 207 911, 211 831 *et* 214 607. *Dans chaque cas il y a un seul corps, à isomorphisme près, ayant ce discriminant.*

Tous les corps ci-dessus sont euclidiens et se trouvent dans la table de Lenstra [3].

A l'appui de cette conjecture, nous donnons les raisons suivantes :

1. – La validité de GRH entraîne, comme nous l'avons déjà indiqué, que tout corps de discriminant $D_K > -222\,771$ est engendré par une unité de polynôme minimal irréductible mod. 2. Les seuls corps que nous n'avons pas trouvés (par les calculs décrits dans [2]) parmi ceux qui figurent dans les tables de Lenstra ([3]) et de Leutbecher et Martinet ([4]) sont ceux de discriminant $-242\,147$, $-242\,971$, $-267\,347$, $-289\,987$ et $-396\,259$. On vérifie facilement à l'aide des polynômes donnés dans ces tables que pour ces 5 corps il y a plus d'un idéal premier au-dessus de 2.

2. – Les majorations trouvées dans [2] pour $|P(1)|$, $|P(-1)|$, S_1, $|S_2|$, $|S_3|$ et $|S_4|$, obtenues par l'utilisation du Théorème de Pohst ([2], [5]), avec $T_2(\rho) < 10{,}4638$, ne tiennent compte ni du signe des racines ni de la distance entre ces racines. En même temps, pour un certain nombre de polynômes obtenus à partir de ces majorations on a $T_2(\rho) > 10{,}4638$.

3. – Pour chacun de ces 10 corps il y a au moins un polynôme pour lequel la valeur de $T_2(\rho)$ calculée d'après ses racines ne dépasse pas 9 et il semble raisonnable de supposer que $T_2(\rho)$ ne dépasse pas 10,4638 pour les corps de discriminant $D > -222\,771$.

4. – Le nombre de polynômes trouvés pour un même corps est du même ordre de grandeur pour les 4 minima connus et les 6 minima suivants conjecturés : 23 polynômes pour $-199\,559$, 29 pour

$-201\,671$, 25 pour $-202\,471$, 25 pour $-207\,911$, 26 pour $-211\,831$ et 25 pour $-214\,607$.

2.2. $r_1 = 3$

Le raisonnement précédent s'applique aussi aux corps de degré 7 et $r_1 = 3$. On obtient, sous GRH, les minorations suivantes pour le discriminant :

Tableau 8

Normes	Minoration
2	2 063 428
4	1 178 343
8 et 16	813 081
3	1 468 368
9,9 et 27	964 672
5	1 009 380
7	819 988
9 et 11	865 012

Le Théorème de Hunter-Pohst, déjà cité, montre que tout corps de discriminant plus petit que 813 081 est engendré par un entier ρ pour lequel on a $T_2(\rho) < 12{,}92$ et on démontre encore que ρ est une unité de polynôme minimal irréductible mod. 2.

La conjecture correspondante pour ce type de corps s'énonce :

CONJECTURE 2. — *La table 3 de Leutbecher et Martinet* ([4]) *contient tous les corps de degré 7 de discriminant plus petit que* 813 081. *Dans chaque cas, il y a un seul corps, à isomorphisme près, ayant ce discriminant.*

Les trois premiers arguments avancés pour justifier la conjecture 1 restent valables pour la conjecture 2 car $T_2(\rho)$ est plus petit que 10 pour au moins un générateur de chaque corps. Ainsi, nous n'avons qu'à commenter notre quatrième argument. La différence principale par rapport au cas $r_1 = 1$ consiste en ceci : nous avons gardé seulement les polynômes qui après avoir passé les tests décrits dans la première partie de ce travail ont un discriminant D_P qui s'écrit sous la forme $D_P = a^2 D_K$ avec

$0 < a < 13$, lorsque la valeur de D_K est comprise entre 678 876 et 813 081. L'effet produit par cette sélection est une diminution sensible du nombre de polynômes qui engendrent des corps de discriminant $\geqslant 678\,876$, nombre qui varie de 9 pour le corps de discriminant 765 529 à 18 pour le corps de discriminant 696 401.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. DIAZ y DIAZ, Tables minorant la racine n-ième du discriminant d'un corps de degré n, *Publ. Math. d'Orsay*, 80-06 (1980).

[2] F. DIAZ y DIAZ, Valeurs minima du discriminant des corps de degré 7 ayant une seule place réelle, *C.R.A.S.*, Paris, t. 296 (1983), 137-139.

[3] H.W. LENSTRA, Jr., Euclidean Number Fields of Large Degree, *Invent. Math.*, 38 (1977), 237-254.

[4] A. LEUTBECHER and J. MARTINET, Lenstra's constant and Euclidean number fields, *Astérisque*, 94 (1982), 87-131.

[5] M. POHST, On the Computation of Number Fields of Small Discriminants Including the Minimum Discriminants of Sixth Degree Fields, *J. Number Th.*, 14 (1982), 99-117.

[6] G. POITOU, Sur les petits discriminants, Sém. Delange-Pisot-Poitou (Théorie des Nombres), 18 ième année, 1976/1977, n° 6, 18 p.

Manuscrit reçu le 28 novembre 1983.

Francisco DIAZ Y DIAZ,
Université de Paris-Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France).