ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PHILIPPE TCHAMITCHIAN

Généralisation des algèbres de Beurling

Annales de l'institut Fourier, tome 34, n° 4 (1984), p. 151-168
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_4_151_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
34, 4 (1984), 151-168.

GÉNÉRALISATION DES ALGÈBRES DE BEURLING

par Philippe TCHAMITCHIAN

Une propriété évidente de l'espace $L^2(\mathbf{R}^n)$ est la traduction fonctionnelle du pavage de $\mathbf{R}^n$ par les cubes $Q+k$, $k \in \mathbf{Z}^n$ (Q est le cube $0 \leqslant x_j < 1$). A savoir $L^2(\mathbf{R}^n) = \ell^2(\mathbf{Z}^n, L^2(Q))$.

En fait, cette propriété s'étend aux espaces de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^n)$, mais il faut alors découper plus doucement $f \in H^s(\mathbf{R}^n)$. Il existe $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ telle que la norme de f dans $H^s(\mathbf{R}^n)$ soit équivalente à la norme ℓ^2 de la suite $\|f(x)\varphi(x-k)\|_{H^s(\mathbf{R}^n)}$.

On généralise cette propriété en définissant les puzzles-ℓ^2. Pour cela, on suppose donnés un espace fonctionnel Φ', au sens de Gel'fand, Shilov et Vilenkin (voir [4]), et un sous-espace E, muni d'une norme invariante par translation, dont la topologie est plus fine que celle induite par Φ'. E sera toujours un espace de Banach.

DÉFINITION 0.1. — E *est un puzzle-*ℓ^2 *s'il existe* $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ *telle que*

(1) $\forall f \in E, \quad \varphi(x)f(x) \in E$,

(2) *il existe une constante* $C > 1$ *telle que*

$$\frac{1}{C}\|f\|_E^2 \leqslant \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \|f(x)\varphi(x-k)\|_E^2 \leqslant C\|f\|_E^2.$$

L'intérêt de la notion de puzzle-ℓ^2 réside dans la caractérisation des multiplicateurs ponctuels qu'on peut en tirer.

PROPOSITION 0.1. — *Soit* E *un puzzle-*ℓ^2. *Il y a équivalence entre*

(3) $m : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ *est un multiplicateur de* E, *c'est-à-dire que, si* $f \in E$, *alors* $m(x)f(x) \in E$, *et* $\|m(x)f(x)\|_E \leqslant C\|f\|_E$.

(4) *$m : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ est un multiplicateur local uniforme de E, c'est-à-dire que pour tout compact $\mathrm{K} \subset \mathbf{R}^n$, d'intérieur non vide, il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que, si $f \in \mathrm{E}$ et $\operatorname{Supp} f \subset \mathrm{K}$, alors $x \to m(x-t)f(x) \in \mathrm{E}$ et $\|m(x-t)f(x)\|_{\mathrm{E}} \leqslant \mathrm{C}\|f\|_{\mathrm{E}}$, quel que soit $t \in \mathbf{R}^n$.*

On démontrera ce résultat plus loin (§ 2).

Parmi les espaces de Hilbert

$$\mathrm{A}_\omega = \left\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n) / \int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \omega(\xi)\, d\xi < +\infty \right\},$$

certains sont des algèbres lorsque la multiplication est le produit ponctuel (ω étant un poids, c'est-à-dire une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $[0, +\infty[$ localement intégrable). L'objectif de cet article est alors de savoir quand ces algèbres sont des puzzles-ℓ^2 $\left(\text{comme les algèbres de Sobolev } \mathrm{H}^s(\mathbf{R}^n),\ s > \frac{n}{2}\right)$. Le résultat obtenu est le suivant :

THÉORÈME 0.1. — *Soit ω un poids tel que l'espace A_ω soit une algèbre (pour le produit ponctuel). Alors, les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(5) *A_ω est un puzzle-ℓ^2*

(6) *les multiplicateurs de A_ω sont exactement les multiplicateurs locaux uniformes*

(7) $\dfrac{\log \omega(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$.

Les premiers résultats dans cette direction viennent de l'article de Beurling intitulé « Construction and analysis of some convolution algebras », paru en 1964 ([1]). Beurling faisait les hypothèses suivantes sur ω :

(8) $\dfrac{1}{\omega} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$

(9) $\omega(\xi+\eta) \leqslant \mathrm{C}\omega(\xi)\omega(\eta)$

(10) $\dfrac{1}{\omega} * \dfrac{1}{\omega} \leqslant \dfrac{\mathrm{C}}{\omega}$

(11) $\omega(\xi) \leqslant \mathrm{C}(1+|\xi|^2)^{\mathrm{N}}$, où $\mathrm{N} > 0$.

C'est l'hypothèse (10), comme on le verra plus loin, qui implique que A_ω soit une algèbre, tandis que l'ensemble des hypothèses entraîne les propriétés (5) et (6) (voir [1] et [3]). L'espace A_ω, lorsque ω satisfait aux conditions (8) à (11), est appelé algèbre de Beurling. Les exemples les plus connus sont les algèbres $H^s(\mathbf{R}^n)$, où $s > \frac{n}{2}\cdot$ On peut aussi prendre

$\omega(\xi) = (1+\xi_1^2)^{a_1} \dots (1+\xi_n^2)^{a_n}$ où $a_i > \frac{1}{2}$ pour tout i.

Le théorème 0.1 est-il une généralisation effective des résultats de Beurling ? C'est-à-dire, y a-t-il d'autres algèbres que celles de Beurling qui rentrent de manière significative dans le cadre du théorème 0.1 ? La réponse, positive, est donnée dans le paragraphe qui suit. Nous démontrerons ensuite le théorème.

1. Structure d'algèbre des espaces A_ω : discussion des conditions de Beurling.

On peut alléger les conditions (8) à (11) de Beurling grâce à la

PROPOSITION 1.1. — *a) Soit* ω *un poids tel que* A_ω *ait une structure d'algèbre. Alors,* ω *vérifie* (8) *et* (9).

b) Soit ω *un poids vérifiant* (10). *Alors,* A_ω *est une algèbre.*

Pour démontrer (8), on remarque que si A_ω est une algèbre, la forme multiplicative $f \to f(0)$ est continue, de sorte qu'on peut écrire $|f(0)| \leqslant C\|f\|_{A_\omega}$ (voir [7]), c'est-à-dire

$$(12) \qquad \left|\int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\xi)\, d\xi\right| \leqslant C\left(\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \omega(\xi)\, d\xi\right)^{1/2}.$$

Mettant $L^2(\omega(\xi)\, d\xi)$ et $L^2\left(\frac{1}{\omega(\xi)}\, d\xi\right)$ en dualité, on voit que (12) exprime que $1 \in L^2\left(\frac{1}{\omega(\xi)}\, d\xi\right)$, ce qui veut dire $\frac{1}{\omega} \in L^1(\mathbf{R}^n)$.

Pour prouver (9), il suffit, partant de $\|fg\|_{A_\omega} \leqslant C\|f\|_{A_\omega}\|g\|_{A_\omega}$, de faire tendre $|\hat{f}|^2$ et $|\hat{g}|^2$ vers les masses de Dirac δ_ξ et δ_η.

Enfin, pour pouver *b*), on considère $f, g \in A_\omega$, et $h = fg$. On commence par écrire

$$\hat{h}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\xi-\eta)\hat{g}(\eta)\, d\eta\,,$$

puis on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz de la façon suivante :

$$|\hat{h}(\xi)|^2 \leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{\omega(\xi-\eta)}\,\frac{1}{\omega(\eta)}\, d\eta\right)\left(\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi-\eta)|^2|\hat{g}(\eta)|^2\omega(\xi-\eta)\omega(\eta)\, d\eta\right)\cdot$$

On en déduit facilement, à partir de (10), que

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{h}(\xi)|^2\omega(\xi)\, d\xi \leqslant \mathrm{C}\|f\|^2_{\mathrm{A}_\omega}\|g\|^2_{\mathrm{A}_\omega}\,.$$

□

Les conditions (8) et (9) n'impliquent pas que A_ω soit une algèbre. Le contre-exemple est le suivant : en dimension 1, prendre $\omega(\xi) = e^{|\xi|}$, et

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^a}\, e^{-\frac{|\xi|}{2}}\,,$$

où $\frac{1}{4} < a \leqslant \frac{3}{8}\cdot$ Alors, si $g = f^2$, il est facile de voir que

$$\hat{g}(\xi) \geqslant \frac{\mathrm{C}|\xi|}{(1+|\xi|^2)^{2a}}\, e^{-\frac{|\xi|}{2}}\,,$$

ce qui prouve que $g \notin \mathrm{A}_\omega$.

(10) est donc plus fort que (8) et (9). Nous ne savons pas si (10) est équivalente ou non au fait que A_ω soit une algèbre. En revanche, on peut voir tout de suite que (11) n'est pas nécessaire à cela, grâce au critère suivant.

PROPOSITION 1.2. — *Soit* $\theta(\rho)$: $[0, +\infty[\, \to [0, +\infty[$ *une fonction croissante de classe* C^1. *Soit* ω *le poids de* $\mathbf{R}^n$ *formé à partir de* θ *en posant* $\omega(\xi) = \mathrm{e}^{\theta(|\xi|)}$. *Alors, l'une des deux conditions suivantes entraîne que* ω *vérifie* (10) :

(13) $\frac{1}{\omega} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^n)$ *et* $\rho\theta'(\rho)$ *est borné*

(14) θ *est concave au voisinage de l'infini, et*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\theta(\rho)+\rho\theta'(\rho)}\rho^{n-1}\,d\rho < +\infty.$$

Supposons que ω vérifie (13). D'après la croissance de θ, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega} * \frac{1}{\omega}(\xi) &= \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\theta(|\xi-\eta|)-\theta(|\eta|)}d\eta \\ &\leqslant \left(\int_{|\eta|\leqslant\frac{|\xi|}{2}} e^{-\theta(|\eta|)}\,d\eta + \int_{|\eta|>\frac{|\xi|}{2}} e^{-\theta(|\xi-\eta|)}\,d\eta\right)e^{-\theta\left(\frac{|\xi|}{2}\right)} \\ &\leqslant 2\left\|\frac{1}{\omega}\right\|_1 \frac{1}{\omega}\left(\frac{\xi}{2}\right).\end{aligned}$$

Or, en écrivant $\rho\theta'(\rho) \leqslant C$, on a

$$\theta(|\xi|) - \theta\left(\frac{|\xi|}{2}\right) = \int_{\frac{|\xi|}{2}}^{|\xi|} \theta'(\rho)\,d\rho \leqslant \int_{\frac{|\xi|}{2}}^{|\xi|} \frac{C}{\rho}\,d\rho = C\operatorname{Log} 2,$$

d'où

$$\frac{1}{\omega} * \frac{1}{\omega}(\xi) \leqslant 2^{C+1}\left\|\frac{1}{\omega}\right\|_1 \frac{1}{\omega}(\xi).$$

Si θ vérifie (14), on commence par se ramener au cas où θ est concave sur $[0,+\infty[$: $\theta'(\rho)$ est décroissant. Il faut prouver

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\theta(|\xi-\eta|)-\theta(|\eta|)+\theta(|\xi|)}\,d\eta \leqslant C.$$

Posant $|\xi| = \sigma$ et $|\eta| = \rho$, on voit qu'il suffit de prouver

$$\int_0^{+\infty} e^{-\theta(|\sigma-\rho|)-\theta(\rho)+\theta(\sigma)}\rho^{n-1}\,d\rho \leqslant C.$$

Grâce à la croissance de θ et au fait que $\frac{1}{\omega} \in L^1(\mathbf{R}^n)$ (conséquence de (14)), on réduit l'intervalle d'intégration à $[0,\sigma]$, puis par symétrie à $\left[0,\frac{\sigma}{2}\right]$. A ce moment-là, on écrit

$$\theta(\sigma) - \theta(\sigma-\rho) \leqslant \rho\theta'(\sigma-\rho) \leqslant \rho\theta'(\rho),$$

puisque θ' est décroissante. On s'est finalement ramené à prouver

$$\int_0^{\frac{\sigma}{2}} e^{-\theta(\rho)+\rho\theta'(\rho)}\rho^{n-1}\, d\rho \leqslant C,$$

quel que soit σ, ce qui est exactement (14).

$\square$

Voici quelques exemples de poids ω vérifiant (13) ou (14), et donc munissant A_ω d'une structure d'algèbre :

a) $\omega(\xi) = (1+|\xi|^2)^s$: on retrouve le fait que $H^s(\mathbf{R}^n)$ est une algèbre si et seulement si $s > \frac{n}{2}\cdot$

b) Les poids de Gevrey $\omega(\xi) = e^{a|\xi|^b}$, où $a > 0$ et $0 < b < 1$, montrent que A_ω peut être une algèbre sans que ω vérifie (11).

c) $\omega_1(\xi) = e^{\frac{|\xi|}{\operatorname{Log}(2+|\xi|)}}$ et $\omega_2(\xi) = e^{|\xi|}(1+|\xi|^2)^n$. On sait que (7) est nécessaire pour que A_ω contienne des fonctions à support compact. ω_1 et ω_2 ne vérifiant pas (7), il existe des algèbres A_ω ne contenant aucune fonction à support compact, et même (dans le cas de ω_2) constituées de fonctions analytiques.

2. Début de la démonstration du théorème 0.1 : (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7).

Nous démontrons ici les implications faciles du théorème. (5) $\Rightarrow$ (6) est une application directe de la proposition 0.1, que nous prouvons maintenant. Soit donc E un puzzle-ℓ^2.

Le théorème du graphe fermé et l'invariance de la norme de E par translation montrent aussitôt l'implication (3) $\Rightarrow$ (4).

Réciproquement, soit m un multiplicateur local uniforme de E. Soit $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ vérifiant (1) et (2). Si $f \in E$, on peut écrire

$$\|m(x)f(x)\varphi(x-k)\|_E \leqslant C\|f(x)\varphi(x-k)\|_E$$

quel que soit $k \in \mathbf{Z}^n$. Utilisant (2), on a $m(x)f(x) \in E$, et

$$\begin{aligned}\|m(x)f(x)\|_E^2 &\leqslant C_1 \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \|m(x)f(x)\varphi(x-k)\|_E^2 \\ &\leqslant C_2 \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \|f(x)\varphi(x-k)\|_E^2 \leqslant C_3\|f\|_E^2 \,.\end{aligned}$$

Quant à la démonstration de (6) $\Rightarrow$ (7), elle est simplement incluse dans le fait que, pour qu'il existe des multiplicateurs locaux uniformes de A_ω, il faut que A_ω contienne des fonctions à support compact.

La preuve de (7) $\Rightarrow$ (5) est plus élaborée. Elle repose sur l'existence de partitions de l'unité dans A_ω. Cette existence est évidente quand ω satisfait aux conditions de Beurling, grâce à (11), puisqu'alors $D(\mathbf{R}^n) \subset A_\omega$. Quand (11) n'est plus vérifiée, il va falloir remplacer $D(\mathbf{R}^n)$ par des classes non quasi-analytiques appropriées. C'est ce qui motive le prochain paragraphe.

3. Rapports entre les algèbres A_ω et les classes de fonctions de Denjoy-Carleman.

Si $(M_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante log-convexe, on définit la classe $C_n(M_p)$ comme étant l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ pour lesquellès il existe deux constantes A_f et B_f telles que

$$(15) \qquad \forall\alpha \in \mathbf{N}^n, \quad \|\partial^\alpha f\|_2 \leqslant A_f B_f^{|\alpha|} M_{|\alpha|}.$$

La classe $C_n(M_p)$ est non quasi-analytique, c'est-à-dire contient des fonctions à support compact, si et seulement si $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{M_p}{M_{p+1}} < +\infty$ (théorème de Denjoy-Carleman). En fait, et c'est ce qui fait son intérêt, une classe $C_n(M_p)$ non quasi-analytique contient des partitions de l'unité. Nous donnons ici un lemme technique un petit peu plus précis, mais dont la démonstration repose sur un principe général de construction.

Lemme 3.1. — *Soit $C_n(M_p)$ une classe non quasi-analytique. Quitte à remplacer M_p par $C^p M_p$, où $C > 0$, on suppose que $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{M_p}{M_{p+1}} = \frac{1}{6}$. Alors, il existe $\varphi \in C_n(M_p)$ telle que*

(16) $\operatorname{Supp} \varphi = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]^n$

(17) $\varphi = 1$ *sur* $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]^n$

(18) $\forall\alpha \in \mathbf{N}^n, \ \|\partial^\alpha \varphi\|_2 \leqslant C M_{|\alpha|}$

(19) $\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \varphi(x-k) = 1$.

Il est clair qu'il suffit de démontrer ce lemme en dimension 1. Pour cela, on procède en deux temps.

1^re^ étape. Il existe ψ vérifiant (16), (17), (18). Selon Szolem Mandelbrojt [5], on pose

$$\Psi(u) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin u/2}{u} \prod_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin \mu_p u}{\mu_p u},$$

où $\mu_p = \dfrac{M_p}{M_{p+1}}$, et $\psi(x) = \hat{\Psi}(x)$.

Soit, si $\mu > 0$, $\delta_\mu(x) = \dfrac{1}{2\mu} 1_{[-\mu,\mu]}(x)$, et

$$\Delta = \prod_{p=0}^{+\infty} (* \, \delta_{\mu_p}) = \delta_{\mu_0} * \delta_{\mu_1} * \cdots * \delta_{\mu_p} * \cdots .$$

Alors,

$$\psi(x) = \delta_{\frac{1}{2}} * \Delta(x) = \int_{\mathbf{R}} \delta_{\frac{1}{2}}(x-y)\, \Delta(y)\, dy.$$

Puisque $\operatorname{Supp} \Delta = \left[-\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}\right]$, cela prouve (16). D'autre part, si $|x| \leqslant \dfrac{1}{3}$ et $y \in \operatorname{Supp} \Delta$, alors $|x-y| \leqslant \dfrac{1}{2}\cdot$ Par conséquent, si $|x| \leqslant \dfrac{1}{3}$, $\psi(x) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \Delta(y)\, dy = 1$, ce qui prouve (17).

Pour prouver (18), on écrit l'égalité de Parseval :

$$\begin{aligned}
\|\psi^{(\alpha)}\|_2^2 &= 2\pi \int_{\mathbf{R}} u^{2\alpha} \Psi(u)^2\, du \\
&\leqslant 2\pi \int_{\mathbf{R}} u^{2\alpha} \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\sin u/2}{u}\right)^2 \prod_{p=1}^{\alpha} \frac{1}{(\mu_p u)^2}\, du \\
&\leqslant \frac{2}{\pi} \frac{1}{(\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_\alpha)^2} \int_{\mathbf{R}} \left(\frac{\sin u/2}{u}\right)^2 du
\end{aligned}$$

soit

$$\|\psi^{(\alpha)}\|_2 \leqslant C M_\alpha .$$

2e étape. Construction de φ. φ est définie par

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \text{si} \quad x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

$$\varphi(x) = 1 - \psi(x-1) \quad \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{ailleurs.}$$

Alors, $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$, et vérifie (16), (17), (18). De plus, par construction,

$$\varphi(x) + \varphi(x-1) = 1 \qquad \text{si} \qquad x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right],$$

ce qui implique immédiatement (19).

□

Pour arriver à inclure dans une algèbre A_ω une partition de l'unité, donnée par une fonction φ vérifiant (19), il faut d'abord exprimer l'appartenance à une classe $C_n(M_p)$ à l'aide de la transformation de Fourier.

LEMME 3.2. — *Une fonction* $f \in C_n(M_p)$ *si et seulement s'il existe une constante* $C_f > 0$ *telle que*

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \tau\left(\frac{\xi}{C_f}\right) d\xi < +\infty, \tag{20}$$

où $\tau(\xi) = \sup\limits_{p \in \mathbf{N}} \dfrac{|\xi|^{2p}}{M_p^2}$.

Soit $f \in C_n(M_p)$. En utilisant Parseval, on écrit les inégalités (15) sous la forme, si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$:

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_n^{2\alpha_n} d\xi \leqslant A_f^2 B_f^{2|\alpha|} M_{|\alpha|}^2.$$

Développant $|\xi|^{2p} = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^p$, on en déduit

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 |\xi|^{2p} d\xi \leqslant A_f^2 B_f^{2p} n^p M_p^2,$$

d'où

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \frac{|\xi|^{2p}}{B_f^{2p} 2^p n^p M_p^2} d\xi \leqslant A_f^2 2^{-p}. \tag{21}$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \tau\left(\frac{\xi}{\sqrt{2n}\mathrm{B}_f}\right) d\xi < +\infty. \tag{22}$$

La réciproque se fait en « remontant » le calcul. □

Remarque. — On utilisera plus tard le fait qu'on puisse prendre dans (20), à partir de (15), $C_f = \sqrt{2n}\,B_f$.

Il ne reste plus maintenant qu'à lier les poids ω et τ pour obtenir les partitions de l'unité voulues dans A_ω.

LEMME 3.3. — *Soit* A_ω *une algèbre dont le poids vérifie* (7). *Alors, il existe une suite log-convexe* $(M_p)_{p\in\mathrm{N}}$ *telle que*

$$\omega(\xi) \leqslant C \sup_{p\in\mathrm{N}} \frac{|\xi|^{2p}}{M_p^2} \tag{23}$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{M_p}{M_{p+1}} = \frac{1}{6}. \tag{24}$$

PROPOSITION 3.1. — *Soit* A_ω *une algèbre dont le poids vérifie* (7). *Alors, il existe* $\varphi \in A_\omega$ *satisfaisant aux conditions* (16), (17) *et* (19).

Pour démontrer le lemme 3.3, on pose $\tilde{\omega}(\xi) = \sup_{|\eta|\leqslant|\xi|} \omega(\eta)$. Alors :

$$\frac{\mathrm{Log}\,\tilde{\omega}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \in L^1(\mathbf{R}^n). \tag{25}$$

Admettons-le pour l'instant. Le lemme 3.3 découle aussitôt du résultat d'Ostrowsky, cité par Mandelbrojt ([5]), que nous présentons maintenant en le précisant légèrement.

LEMME 3.4. — *Soit* $\pi(\rho) : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *une fonction croissante telle que* $\int_1^{+\infty} \frac{\pi(\rho)}{\rho^2}\, d\rho < +\infty$. *Alors, il existe une suite croissante log-convexe* $(M_p)_{p\in\mathrm{N}}$ *telle que*

$$e^{\pi(p)} \leqslant C \sup_{p\in\mathrm{N}} \frac{\rho^{2p}}{M_p^2} \tag{26}$$

$$\sum_{p\in\mathrm{N}} \frac{M_p}{M_{p+1}} = \frac{1}{6}. \tag{27}$$

Dans la preuve de ce lemme, on peut toujours supposer $\pi(0) = 0$, $\pi(e) < 2$ et π strictement croissante non bornée. On définit $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ par les relations $\pi(e\mu_p) = 2p$. La suite $(\mu_p)_{p\in\mathrm{N}}$ est strictement croissante, tendant vers l'infini. On pose $\mathrm{M}_0 = 1$, $\mathrm{M}_p = \mu_1, \ldots, \mu_p$ si $p \geqslant 1$. $(\mathrm{M}_p)_{p\in\mathrm{N}}$ est alors croissante log-convexe.

Soit $\tau(\rho) = \sup\limits_{p\in\mathrm{N}} \dfrac{\rho^{2p}}{\mathrm{M}_p^2}$, et $\rho > \mu_1$: il existe k tel que $\rho \in [\mu_k, \mu_{k+1}]$. Par conséquent :

$$\tau(e\rho) \geqslant \frac{(e\rho)^{2k}}{\mathrm{M}_k^2} \geqslant \frac{\rho^{2k}}{\mu_k^{2k}} e^{2k} \geqslant e^{2k} = e^{-2+\pi(e\mu_{k+1})},$$

d'où $\tau(e\rho) \geqslant e^{-2} e^{\pi(e\rho)}$, ce qui prouve (26).

Pour démontrer (27), on écrit $\sum\limits_{p\in\mathrm{N}} \dfrac{\mathrm{M}_p}{\mathrm{M}_{p+1}} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\mu_p}\cdot$ Or :

$$\int_{e\mu_1}^{+\infty} \frac{\pi(\rho)}{\rho^2}\, d\rho = \sum_{p=1}^{+\infty} \int_{e\mu_p}^{e\mu_{p+1}} \frac{\pi(\rho)}{\rho^2}\, d\rho \geqslant \sum_{p=1}^{+\infty} 2p\left(\frac{1}{e\mu_p} - \frac{1}{e\mu_{p+1}}\right)\cdot$$

Par un réarrangement du type d'Abel, on obtient

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_p} \leqslant \frac{e}{2} \int_{e\mu_1}^{+\infty} \frac{\pi(\rho)}{\rho^2}\, d\rho < +\infty\,.$$

D'autre part, on a de façon semblable

$$\int_{e\mu_1}^{+\infty} \frac{\pi(\rho)}{\rho^2}\, d\rho \leqslant \sum_{p=1}^{+\infty} (2p+2)\left(\frac{1}{e\mu_p} - \frac{1}{e\mu_{p+1}}\right),$$

d'où

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_p} \geqslant \frac{e}{2} \int_{e\mu_1}^{+\infty} \frac{\pi(\rho)}{\rho^2}\, d\rho - \frac{1}{\mu_1}\cdot$$

Quitte à remplacer $\pi(\rho)$ par $\pi(\rho) + \mathrm{A}\sqrt{\rho}$, on voit facilement qu'on peut obtenir $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\mu_p} \geqslant \dfrac{1}{6}\cdot$ Pour avoir l'égalité (27), il suffit de changer μ_p en $\alpha\mu_p$, où $\dfrac{1}{\alpha} = 6 \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\mu_p}\cdot$ (26) sera toujours vrai, puisque $\alpha < 1$: le lemme 3.4 est démontré.

Il faut maintenant prouver (25). Posons $\log \omega(\xi) = \theta(\xi)$ et $\log \tilde{\omega}(\xi) = \tilde{\theta}(\xi)$. D'après (9), on peut imposer

$$\theta(\xi+\eta) \leqslant \theta(\xi) + \theta(\eta). \tag{28}$$

Grâce à un argument utilisé par Beurling et Malliavin ([2]), on montre qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\theta(\xi) \leqslant C|\xi|. \tag{29}$$

En effet, il existe $a > 0$ tel que l'ensemble $F = \{\xi \in \mathbf{R}^n / \theta(\xi) \leqslant a\}$ soit de mesure non nulle. Par conséquent, $F - F$ contient une boule $B\left(\xi_0, \frac{1}{k}\right)$, où $k \in \mathbf{N}$. Utilisant (28), il vient successivement $\theta(\xi) \leqslant 2a$ si $\xi \in B\left(\xi_0, \frac{1}{k}\right)$, $\theta(\xi) \leqslant 2ka$ si $\xi \in B(\xi_0, 1)$, $\theta(\xi) \leqslant 2ka + \theta(\xi_0)$ si $\xi \in B(0,1)$, et enfin (29).

Appelons e_i le i-ème vecteur de base de $\mathbf{R}^n$. Les relations (7), (28) et (29) prouvent que, pour tout i

$$\int_0^{+\infty} \frac{\theta(\rho e_i)}{1+\rho^2}\, d\rho < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\theta(-\rho e_i)}{1+\rho^2}\, d\rho < +\infty.$$

Donc, si on pose $\lambda(\rho) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\theta(\rho e_i), \theta(-\rho e_i)\}$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda(\rho)}{1+\rho^2}\, d\rho < +\infty. \tag{30}$$

La relation (25) sera démontrée dès qu'on aura prouvé

$$\tilde{\theta}(\xi) \leqslant \lambda\left(\frac{\xi}{2n}\right) + \tilde{\theta}(b\xi), \qquad \text{où} \qquad b < 1. \tag{31}$$

Voyons tout de suite la preuve de (25). Si $k \in \mathbf{N}$, on appelle Γ_k la couronne $\{b^{-k} \leqslant |\xi| \leqslant b^{-k-1}\}$. Alors, (31) implique

$$\int_{\Gamma_k} \frac{\tilde{\theta}(\xi)}{|\xi|^{n+1}}\, d\xi \leqslant \int_{b^{-k}}^{b^{-k-1}} \frac{\lambda(\rho/2n)}{\rho^2}\, d\rho + b^n \int_{\Gamma_{k-1}} \frac{\tilde{\theta}(\xi)}{|\xi|^{n+1}}\, d\xi.$$

Par sommation, il vient, d'après (30)

$$(1-b^n)\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{\Gamma_k}\frac{\theta(\xi)}{|\xi|^{n+1}}\,d\xi \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{b^{-k}}^{b^{-k-1}}\frac{\lambda(\rho/2n)}{\rho^2}\,d\rho < +\infty,$$

ce qui prouve (25).

Il faut maintenant, pour terminer, montrer (31). Soit $\xi \in \mathbf{R}^n$, et i_0 tel que $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\xi_i^2 = \xi_{i_0}^2$. Alors, $\xi_{i_0}^2 \geqslant \dfrac{|\xi|^2}{n}$, d'où il est facile de déduire que

$$\left|\xi - \frac{|\xi|}{2n}e_{i_0}\right|^2 \leqslant |\xi|^2\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) \quad \text{si} \quad \xi_{i_0} \geqslant 0,$$

et

$$\left|\xi + \frac{|\xi|}{2n}e_{i_0}\right|^2 \leqslant |\xi|^2\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) \quad \text{si} \quad \xi_{i_0} \leqslant 0.$$

Appliquant alors (28) à ξ et à $\eta = \dfrac{|\xi|}{2n}e_{i_0}$ ou à $\eta = -\dfrac{|\xi|}{2n}e_{i_0}$, on trouve exactement (31), avec $b^2 = 1 - \dfrac{1}{4n^2}\cdot$ □

La preuve de la proposition 3.1 est alors immédiate : soit $(M_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite vérifiant (23) et (24) pour le poids $\omega(\sqrt{2n}\,\xi)$. Soit alors $\varphi \in C_n(M_p)$ vérifiant les relations (16) à (19). D'après le lemme 3.2, φ vérifie également (20), avec $C_f = \sqrt{2n}$ (voir la remarque après le lemme 3.2), ce qui prouve, d'après (23), que $\varphi \in A_\omega$. □

Grâce à cette proposition, nous pouvons maintenant terminer de démontrer le théorème (0.1).

4. Fin de la démonstration du théorème 0.1 : (7) ⇒ (5).

Il nous faut trouver une fonction $\varphi \in D(\mathbf{R}^n)$ telle que

(1) $\forall f \in A_\omega$, $\varphi(x)f(x) \in A_\omega$,

(2) il existe $C > 0$ tel que

$$\frac{1}{C}\,\|f\|_{A_\omega}^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\|f(x)\varphi(x-k)\|_{A_\omega}^2 \leqslant C\|f\|_{A_\omega}^2.$$

Nous choisissons la fonction φ qui nous est donnée par la proposition 3.1. Puisque A_ω est une algèbre, (1) est aussitôt vrai. Pour prouver (2), nous utiliserons le lemme suivant, qui est, lui aussi, fondé sur l'égalité de Parseval.

LEMME 4.1 *(Bourdaud et Meyer, communication orale). — Soit* $\psi \in A_\omega$. *Alors il existe* $C > 0$ *tel que, pour toute* $f \in A_\omega$,

$$\frac{1}{C}\|f\|^2_{A_\omega} \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} \|f(x)\psi(x-t)\|^2_{A_\omega}\,dt \leqslant C\|f\|^2_{A_\omega}. \tag{32}$$

On part de

$$\int_{\mathbf{R}^n} \|f(x)\psi(x-t)\|^2_{A_\omega}\,dt = \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}\left|\int_{\mathbf{R}^n} e^{-it.\eta}\hat{f}(\xi-\eta)\hat{\psi}(\eta)\,d\eta\right|^2 \omega(\xi)\,d\xi\,dt.$$

Intégrant le membre de droite d'abord par rapport à t, l'égalité de Parseval permet d'écrire

$$\int_{\mathbf{R}^n} \|f(x)\psi(x-t)\|^2_{A_\omega}\,dt = (2\pi)^n\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi-\eta)\hat{\psi}(\eta)|^2\omega(\xi)\,d\xi\,d\eta.$$

Il ne reste plus qu'à utiliser les deux relations $\omega(\xi) \leqslant \omega(\xi-\eta)\omega(\eta)$ et $\omega(\xi) \geqslant \dfrac{\omega(\xi-\eta)}{\omega(\eta)}$ pour obtenir (32). □

Les inégalités de ce lemme sont une version continue des inégalités (2) (dans lesquelles le paramètre est discret). On peut en fait établir l'équivalence des points de vue discret et continu sur la notion de puzzle-ℓ^2. La démonstration qui suit en découle directement.

Soit $f \in A_\omega$. Puisque φ vérifie (19), on a

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} f(x)\varphi(x-k).$$

On note $K = \left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]^n$ le support de φ, et on prend $\psi \in A_\omega$ telle que $\psi = 1$ sur $K - K$ (ce qui est possible d'après le § 3). Soit alors

$$F(t) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \|f(x)\varphi(x-k)\|_{A_\omega} 1_{k+K}(t).$$

Il est clair que

$$(33)\qquad \int_{\mathbf{R}^n} |F(t)|^2\, dt \geqslant |K| \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \|f(x)\varphi(x-k)\|^2_{A_\omega}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \|f(x)\varphi(x-k)\psi(x-t)\|_{A_\omega} 1_{k+K}(t) \\ &\leqslant \|\varphi\|_{A_\omega} \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \|f(x)\psi(x-t)\|_{A_\omega} 1_{k+K}(t). \end{aligned}$$

Si $j, k \in \mathbf{Z}^n$, les compacts $j + K$ et $k + K$ sont disjoints dès que $|j_i - k_i| \geqslant 2$ pour tout i. Par conséquent :

$$(34)\qquad \int_{\mathbf{R}^n} |F(t)|^2\, dt \leqslant C \int_{\mathbf{R}^n} \|f(x)\psi(x-t)\|^2_{A_\omega}\, dt.$$

(32), (33) et (34) impliquent la première inégalité voulue :

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \|f(x)\varphi(x-k)\|^2_{A_\omega} \leqslant C\|f\|^2_{A_\omega}.$$

En sens inverse, on part de (32), qu'on écrit :

$$(35)\qquad \|f\|^2_{A_\omega} \leqslant C \int_{\mathbf{R}^n} \left\| \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} f(x)\varphi(x-k)\psi(x-t) \right\|^2_{A_\omega} dt.$$

Si t est fixé, $f(x)\varphi(x-k)\psi(x-t)$ est non nul à condition que $k \in t + K - 2K$. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}^n$:

$$\left\| \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} f(x)\varphi(x-k)\psi(x-t) \right\|^2_{A_\omega} \leqslant C \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \|f(x)\varphi(x-k)\psi(x-t)\|^2_{A_\omega}.$$

Intégrant cette expression en t, on trouve, avec (32) et (35), la deuxième inégalité :

$$\|f\|^2_{A_\omega} \leqslant C \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} \|f(x)\varphi(x-k)\|^2_{A_\omega}.$$

La démonstration du théorème (0.1) est ainsi achevée.

5. Conséquences et applications du théorème 0.1.

La structure d'algèbre de A_ω dans le théorème 0.1 permet de récrire la caractérisation des multiplicateurs de A_ω en termes de fonction-test.

THÉORÈME 5.1. — *Soit une algèbre* A_ω *dont le poids vérifie* (7). *Alors,* $m : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ *est un multiplicateur de* A_ω *si et seulement s'il existe* $\varphi \in A_\omega$, $\varphi = 1$ *sur un voisinage de* 0, *telle que* $m(x)\varphi(x-t) \in A_\omega$ *uniformément par rapport à* $t \in \mathbf{R}^n$ *(c'est-à-dire qu'il existe* $C > 0$ *tel que* $\|m(x)\varphi(x-t)\|_{A_\omega} \leqslant C$ *pour tout* t).

La condition est nécessaire d'après le théorème du graphe fermé et l'invariance par translation de la norme de A_ω. Réciproquement, on désigne par K un compact voisinage de 0 sur lequel $\varphi = 1$. Alors, si $f \in E$ et $\operatorname{Supp} f \subset K$, on a, si $t \in \mathbf{R}^n$,

$$m(x-t)f(x) = m(x-t)\varphi(x)f(x),$$

ce qui prouve que $m(x-t)f(x) \in A_\omega$, avec $\|m(x-t)f(x)\|_{A_\omega} \leqslant C\|f\|_{A_\omega}$. m est donc un multiplicateur local uniforme de A_ω, et il ne reste plus qu'à appliquer le théorème 0.1 à A_ω pour conclure.

Nous indiquons maintenant, sans démonstration, quelques développements du théorème 0.1. Les démonstrations se trouvent dans [6].

Moyennant un approfondissement du lien entre les poids ω des algèbres A_ω et les poids τ des classes $C_n(M_p)$, le théorème 5.1 peut, dans certains cas, conduire à des caractérisations explicites des multiplicateurs de A_ω. Par exemple pour les poids de Gevrey.

PROPOSITION 5.1. — *Soit* $a > 0$, $b \in]0,1[$, *et* $\omega(\xi) = e^{a|\xi|^b}$. *Alors,* $m : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ *est un multiplicateur de* A_ω *si et seulement s'il existe une suite* $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \in \ell^2(\mathbf{N}^n)$ *telle que*

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}^n, \quad \sup_{t \in \mathbf{R}^n} \|1_{B(t,1)}(x)\, \partial^\alpha m(x)\|_2 \leqslant \varepsilon_\alpha L_\alpha,$$

où $L_\alpha = \left(\dfrac{\alpha_1! \dots \alpha_n!}{|\alpha|!}\right)^{1/2} |\alpha|^{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{b}\right)} \left(\dfrac{2|\alpha|}{abe}\right)^{\frac{|\alpha|}{b}}$.

Le théorème 0.1 permet aussi d'aller plus loin que les multiplicateurs : vers les opérateurs pseudo-différentiels classiques. Rappelons comment sont définis ces opérateurs : si $\sigma(x,\xi) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ est continue et si $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, on pose

$$\sigma(x,D)f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi.$$

La continuité sur A_ω de ces opérateurs est décrite par le

THÉORÈME 5.2. — *Soit* ω *un poids vérifiant* (7) *et* (9). *Soit* p *un autre poids tel que* $\frac{1}{p} \in L^1(\mathbf{R}^n)$. *On pose* $\Omega(x,\xi) = \omega(x)p(\xi)$. *Pour qu'un opérateur pseudo-différentiel soit borné sur* A_ω, *il suffit que son symbole* $\sigma(x,\xi)$ *soit un multiplicateur de l'espace* $A_\Omega(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$.

Par exemple, si, pour tout $\alpha \in \{0,1\}^n$, $x \to \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)$ est un multiplicateur de A_ω, alors $\sigma(x,D)$ est borné sur A_ω.

Un tel résultat est en fait une généralisation de résultats de Calderón et Vaillancourt, prolongés par Coifman et Meyer, sur la continuité L^2 de ces opérateurs, bien que $L^2(\mathbf{R}^n)$ ne soit pas une algèbre (voir [3]).

Dans le même ordre d'idées, on peut remarquer que les espaces $H^s(\mathbf{R}^n)$, où $s \leqslant \frac{n}{2}$, qui ne sont pas des algèbres, ont une structure de puzzle-ℓ^2. Cela suggère une extension du théorème 0.1 aux espaces A_ω qui ne sont pas des algèbres.

Une semblable extension existe. On y remplace le fait que A_ω soit une algèbre par la condition de régularité suivante : si $\theta = \log\omega$,

$$\forall t \in \mathbf{R}^n, \quad \theta^*(t) = \sup_{x\in\mathbf{R}^n} |\theta(x+t)-\theta(x)| < +\infty. \tag{36}$$

Cette condition est due à Beurling et Malliavin, qui ont montré que (36) et (7), en dimension $n = 1$, entraînent que A_ω contient des fonctions à support compact ([2]). En renforçant la condition (7), nous avons obtenu :

THÉORÈME 5.3. — *Soit* ω *vérifiant* (36). *Alors,* A_ω *est un puzzle-*ℓ^2 *si et seulement si*

$$\frac{\theta^*(t)}{(1+|t|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \in L^1(\mathbf{R}^n). \tag{37}$$

Si (37) est vraie, alors les multiplicateurs de A_ω sont les multiplicateurs locaux uniformes, d'après la proposition 0.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Beurling, Construction and analysis of some convolution algebras, *Ann. Inst. Fourier*, 14-2 (1964), 1-32.

[2] A. Beurling and P. Malliavin, On Fourier transforms of measures with compact supports, *Acta Math.*, 107 (1962), 291-309.

[3] R. R. Coifman et Y. Meyer, Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, *Astérisque*, Soc. Math., France, n° 57.

[4] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov and N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions*. Tomes 1, 2 et 4, Academic Press (1964).

[5] S. Mandelbrojt, *Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions*, Paris, Gauthier-Villars, 1952.

[6] P. Tchamitchian. Généralisation des algèbres de Beurling, Thèse 3e cycle, *Publ. Math. Orsay*, 83.05.

[7] W. Żelazko, *Banach algebras*, Elsevier Publ. Cny and PWN-Polish Scient. Publishers, 1973.

Manuscrit reçu le 13 décembre 1983.

Philippe Tchamitchian,
Université de Paris-Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex.