

GENEVIÈVE DIDIERJEAN

Homotopie de l'espace des équivalences d'homotopie fibrées

Annales de l'institut Fourier, tome 35, n° 3 (1985), p. 33-47

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_3_33_0

© Annales de l'institut Fourier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

HOMOTOPIE DE L'ESPACE DES ÉQUIVALENCES D'HOMOTOPIE FIBRÉES

par Geneviève DIDIERJEAN

Le problème du calcul du groupe des classes d'homotopie des équivalences d'homotopie d'un espace X , noté $\mathcal{E}(X)$, se trouve abordé essentiellement de deux manières.

Une première méthode introduite par Olum [8] et par Barcus et Barratt [2] consiste à travailler à partir de la décomposition en cellules de l'espace X . Le groupe $\mathcal{E}(X)$ est ainsi calculé, pour un certain nombre d'espaces particuliers : produit de deux sphères (Sawashita [10]), espaces pseudo-projectifs (Olum [8])... Par cette même méthode, Schellenberg [11] obtient des résultats pour des espaces dont le seul groupe d'homotopie non nul en dessous de la dimension de l'espace est le groupe fondamental. Plus récemment Oka [7] examine le cas de H-espaces de dimension n , simplement connexes et de rang ≥ 2 et Rutter [9] celui d'espaces obtenus par adjonction de cellules.

Une autre voie, introduite par Shih [12] consiste en la construction et l'étude de suites spectrales obtenues à partir de la décomposition en système de Postnikov de l'espace X . De cette façon Shih et plus tard Tsukiyama [14] calculent les groupes d'équivalences d'homotopie pour des C.W complexes ayant deux groupes d'homotopie non nuls en dessous de la dimension de l'espace.

Dans cet article, à l'aide des systèmes de Postnikov fibrés [6] et d'une suite spectrale limitée [4], on obtient de nouveaux calculs des groupes d'équivalence d'homotopie étendant les résultats précédents. En particulier on calcule le groupe $\mathcal{E}(X)$ pour des espaces ayant trois groupes d'homotopie non nuls en dessous de la

dimension de X , ce qui permet le calcul de $\mathcal{E}(X)$ pour tous les C.W complexes de dimension inférieure ou égale à quatre, simplement connexes dans le cas de la dimension quatre.

Plus précisément, soit $X \longrightarrow B$ un fibré de Kan dont la fibre et la base sont connexes et dont la fibre a son groupe fondamental abélien. On notera $E_B(X)$ le monoïde simplicial des équivalences d'homotopie fibrées au dessus de l'identité de B . Si B est réduit à un point on retrouve le groupe $\pi_0(E_B(X)) = \mathcal{E}(X)$. Par ailleurs si $X \longrightarrow B$ est minimal ce monoïde est le groupe des automorphismes fibrés au-dessus de l'identité de B , noté $\text{Aut}_B(X)$.

On construit une suite spectrale qui converge vers le bigradué associé à une filtration convenable des groupes d'homotopie du monoïde $E_B(X)$. Lorsque la fibre de la fibration n'a que deux groupes d'homotopie non nuls, on en déduit une suite exacte de Gysin nous donnant en particulier le résultat suivant : soit X un C.W complexe de dimension finie n'ayant que trois groupes d'homotopie non nuls, $\pi_i(X)$, pour $i \leq \dim X$ et considérons le sous-groupe de $\mathcal{E}(X)$, noté $\mathcal{E}^\#(X)$, formé des équivalences d'homotopie induisant l'identité sur tous les groupes d'homotopie de X . Supposons de plus que $\pi_1(X) = G_1$ est un groupe libre et que $\pi_s(X) = G_s$ avec $s = k, m$ et $2 < k < m \leq \dim X$ alors on a

$$\mathcal{E}^\#(X) = H^m(G_k, k, G_m)_{G_1} \oplus H_t^1(G_1, H^{m-1}(G_k, k, G_m))$$

où t en indice indique que l'on prend de la cohomologie à coefficients et $H^m(G_k, k, G_m)_{G_1}$ est le sous-groupe de $H^m(G_k, k, G_m)$ laissé invariant par l'opération de G_1 .

1. Le monoïde des équivalences d'homotopie fibrées.

Les espaces considérés sont des ensembles simpliciaux de Kan. Les fibrés notés $X \longrightarrow B$, sont des fibrés de Kan dont la fibre et la base sont connexes et le groupe fondamental de la fibre abélien.

Soient $X_i \longrightarrow B$ ($i = 1, 2$) deux fibrés. On note $S_B(X_1, X_2)$ l'ensemble simplicial de Kan associé aux applications simpliciales fibrées de X_1 dans X_2 induisant l'identité sur B . Un q -simplexe

de $S_B(X_1, X_2)$ est une application simpliciale fibrée du fibré $\Delta[q] \times X_1 \longrightarrow \Delta[q] \times B$ dans le fibré $\Delta[q] \times X_2 \longrightarrow \Delta[q] \times B$ au-dessus de l'identité.

Les opérations simpliciales de $S_B(X_1, X_2)$ sont induites par celles de l'ensemble simplicial, noté $S(X_1, X_2)$, associé à toutes les applications simpliciales de X_1 dans X_2 .

Si $X = X_1 = X_2$, l'ensemble simplicial $S_B(X_1, X_2)$ sera noté $S_B(X)$ et l'ensemble simplicial associé aux sections du fibré $X \longrightarrow B$ sera noté $\Gamma_B(X)$. Une homotopie fibrée entre les applications fibrées $f_i : X_1 \longrightarrow X_2$ ($i = 0, 1$) est un 1-simplexe de $S_B(X_1, X_2)$ qui induit f_0 au-dessus du 0-ième sommet de $\Delta[1]$ et f_1 au-dessus du 1-ième sommet de $\Delta[1]$.

DEFINITION-NOTATION 1.1. — On note $E_B(X)$ le sous ensemble simplicial de $S_B(X)$ dont les simplexes sont des équivalences d'homotopie fibrées. On prend pour point-base de ce monoïde l'application identique de X .

Remarques 1.1.1. — Le monoïde $E_B(X)$ est une réunion de composantes connexes de $S_B(X)$.

1.1.2. — Bien que le type d'homotopie du monoïde $E_B(X)$ ne dépende que de celui du fibré $X \longrightarrow B$, le monoïde n'est pas "fonctoriel" en X .

1.1.3. — Soit $X \longrightarrow B$ un fibré, il existe un sous-fibré minimal $X' \longrightarrow B$ qui est un rétracte par déformation du fibré $X \longrightarrow B$ [6]. Le type d'homotopie de $E_B(X)$ est celui du groupe simplicial $\text{Aut}_B(X')$.

2. Suite spectrale associée au monoïde des équivalences d'homotopie fibrées.

Soient $X \longrightarrow B$ un fibré de fibre F et n un entier positif ou nul. On considère $X^{(n)} \longrightarrow B$ le n -ième système de Postnikov fibré ; l'espace $X^{(n)}$ est l'ensemble simplicial obtenu en quotientant X par la relation d'équivalence suivante : deux simplexes de X sont équivalents s'ils ont même $(n - 1)$ -ième squelette et même projection sur B . Pour $n \leq 0$ on a $X^{(n)} = B$. Dans le cas où le

fibré $X \longrightarrow B$ est minimal, il en est de même pour les fibrations $X^{(n)} \longrightarrow B$ et $X^{(m)} \longrightarrow X^{(n)}$ $m \geq n$, [6]. Dans ce cas, les espaces B, X et F n'ont qu'un seul sommet, on notera $\pi_*(B), \pi_*(X), \pi_*(F)$ les groupes d'homotopie correspondants.

Les fibrés $X^{(n+1)} \longrightarrow X^{(n)}$ sont des fibrés dont la fibre est un espace d'Eilenberg Mac Lane $K(\pi_n(F), n)$. Soient $X \longrightarrow B$ et $Y \longrightarrow B$ deux fibrés, la projection $X \longrightarrow X^{(n)}$ induit un isomorphisme d'ensembles simpliciaux $S_B(X^{(n)}, Y^{(n)}) \cong S_B(X, Y^{(n)})$ ([2] et [12]). Les monoïdes $E_B(X)$ et $E_B(X^{(n)})$ sont des composantes connexes de $S_B(X)$ et de $S_B(X^{(n)})$ respectivement. On en déduit :

PROPOSITION 2.1. — *L'application naturelle :*

$$\pi : E_B(X) \longrightarrow E_B(X^{(n)})$$

est une fibration de Kan.

DEFINITION 2.2. — *Etant donné une application $X \longrightarrow B$ et des fibrés $Y_i \longrightarrow X$ ($i = 1, 2$) on appellera B-isomorphisme du fibré $Y_1 \longrightarrow X$ sur le fibré $Y_2 \longrightarrow X$ un couple d'isomorphismes f, g rendant commutatif le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{f} & Y_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow & \swarrow \\ & B & \end{array}$$

Lorsque $g = 1_X$, on dira X-isomorphisme.

Le fibré $X^{(n+1)} \longrightarrow X^{(n)}$ peut être identifié à un produit tordu $K(\pi_n(F), n) \times_{\tau_n} X^{(n)}$ ([6]) où τ_n est une fonction tordante de $X^{(n)}$ dans le groupe simplicial des automorphismes de $K(\pi_n(F), n)$, noté $D(K(\pi_n(F), n))$. Comme ce groupe simplicial est isomorphe, en tant qu'ensemble simplicial, à $\text{Aut } \pi_n(F) \times K(\pi_n(F), n)$ ([6]), on a $\tau_n = (t_n, u_n)$. L'application τ_n induit donc une opération, notée t_n , de $\pi_1(X)$ (isomorphe à $\pi_1(X^{(n)})$ si $n \geq 2$) sur $\pi_n(F)$. Lorsque $n = 1$, le groupe fondamental $\pi_1(X)$ opère sur $\pi_1(F)$ par l'intermédiaire de $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(B)$.

Les fibrés de fibre $K(\pi_n(F), n)$ et de base $X^{(n)}$ sont déterminés à un $X^{(n)}$ -isomorphisme près, par l'opération t_n de $\pi_1(X)$ sur $\pi_n(F)$ et par leur première obstruction, $\xi^{(n)}$, dans le $(n+1)$ -ième groupe de cohomologie de $X^{(n)}$ à valeur dans le système de coefficients locaux t_n qui vient d'être défini [6]. On note $H_{t_n}^{n+1}(X^{(n)}, \pi_n(F))$ ce groupe. La classe $\xi^{(n)}$ est appelée n -ième invariant de Postnikov du fibré $X \rightarrow B$.

Le groupe $\pi_1(X)$ opérant sur $\pi_n(F)$, on désigne par $\text{Aut } \pi_n(F)_{\pi_1(X)}$ le sous-groupe des éléments de $\text{Aut } \pi_n(F)$ invariants par cette opération. Le groupe $\text{Aut } \pi_n(F)_{\pi_1(X)}$ opère alors sur $H_{t_n}^{n+1}(X^{(n)}, \pi_n(F))$ [4] et on notera $\text{Aut } \pi_n(F)_{\pi_1(X), \xi^{(n)}}$ le sous-groupe laissant $\xi^{(n)}$ invariant.

Soit $X \rightarrow B$ un fibré de Kan dont la fibre F et la base sont connexes et dont le groupe fondamental de la fibre est abélien. Considérons la filtration décroissante de $\pi_n(E_B(X))$ définie par les sous-groupes invariants :

$$\mathfrak{F}^p \pi_n(E_B(X)) = \text{Ker}[\pi_n(E_B(X)) \rightarrow \pi_n(E_B(X^{(p)}))].$$

A cette filtration, on associe le bigradué $\mathfrak{F}^p / \mathfrak{F}^{p+1}$; ces groupes sont commutatifs sauf peut-être pour $n = 0$. Ces données permettent de construire la suite spectrale non abélienne limitée [4] du théorème 2.3, théorème dont on donnera les principales étapes de la démonstration au paragraphe 4. Les groupes de cohomologie considérés sont à valeurs dans le système de coefficients locaux t_p défini précédemment :

THEOREME 2.3. — *Aux groupes d'homotopie du monoïde des équivalences d'homotopie fibrées de X au-dessus de l'identité de B , on associe une suite spectrale non abélienne limitée de degré total $p + q \leq 1$ et dont les termes initiaux vérifient :*

i) pour $p + q < 0$ et $2p + q \geq 0$:

$$E_1^{p,q} = H_{t_p}^{2p+q}(X, \pi_p(F))$$

ii) pour $p + q = 0$, $p \geq 1$, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow H_{t_p}^p(X^{(p)}, \pi_p(F)) \rightarrow E_1^{p,-p} \rightarrow \text{Aut } \pi_p(F)_{\pi_1(X), \xi^{(p)}} \rightarrow 1$$

iii) pour $p + q = 1$:

$E_1^{p,q}$ est l'ensemble des classes de $X^{(p)}$ -isomorphismes de

fibrés de base $X^{(p)}$ et de fibre $K(\pi_p(F), p)$, B -isomorphes au fibré $X^{(p+1)} \longrightarrow X^{(p)}$. Ces termes sont des ensembles pointés par la classe du fibré $X^{(p+1)} \longrightarrow X^{(p)}$.

En particulier si $\pi_1(F) = 0$ on a :

$$E_1^{p, 1-p} = H_p^{p+1}(X^{(p)}, \pi_p(F)) / \text{Aut } \pi_p(F)_{\pi_1(B)}.$$

Lorsque X est de dimension finie ou si les groupes d'homotopie de la fibre sont nuls à partir d'un certain rang, cette suite spectrale converge, pour $p + q \leq 0$, vers le bigradué $\tilde{H}^p \pi_* E_B(X) / \tilde{H}^{p+1} \pi_* E_B(X)$.

Dans les termes $E_1^{p, -p}$ interviennent les n -ièmes groupes de cohomologie d'un n -ième système de Postnikov fibré :

NOTATION 2.4. — Soit X un espace topologique et G un groupe abélien. On note $K^n(X, G)$ le noyau du composé naturel : $H^n(X, G) \xrightarrow{u} \text{Hom}(H_n(X), G) \xrightarrow{v} \text{Hom}(\pi_n(X), G)$, où u est la projection naturelle et v est induit par l'application d'Hurewicz.

PROPOSITION 2.5. — Soit $X \longrightarrow B$ un fibré de fibre F . Si $X^{(n)}$ désigne le n -ième système de Postnikov du fibré et $i^* : H^n(X, G) \longrightarrow H^n(F, G)$ le morphisme induit par $i : F \longrightarrow X$ alors $H^n(X^{(n)}, G)$ est l'image réciproque, notée $K_B^n(F, G)$, par i^* de $K^n(X, G)$.

Démonstration. — On considère la fibration $X \longrightarrow X^{(n)}$. La fibre F_n est $(n-1)$ -connexe et $\pi_n(F_n) = \pi_n(F)$. On écrit la suite exacte de cohomologie associée à la paire (X, F_n) . La proposition est alors une conséquence d'un résultat de Serre ([13, page 483]).

3. Groupes d'homotopie du groupe des B -automorphismes d'un fibré minimal de fibre $K(\pi, n)$ ($n > 0$).

Nous allons calculer les groupes d'homotopie de $E_B(X)$ dans le cas où $X \longrightarrow B$ est le fibré $K(\pi, n) \times B \longrightarrow B$; π étant un groupe abélien et τ une fonction tordante de B dans $D(K(\pi, n))$. On a donc $\tau = (t, u)$ avec $t : B \longrightarrow \text{Aut } \pi$ et

$u : B \longrightarrow K(\pi, n)$. La fonction tordante τ est représentée par une section $c : B \longrightarrow K(\pi, n) \times_{\tau} B$ et on note ξ la classe de cette section dans $H_t^{n+1}(B, \pi)$.

A toute section s de B dans $K(\pi, n) \times_{\tau} B$ on associe un automorphisme, noté f_s , du fibré $K(\pi, n) \times_{\tau} B \longrightarrow B$. De plus si g est un automorphisme du fibré $K(\pi, n) \times_{\tau} B \longrightarrow B$, l'homomorphisme obtenu par restriction de g à la fibre est un élément, noté $j(g)$, de $\text{Aut } \pi$.

PROPOSITION 3.1. — Soit $K(\pi, n) \times_{\tau} B$ un produit tordu avec $\tau = (t, u)$, défini par $\xi \in H_t^{n+1}(B, \pi)$. La suite de groupes simpliciaux :

$$0 \longrightarrow \Gamma_B(K(\pi, n) \times_{\tau} B) \xrightarrow{i} \text{Aut}_B K(\pi, n) \times_{\tau} B \xrightarrow{j} \text{Aut } \pi_{\pi_1(B), \xi} \longrightarrow 1$$

est exacte.

Remarque. — Si le produit tordu est principal i.e. $t = 0$ (par exemple si $\pi_1(B) = 0$), on retrouve la suite exacte [3] :
 $0 \longrightarrow S_B(B, K(\pi, n)) \longrightarrow \text{Aut}_B K(\pi, n) \times_{\tau} B \longrightarrow \text{Aut } \pi_{\xi} \longrightarrow 1$.

Dans la proposition 3.1 l'injectivité de i est évidente. Pour démontrer l'exactitude en (i, j) , on utilise un premier lemme sur la structure des automorphismes fibrés de $K(\pi, n) \times_{\tau} B$:

LEMME 3.2. — Tout automorphisme fibré g de $K(\pi, n) \times_{\tau} B \rightarrow B$ au-dessus de l'identité de B est de la forme $g(w, b) = (\alpha w + \beta(b), b)$ où $\alpha = j(g)$ est un automorphisme de π invariant par l'opération de $\pi_1(B)$ sur π et $\beta(b)$ est un élément de $K(\pi, n)$.

On déduit ensuite que l'image de j est incluse dans $\text{Aut } \pi_{\pi_1(B), \xi}$ du lemme 3.2 et de :

LEMME 3.3. — Soit $g : K(\pi, n) \times_{\tau} B \longrightarrow K(\pi, n) \times_{\tau} B$ un B -isomorphisme défini par $g(w, b) = (\alpha w + \beta(b), b)$ où $\alpha \in \text{Aut } \pi$ et $\beta : B \longrightarrow K(\pi, n)$. L'invariant de Postnikov ξ associé au fibré $K(\pi, n) \times_{\tau} B \longrightarrow B$ est invariant pour l'opération de α sur $H_t^{n+1}(B, \pi)$.

Reste la surjectivité de j : soit α un élément de $\text{Aut } \pi_{\pi_1(B), \xi}$, on note également α l'application induite sur $K(\pi, n)$; la fonction $u - \alpha u$ détermine la classe $\xi - \alpha \xi$ qui est nulle dans $H_r^{n+1}(B, \pi)$. Par conséquent on a un isomorphisme de fibrés

$$h : K(\pi, n)_{(\tau, u \times_{\alpha u})} B \longrightarrow K(\pi, n) \times_{\tau} B.$$

On pose $h(w, b) = (\bar{h}(w, b), b)$. Considérons l'application $g' : K(\pi, n) \times_{\tau} B \longrightarrow K(\pi, n) \times_{\tau} B_2$ définie par

$$g'(w, b) = (\alpha w + \bar{h}(w, b) - w, b).$$

Cette application est simpliciale et $j(g') = g$.

La longue suite exacte d'homotopie associée à la fibration de la proposition 3.1 donne :

COROLLAIRE 3.4. — Soit $K(\pi, n) \times_{\tau} B \longrightarrow B$ un fibré, où π est un groupe abélien ; les groupes d'homotopie du groupe $\text{Aut}_B K(\pi, n) \times_{\tau} B$ sont donnés par :

$$- \text{ si } i \neq 0 \quad \pi_i(\text{Aut}_B K(\pi, n) \times_{\tau} B) = H_r^{n-i}(B, \pi)$$

$$- \text{ si } i = 0 \quad \text{on a la suite exacte :}$$

$$0 \longrightarrow H_r^n(B, \pi) \longrightarrow \pi_0(\text{Aut}_B K(\pi, n) \times_{\tau} B) \longrightarrow \text{Aut } \pi_{\pi_1(B), \xi} \longrightarrow 1.$$

4. Démonstration du théorème 2.3.

D'après la remarque 1.1.3., on peut supposer le fibré $X \longrightarrow B$ minimal. De plus si $p < q$ on a la fibration de Kan $E_B(X^{(q)}) \longrightarrow E_B(X^{(p)})$ de fibre \mathcal{E}_p^q . Plus généralement on vérifie

PROPOSITION 4.1. — Pour $p < q < r$, on a la fibration de Kan : $\mathcal{E}_q^r \longrightarrow \mathcal{E}_p^r \longrightarrow \mathcal{E}_p^q$.

Rappelons que pour construire une suite spectrale non abélienne, limitée, il faut se donner pour tout entier $n \leq 0$ et $-\infty \leq p < q \leq +\infty$, des objets $H^n(p, q)$ et des flèches $H^n(p, q) \longrightarrow H^n(p', q')$ pour $p' \leq p$ et $q' \leq q$. Ces objets sont des groupes pour $n < 0$ et des ensembles pointés pour $n = 0$. Une flèche entre deux groupes est un homomorphisme

de groupes. Une flèche d'un groupe G dans un ensemble pointé M est une opération de G sur M . Ces données vérifient en particulier :

1) $H^n(p, q) \longrightarrow H^n(p, q)$ est l'identité

2) pour $-\infty \leq p < q < r \leq +\infty$ on a une longue suite exacte limitée à droite

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H^n(q, r) \longrightarrow H^n(p, r) \longrightarrow H^n(p, q) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(q, r) \longrightarrow \dots \\ \longrightarrow H^0(p, r) \longrightarrow H^0(p, q), \end{aligned}$$

ces données vérifiant des conditions naturelles de transitivité.

Posons : $H^n(p, q) = \pi_{-n}(\mathcal{G}_p^q)$ pour $n \leq 0$ $-\infty \leq p < q \leq +\infty$

$H^1(p, q) =$ l'ensemble des classes de $X^{(p)}$ -isomorphismes qui sont B -isomorphes au fibré $X^{(q)} \longrightarrow X^{(p)}$. Le point-base de $H^1(p, q)$ est la classe du fibré $X^{(q)} \longrightarrow X^{(p)}$.

On définit une opération de $H^0(p, q)$ sur $H^1(q, r)$ en associant à la classe du fibré $Y \longrightarrow X^{(q)}$ dans $H^1(q, r)$ et à la classe dans $H^0(p, q)$ de l'isomorphisme g , la classe dans $H^1(q, r)$ du fibré image réciproque $g^*Y \longrightarrow X^{(q)}$. En prenant l'image du point-base dans $H^1(q, r)$, cette opération induit une application notée δ^0 de $H^0(p, q)$ sur $H^1(q, r)$. La suite

$$H^0(p, r) \longrightarrow H^0(p, q) \xrightarrow{\delta^0} H^1(q, r) \longrightarrow H^1(p, r)$$

est alors exacte. Les groupes $H^n(p, q)$ et les ensembles $H^1(p, q)$ vérifient les axiomes nécessaires à la construction d'une suite spectrale limitée commençant par :

$$E_1^{p, q} = H^{p+q}(p, p+1) \text{ si } p+q \leq 1;$$

la différentielle $d_1 : E_1^{p, q} \longrightarrow E_1^{p+1, q}$ est définie pour $p+q \leq 0$ par l'opérateur δ^{p+q} , associé au triple $(p, p+1, p+2)$.

On va à présent calculer les groupes d'homotopie de l'espace \mathcal{G}_p^{p+1} . On a $\mathcal{G}_p^{p+1} = E_{X^{(p)}}(X^{(p+1)})$.

Le fibré étant minimal, une équivalence d'homotopie est un automorphisme de fibré [6]. L'espace \mathcal{G}_p^{p+1} est donc identique au groupe $\text{Aut}_{X^{(p)}} K(\pi_p(F), p) \times_{\tau_p} X^{(p)}$ où $\tau_p = (t_p, u_p)$ est une fonction tordante dont la classe est naturellement définie par le fibré $X \longrightarrow B$.

LEMME 4.2. — On a :

$$1) \text{ Si } 1 \leq i \leq p-1 \quad H_t^i(X, \pi_p(F)) \cong H_{t_p}^i(X^{(p)}, \pi_p(F))$$

où t est le composé $X \longrightarrow X^{(p)} \longrightarrow \text{Aut } \pi_p(F)$.

$$2) \text{ Si } i = 0, p = 1 \quad H_{t_1}^0(X^{(1)}, \pi_1(F)) = \pi_1(F)_{\pi_1(B)}$$

où $\pi_1(F)_{\pi_1(B)}$ est le sous-groupe de $\pi_1(F)$ laissé invariant par l'opérateur de $\pi_1(B)$ sur $\pi_1(F)$.

Ce lemme s'obtient en remarquant que l'application $C_i(X) \longrightarrow C_i(X^{(p)})$ est surjective pour $i = p-1$ et est un isomorphisme pour $i \leq p-1$, où $C_*(Y)$ est le complexe singulier de Y .

Le calcul des termes $E_1^{p,q}$ pour $p+q \leq 0$ est une conséquence du corollaire 3.4 et du lemme 4.2.

Il reste à calculer les termes $H^1(p, p+1)$ dans le cas où $\pi_1(F) = 0$.

L'ensemble des classes de fibrés de base $X^{(p)}$ et de fibre $K(\pi_p(F), p)$ est isomorphe à $[X^{(p)}, \overline{\text{WDK}}(\pi_p(F), p)]$. L'espace classifiant $\overline{\text{WDK}}(\pi_p(F), p)$ a une structure de fibré en groupes [4] : $K(\pi_p(F), p+1) \longrightarrow \overline{\text{WDK}}(\pi_p(F), p) \longrightarrow K(\text{Aut } \pi_p(F), 1)$. Ce fibré en groupes induit le fibré :

$$S(X^{(p)}, \overline{\text{WDK}}(\pi_p(F), p)) \longrightarrow S(X^{(p)}, K(\text{Aut } \pi_p(F), 1)).$$

On en déduit la suite exacte d'homotopie :

$$\begin{aligned} \text{Aut } \pi_p(F)_{\pi_1(B)} &\longrightarrow H_{t_p}^{p+1}(X^{(p)}, \pi_p(F)) \longrightarrow [X^{(p)}, \overline{\text{WDK}}(\pi_p(F), p)] \\ &\longrightarrow H^1(X^{(p)}, \text{Aut } \pi_p(F)). \end{aligned}$$

On vérifie ainsi que

$$H^1(p, p+1) = H_{t_p}^{p+1}(X^{(p)}, \pi_p(F)) / \text{Aut } \pi_p(F)_{\pi_1(B)}.$$

Convergence de la suite spectrale :

Pour démontrer que la suite spectrale est convergente il suffit de démontrer que la filtration est régulière et que le terme $E_\infty^{p,q}$ est la "limite" lorsque r tend vers $+\infty$ du terme $E_r^{p,q}$.

1) Sous les deux hypothèses du théorème, la filtration est régulière :

On considère le cas où la dimension de X est finie. L'application

de $E_B(X)$ dans $E_B(X^{(p)})$ est la restriction de l'application de $S_B(X)$ dans $S_B(X^{(p)})$. D'autre part $S_B(X^{(p)})$ est isomorphe à $S_B(X, X^{(p)})$. Le n -ième groupe d'homotopie de $S_B(X, X^{(p)})$ est identique à celui de $S_B(X)$ pour $p > n + \dim X$. Par conséquent si $\{f\}$ est un élément de $\pi_* E_B(X)$ nul dans $\pi_* E_B(X^{(p)})$ il est nul dans $\pi_* E_B(X)$.

Si $X \rightarrow B$ est tel que $\pi_i(F) = 0$ pour $i \geq k$, alors $X^{(p)}$ est isomorphe à X pour $p \geq k$ et $\mathfrak{F}^p \pi_n E_B(X) = 0$ pour $p \geq k$.

2) Le terme $E_\infty^{p,q}$ est la "limite" lorsque r tend vers $+\infty$ du terme $E_r^{p,q}$:

Si X est de dimension finie, l'isomorphisme de

$$\pi_{-(p+q)}(\mathfrak{G}_p^\infty) \text{ sur } \pi_{-(p+q)}(\mathfrak{G}_p^{p+r})$$

pour $r > \dim X - (2p + q)$ permet dans ce cas d'établir la convergence, en utilisant l'expression des termes $E_r^{p,q}$ et $E_\infty^{p,q}$ donnée dans [4].

Si $\pi_i(F) = 0$ pour $i \geq k$, la différentielle d_r est nulle pour r assez grand.

5. Applications.

Dans ce paragraphe on donne une méthode de calcul des classes d'équivalence $\mathfrak{G}(X) = \pi_0 E_B(X)$ pour des espaces X n'ayant que trois groupes d'homotopie, $\pi_i(X)$, non nuls pour $i \leq \dim X$. On obtient en particulier le calcul des classes d'équivalences d'homotopie pour tous les CW complexes de dimension 4 simplement connexes.

On étend au cas non simplement connexe un résultat de Shih [12] et on généralise le résultat de Tsukiyama [14] au cas d'espaces ayant trois groupes d'homotopie non nuls.

Si $X \rightarrow B$ est un fibré dont la fibre F n'a que deux groupes d'homotopie non nuls, soit $\pi_i(F) = G_i$, $i = k, m$ et $k < m$. Si $i = 1$ on suppose de plus que le groupe G_1 est abélien. Dans ce cas la suite spectrale (théorème 4.1) n'a que deux colonnes non nulles et on obtient par la méthode classique la suite exacte de Gysin :

THEOREME 5.1 (Suite exacte de Gysin). — Soit $X \rightarrow B$ un fibré de Kan dont la fibre F et la base sont connexes la fibre n'ayant que deux groupes d'homotopie non nuls ; soit $\pi_i(F) = G_i$ $i = k, m$ $k < m$. On suppose de plus que si $i = 1$, le groupe G_1 est abélien. Sous ces hypothèses, on a une suite exacte de Gysin :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_i(E_B(X)) \rightarrow H_i^{k-i}(B, G_k) \rightarrow H_i^{m-i+1}(X, G_m) \\ \rightarrow \pi_{i-1}(E_B(X)) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(E_B(X)) \rightarrow H_1^{k-1}(B, G_k) \\ \rightarrow E_1^{m,-m} \rightarrow \mathcal{E}_B(X) \rightarrow E_1^{k,-k} \rightarrow E_1^{m,-m+1} \end{aligned}$$

l'application $H_i^{k-i}(B, G_k) \rightarrow H_i^{m-i+1}(X, G_m)$ étant la différentielle d_{m-k} et les termes $E_1^{m,-m}, E_1^{k,-k}$ étant donnés par les suites exactes de groupes :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_1^m(X^{(m)}, G_m) \rightarrow E_1^{m,-m} \rightarrow \text{Aut}(G_m)_{\pi_1(X), \xi_2} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow H_1^k(B, G_k) \rightarrow E_1^{k,-k} \rightarrow \text{Aut}(G_k)_{\pi_1(B), \xi_1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Remarque. — On a montré (proposition 2.5) que

$$H^m(X^{(m)}, G) = K_B^m(X, G).$$

En prenant B réduit à un point, ce théorème généralise le résultat de Shih [12 corollaire 2] au cas non simplement connexe. En effet dans ce cas on a :

COROLLAIRE 5.2. — Si X est un CW complexe tel que $\pi_1(X) = G_1, \pi_m(X) = G_m$ $1 < m$, $\pi_i(X) = 0$ sinon, et G_1 étant un groupe abélien, on a la suite exacte :

$$1 \rightarrow H_1^m(G_1, G_m) \rightarrow \mathcal{E}(X) \rightarrow \text{Aut}(G_1)_{\xi} \oplus \text{Aut}(G_2)_{G_1, \xi}.$$

Soit $X \rightarrow B$ un fibré, on note $\mathcal{E}_B^\#(X)$ le sous groupe de $\mathcal{E}_B(X)$ formé des équivalences d'homotopie qui induisent l'identité sur les groupes d'homotopie de X . En appliquant le théorème 5.1 on retrouve le résultat de Tsukiyama [14 ; théorème 2.2].

COROLLAIRE 5.3. — Si X est un CW complexe n'ayant que deux groupes d'homotopie non nuls $\pi_i(X) = G_i$ $i = k, m$ $k < m$ on a $\mathcal{E}^\#(X) = H^m(G_k, k, G_m)$.

De plus, en utilisant le fait que $\mathcal{E}(X) \simeq \mathcal{E}(X^{(N+1)})$ si la dimension de X est N [1 ; lemme 5.1] on démontre :

PROPOSITION 5.4. — Soit X un CW complexe de dimension N n'ayant que trois groupes d'homotopie non nuls entre 1 et N : $\pi_s(X) = G_s$ $s = j, k, m$ avec $j < k < m \leq N$:

i) Si $1 < j < k < m$, on a la suite exacte :

$$\begin{aligned} H^{k-1}(G_j, j, G_k) &\longrightarrow H^m(X^{(m)}, G_m) \longrightarrow \mathcal{G}^\#(X) \\ &\longrightarrow H^k(G_j, j, G_k) \longrightarrow H^{m+1}(X^{(m)}, G_m). \end{aligned}$$

ii) Si $j = 1 < k < m$, le groupe G_1 opère sur $\pi_s(X)$, on note t cette opération. On a la suite exacte :

$$\begin{aligned} H_t^{k-1}(G_1, G_k) &\longrightarrow H_t^m(X^{(m)}, G_m) \longrightarrow \mathcal{G}^\#(X) \longrightarrow H_t^k(G_1, G_k) \\ &\longrightarrow H_t^{m+1}(X^{(m)}, G_m). \end{aligned}$$

PROPOSITION 5.5. — Soit X un CW complexe de dimension N . On suppose que X n'a que trois groupes d'homotopie non nuls entre 1 et N : $\pi_s(X) = G_s$ avec $s = 1, k, m$ $1 < k < m$ et $m \leq N$, alors :

i) Si G_1 est un groupe abélien libre de rang n on a : $\mathcal{G}^\#(X) = H_t^m(X^{(m)}, G_m)$ pour $k > n + 1$.

ii) Si G_1 est un groupe libre non abélien et $k > 2$ on a :

$$\mathcal{G}^\#(X) = H^m(G_k, k, G_m)_{G_1} \oplus H_t^1(G_1, H^{m-1}(G_k, k, G_m)).$$

Démonstration. — i) Si G_1 est libre de rang n , les groupes $H^p(G_1, G)$ sont nuls pour $p > n$ [5] soit $H_t^{k-1}(G_1, G_k) = 0$ pour $k > n + 1$. On applique la proposition (5.4) dans ce cas.

ii) Si G_1 est libre, non abélien, et $k > 2$, on a $H^p(G_1, G) = 0$ pour $p > 1$ [5] et donc on trouve $\mathcal{G}^\#(X) = H_t^m(X^{(m)}, G_m)$. Dans ce cas $X^{(m)} = K(G_k, k) \times_{G_1} K(G_1, 1)$ est fibré sur $K(G_1, 1)$. La suite spectrale de Serre de ce fibré dégénère et on déduit :

$$\mathcal{G}^\#(X) = H_t^0(G_1, H^m(G_k, k, G_m)) \oplus H_t^1(G_1, H^{m-1}(G_k, k, G_m)).$$

Pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer que

$$H_t^0(G_1, H^m(G_k, k, G_m)) = H^m(G_k, k, G_m)_{G_1}.$$

COROLLAIRE 5.6. — Soit X un CW complexe de dimension 4, simplement connexe. Posons $G_i = \pi_i(X)$ pour $2 \leq i \leq 4$. On a la suite exacte :

$$\begin{aligned} \text{Hom}(G_2, G_3) &\longrightarrow K^4(X, G_4) \longrightarrow \mathcal{E}^\#(X) \longrightarrow K^3(X, G_3) \\ &\hspace{15em} \longrightarrow H^5(X^{(4)}, G_4) \end{aligned}$$

le groupe $K^n(X, G)$ étant le noyau du composé naturel :

$$H^n(X, G) \xrightarrow{u} \text{Hom}(H_n(X), G) \xrightarrow{v} \text{Hom}(\pi_n(X), G)$$

(voir notation (2.4)).

Pour démontrer le corollaire, on applique le théorème (5.1) au fibré $X^{(5)} \longrightarrow X^{(3)} = K(G_2, 2)$ et on utilise l'isomorphisme $\mathcal{E}(X) \simeq \mathcal{E}(X^{(5)})$ [1].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARKOWITZ et C.R. CURJEL, Groups of homotopy classes, *Lecture Notes in mathematics*, Springer Verlag, 4 (1964).
- [2] W.D. BARCUS et M.G. BARRATT, On the homotopy classification of a fixed map, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88 (1958), 57-74.
- [3] G. DIDIERJEAN, Groupes d'homotopie du monoïde des équivalences d'homotopie fibrées, *C.R.A.S. Paris*, t. 292 (1981), 555-558.
- [4] A. LEGRAND, Homotopie des espaces de sections, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer Verlag, 941 (1981)
- [5] S. MAC LANE, *Homology*, Springer Verlag, (1963).
- [6] J.P. MAY, *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand, (1967)
- [7] S. OKA, On the group of self homotopy equivalences of H-spaces of low rank I. *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University*, Série A. Vol. 35 (1981), 247-282, 307-323.
- [8] P. OLUM, Self-equivalences of pseudo-projective planes, *Topology*, 4 (1965), 109-127.
- [9] J.W. RUTTER, The group of homotopy self-equivalence classes of CW complexes, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 93 (1983), 275-293.

- [10] N. SAWASHITA, On the group of self-equivalences of the product of spheres, *Hiroshima Math. J.*, 5 (1975), 69-86.
- [11] SCHELLENBERG, The group of homotopy self-equivalences of some compact CW complexes, *Math. Ann.*, 200 (1973), 253-266.
- [12] W. SHIH, On the group $\mathcal{E}(X)$ of homotopy equivalence maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 492 (1964), 361-365.
- [13] E.H. SPANIER, *Algebraic topology*, Mc Graw-Hill, (1966).
- [14] K. TSUKIYAMA, Self homotopy-equivalences of a space with two non-vanishing homotopy group, *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, Vol. 79, n° 1 (1980), 134-138.

Manuscrit reçu le 6 février 1984.

Geneviève DIDIERJEAN,
Institut de Recherche Mathématique avancée
Laboratoire associé au C.N.R.S.
Université Louis-Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex.