ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ERIC LEICHTNAM

Interactions de singularités pour une classe d'équations à caractéristiques doubles

Annales de l'institut Fourier, tome 35, nº 4 (1985), p. 151-161

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_4_151_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
35, 4 (1985), 151-161.

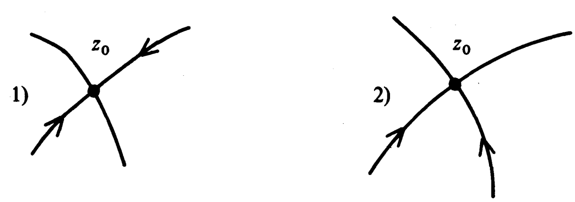
INTERACTIONS DE SINGULARITÉS POUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS À CARACTÉRISTIQUES DOUBLES

par Eric LEICHTNAM

1. Introduction.

La propagation des singularités dans les espaces de Sobolev pour les opérateurs pseudo-différentiels de type principal réel (le symbole principal p est réel et $dp \neq 0$ sur $p^{-1}(0)$) est étudiée dans [4]. On considère alors le problème d'interaction des singularités pour un opérateur pseudo-différentiel T à symbole principal réel et dont la variété caractéristique est la réunion de deux hypersurfaces lisses d'intersection non involutive.

Dans [3] Hanges construit pour l'opérateur T des paramétrices permettant d'étudier la propagation des singularités microlocales C^∞ dans les deux cas de figures possibles :



L'objet de ce travail est de préciser les résultats de Hanges dans le contexte microlocal Sobolev, le symbole sous-principal $\sigma(T)$ de l'opérateur T interviendra ici de manière essentielle. Dans le cas de figure 1), nous obtiendrons (moyennant une condition sur $\sigma(T)$) un résultat non linéaire en rajoutant à T des termes non linéaires d'ordre

Mots-clés : Équation aux dérivées partielles - Opérateur pseudo-différentiel - Caractéristiques - Espaces de Sobolev - Symbole sous-principal.

inférieur. Dans le contexte non linéaire la propagation des singularités pour les équations paradifférentielles de type principal réel est étudiée dans [1].

• Les résultats sont énoncés dans la partie 2 et démontrés dans les parties 3 et 4 : nous suivons de près Hanges (cf. [3]) et nous ramenons au modèle

$$\mathrm{L} = t\,\partial_t - \mathrm{B}(x,\mathrm{D}_x), \qquad z_0 = (x_0,0,\xi_0,0)$$

en multipliant T à gauche et à droite par des opérateurs intégraux de Fourier convenables. Nous reprenons alors en les modifiant les paramétrices de Hanges et étudions leur action sur les espaces H^s.

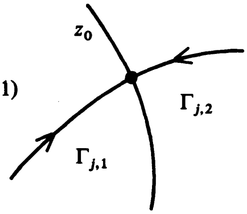
Rappelons que le spectre de u désigne le support de la transformée de Fourier $\hat{u}$ de u.

2. Énoncé des résultats.

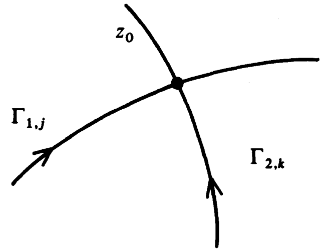
$\mathrm{L}_c^m(\mathbf{R}^{n+1})$ désigne l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels appartenant à $\mathrm{L}_{1,0}^m(\mathbf{R}^{n+1})$ et dont le symbole admet un développement asymptotique en termes homogènes de degré m, $m-1, \ldots$ Soit $z_0 \in \mathrm{T}^*\mathbf{R}^{n+1}\backslash 0$, on dit que v est microlocalement de classe H^t (resp. C^∞) en z_0, ce qu'on note $v \in \mathrm{H}^t_{z_0}$ (resp. $\mathrm{C}^\infty_{z_0}$) s'il existe $h \in \mathrm{L}_c^0(\mathbf{R}^{n+1})$ elliptique en z_0 tel que $h(x,\mathrm{D}).v \in \mathrm{H}^t$ (resp. C^∞). Soit alors $\mathrm{T} \in \mathrm{L}_c^m(\mathbf{R}^{n+1})$ dont le symbole principal est un produit $p_1 p_2$ où p_1 et p_2 sont à valeurs réelles et vérifient $p_1(z_0) = p_2(z_0) = 0$, $\{p_1,p_2\}(z_0) = 0$ (parenthèse de Poisson).

Notons $\Gamma_j : \mathrm{I} \to \mathrm{T}^*\mathbf{R}^{n+1}$ la bicaractéristique de p_j (courbe intégrale du champ hamiltonien de p_j) telle que $\Gamma_j(0) = z_0$, I étant un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, $j = 1,2$. Notons $\Gamma_{j,k}$ la restriction de Γ_j à $\mathrm{I}_k = \{t \in \mathrm{I} \mid (-1)^k t > 0\}$. Rappelons les deux cas de figures possibles :

1)



2)



Soit $F \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ à valeurs complexes, posons alors

$$P(u) = T(u) + F(x, \partial^\alpha u)_{|\alpha| \leqslant m-2-\ell} \qquad \text{où} \qquad \ell \in \mathbf{N}.$$

Nos résultats font l'objet des théorèmes 2.1, 2.2 et 2.4, ils précisent ceux de Hanges (cf. [3]) en décrivant la régularité H^s des solutions. Moyennant une condition sur le symbole sous-principal le théorème 2.1 s'applique à $P(u)$ et généralise le théorème 2.2 dans le cas non linéaire. Pour $j = 1, 2$ posons

$$M_j = \frac{(-1)^{j+1} i\sigma(T)(z_0)}{\{p_1, p_2\}(z_0)}.$$

THÉORÈME 2.1. — *Soient* ℓ *un entier naturel* $\leqslant m-2$ *et* s *un réel* $> m - 2 - \ell + \frac{n+1}{2}\cdot$ *Supposons* $M_j \notin 1/2 + \mathbf{N}$ *et* $\operatorname{Re} M_j < \ell$. *Soit* u *de classe* $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^{n+1})$ *et microlocalement de classe* $H^{t+\ell}$ *sur* $\Gamma_j \backslash z_0$ *tel que* Pu *soit microlocalement de classe* $H^{t-m+1+\ell}$ *en* z_0 *où* $2s + \ell + 3 - m - \frac{n+1}{2} \geqslant t \geqslant s$. *Alors* u *est microlocalement classe* H^t *en* z_0.

Preuve. — Montrons par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$ que le résultat est vrai pour $t \leqslant s + k$. Le cas $k = 0$ est trivial. Soit $k \in \mathbf{N}$, supposons le résultat vrai au rang k et considérons le cas où $t \leqslant s + k + 1$. Les résultats de [1] et l'hypothèse de récurrence montrent alors que $F(x, \partial^\alpha u)_{|\alpha| \leqslant m-2-\ell}$ est microlocalement de classe H^τ en z_0 où :

$$\tau = \min\left(2(s-m+2+\ell) - \frac{n+1}{2}, t-1+\ell+2-m\right).$$

Comme τ est exactement égal à $t - m + 1 + \ell$ le résultat découle du théorème suivant :

THÉORÈME 2.2. — *Soient* t *un réel et* $j \in \{1,2\}$. *Supposons* $M_j \notin \frac{1}{2} + \mathbf{N}$ *et* $\operatorname{Re} M_j < \ell$. *Soit* $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n+1})$ *telle que* u *soit microlocalement de classe* $H^{t+\ell}$ *sur* $\Gamma_j \backslash z_0$ *et* $T(u)$ *soit microlocalement de classe* $H^{t-m+1+\ell}$ *en* z_0. *Alors* $u \in H^t_{z_0}$.

Remarque 2.3. — Pour $\ell = 0$ on ne perd qu'une dérivée alors qu'on pourrait s'attendre à en perdre deux. Essayons d'expliquer ce phénomène :

dans la partie 3 nous nous ramènerons à un modèle dont le cas le plus simple est $L = t\,\partial_t - \lambda$ où $\lambda \in]-\infty, -1/2[$. Soient alors $c > 0$, σ un réel et f de classe $H^\sigma(\mathbf{R}^{n+1})$ telle que $\hat{f}(\xi,\tau)$ soit nulle pour $c|\xi| \leqslant |\tau|$. Comme $\rho^{-\lambda-3/2} \in L^1(]0,1[)$ le lemme 3.5 montre que v définie par

$$v(x,t) = \int_0^1 \rho^{-\lambda-1} f(x,\rho t)\, d\rho$$

vérifie $Lv = f$ et est de classe H^σ.

• La partie 3 est consacrée à la preuve des propositions 3.3 et 3.6 qui, vu l'invariance du symbole sous-principal sur les caractéristiques doubles, entraînent le théorème 2.2 dans les cas $\ell = 0$ et $\ell \in \mathbf{N}$ respectivement. Posons $M(z_0) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{i\sigma(T)}{\{p_1,p_2\}}(z_0)\right)$.

• La partie 4 est consacrée à la preuve du :

THÉORÈME 2.4. — *Soient* σ *un réel et* $j, k \in \{1,2\}$. *Posons* $N = 1 + [|M(z_0)|]$ ([ ] *désigne la partie entière*). *Considérons* $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n+1})$ *telle que* u *soit microlocalement de classe* $H^{\sigma+N}$ *sur* $\Gamma_{1,j}(I_j) \cup \Gamma_{2,k}(I_k)$ *et* Tu *soit microlocalement de classe* $H^{\sigma+1+N-m}$ *en* z_0. *Si* $M(z_0)$ *est non nul alors* $u \in H^\sigma_{z_0}$. *Si* $M(z_0) = 0$ *alors* $u \in H^{\sigma-1/2}_{z_0}$.

Remarque 2.5. — Le théorème met en évidence une perte de régularité en z_0 dépendant de $\sigma(T)$. Si $M(z_0) \neq 0$ cette perte (égale à N) peut être inférieure à celle (égale à $1 + [1/2 + |M(z_0)|]$) que laisse prévoir l'étude du problème de Cauchy (voir [5]) menée par Ivrii pour les opérateurs différentiels faiblement hyperboliques. De plus le théorème prend en compte des solutions dont la régularité microlocale peut être très faible.

3. Preuve du théorème 2.2.

Notations et Rappels 3.1. — Soit $B \in L^0_c(\mathbf{R}^n)$ dont le symbole vérifie des estimations uniformes, on note b_0 son symbole principal homogène. Posons $L = t\,\partial_t - B(x,D_x)$ et considérons $\alpha' \in]0,1/2[$.

$\tilde{S}^m(]0,1[\times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ désigne l'ensemble des fonctions $C^\infty a(\rho,y,\theta)$ telles que pour tout $j \in \mathbf{N}$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$ on ait :

$$\sup_{\substack{\rho \in]0,1] \\ y,\theta \in \mathbf{R}^n}} \frac{|\rho^{\alpha'}(\rho\partial_\rho)^j\, \partial_y^\alpha\, \partial_\theta^\beta a(\rho,y,\theta)}{(1+|\theta|)^{m-|\beta|}} < +\infty$$

$\tilde{S}^{-\infty}$ désigne l'intersection de tous les $\tilde{S}^m$. Nous modifions donc la définition de Hanges mais $\tilde{S}^m$ vérifiera les mêmes propriétés de calcul symbolique. Pour $a \in \tilde{S}^m$ on définit l'opérateur T_a en posant

$$T_a v(x,t) = \int_0^1 \int e^{i(x-y)\bullet\theta} a(\rho,y,\theta) v(y,\rho t)\, d\theta\, dy\, d\rho$$

où $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$. Dans [3] Hanges établit l'existence d'une paramétrice à gauche de L, on vérifie aisément qu'elle appartient à la classe $\tilde{S}^0$ considérée ici. Les résultats de [3] entraînent alors le :

LEMME 3.2. — *Soit* $\varepsilon > 0$. *Supposons que pour tout* $(x,\xi) \in T^*\mathbf{R}^n \backslash 0$ *on ait* $\operatorname{Re} b_0(x,\xi) \leqslant -1/2 - \varepsilon$. *Alors il existe* $(a,b) \in \tilde{S}^0 \times \tilde{S}^{-\infty}$ *tel que* $T_a L = I_d + T_b$. *En outre* $(x_0,0,\xi_0,0)$ *n'est pas dans le front d'onde* C^∞ *de* $T_a u_1$ *et* $T_b u_2$ *pourvu que* u_1 *et* u_2 *soient microlocalement* C^∞ *hors d'un petit voisinage conique de* $(x_0,0,\xi_0,0)$ *et que* u_1 *soit microlocalement* C^∞ *aux points* $(x_0,0,\xi_0,\tau)$ *pour tout* τ.

Vu l'invariance du symbole sous-principal sur les caractéristiques doubles la proposition suivante entraîne le théorème 2.2 dans le cas $\ell = 0$.

PROPOSITION 3.3. — *Soient* $\sigma \in \mathbf{R}$ *et* $(x_0,0,\xi_0,0) \in T^*\mathbf{R}^{2n+2} \backslash 0$. *Soit* $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n+1})$ *telle que* u *soit microlocalement de classe* H^σ *aux points* $(x_0,0,\xi_0,\tau)$ *pour tout* $\tau \in \mathbf{R}\backslash 0$ *et* Lu *soit microlocalement de classe* H^σ *en* $(x_0,0,\xi_0,0)$. *Supposons* $\operatorname{Re} b_0(x_0,\xi_0) < -1/2$. *Alors* $u \in H^\sigma_{(x_0,0,\xi_0,0)}$.

Preuve. — Quitte à modifier b_0 hors d'un voisinage conique de (x_0,ξ_0), on peut appliquer à L le lemme 3.2 qui assure l'existence d'une paramétrice du type $T_a L = I_d + T_b$. Il existe $c' > 0$ et $\chi \in L_c^0(\mathbf{R}^{n+1})$ dont le symbole vaut 1 dans un voisinage conique de $(x_0,0,\xi_0,0)$, est nul aux points (x,t,ξ,τ) vérifiant $c'|\xi| < |\tau|$, et tel que $\chi L u \in H^\sigma$. La relation $L\chi = \chi L + [L,\chi]$ et l'hypothèse faite sur u montrent que $L\chi u$ est microlocalement de classe H^σ aux points $(x_0,0,\xi_0,\tau)$ pour tout τ. On peut alors écrire $L\chi u = u_1 + u_2$ avec les propriétés suivantes : u_1 est microlocalement C^∞ aux points $(x_0,0,\xi_0,\tau)$ pour tout τ, u_2 est de classe H^σ, il existe $c > 0$ tel que u_2 ait son spectre dans $\{(\xi,\tau) | c|\xi| \geqslant |\tau|\}$.

Le lemme 3.2 assure alors que $(x_0,0,\varepsilon_0,0)$ n'est pas dans le front d'onde C^∞ de $T_a u_1$ et $T_b L\chi u$. La proposition découle alors de la :

PROPOSITION 3.4. — *Soient* $c > 0$, $\sigma \in \mathbf{R}$ *et* $a \in \tilde{S}^0$. *Considérons* v *de classe* $H^\sigma(\mathbf{R}^{n+1})$ *dont le spectre est contenu dans*

$A = \{(\xi,\tau) | c|\xi| \geqslant |\tau|\}$. *Alors :*

$$T_a v \in H^\sigma_{(x_0,0,\xi_0,0)}.$$

Preuve. — Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 3.5 *(Avec ces notations). — Pour* $\rho \in]0,1[$ *posons* $v_\rho(y,t) = v(y,\rho t)$. *Alors* v_ρ *est de classe* H^σ, *son spectre est inclus dans* A *et :*

$$|v_\rho|_{H^\sigma} \leqslant \text{cte}\ \rho^{-1/2}|v|_{H^\sigma}.$$

En outre $t \to v_\rho(y,t)$ *appartient à* $L^2(\mathbf{R},H^\sigma(\mathbf{R}^n))$ *et sa norme* L^2 *est majorée par* cte $|v_\rho|_{H^\sigma}$.

Preuve. — On vérifie que $\rho\hat{v}_\rho(\xi,\tau) = \hat{v}(\xi,\tau/\rho)$, d'où :

$$\rho|v_\rho|^2_{H^\sigma} = \int (1+|\xi|^2+|\rho\tau|^2)^\sigma|\hat{v}(\xi,\tau)|^2\, d\xi\, d\tau.$$

Quand (ξ,τ) décrit A nous avons une estimation du type :

$$\text{cte}\,(1+|\xi|^2+|\tau|^2)^\sigma \leqslant (1+|\xi|^2)^\sigma \leqslant \text{cte}\,(1+|\xi|^2+|\tau|^2)^\sigma.$$

On obtient alors facilement les résultats du lemme.

Soit $\rho \in]0,1]$ un paramètre, notons $a(\rho,\bullet,D)$ l'opérateur pseudo-différentiel (en (y,θ)) défini par le symbole $a(\rho,y,\theta)$. Les estimations vérifiées par $a \in \tilde{S}^0$ et le lemme précédent montrent que :

$$t \to a(\rho,\bullet,D)v_\rho(\bullet,t) \in L^2(\mathbf{R},H^\sigma(\mathbf{R}^n))$$

avec une norme L^2 majorée par cte $\rho^{-\alpha'-1/2}$. Comme $-\alpha' - 1/2 > -1$ on constate que $T_a v$ appartient à $L^2(\mathbf{R},H^\sigma)$, ce qui prouve la proposition 3.4.

La proposition suivante entraîne le théorème 2.2 :

PROPOSITION 3.6. — *Soient* $\ell \in \mathbf{N}$ *et* σ *un réel. Supposons que* $b_0(x_0,\xi_0) \notin \mathbf{N}$ *et que* $\operatorname{Re} b_0(x_0,\xi_0) < \ell - 1/2$. *Soit* $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n+1})$ *telle que* u *soit microlocalement de classe* $H^{\sigma+\ell}$ *aux points* $(x_0,0,\xi_0,\tau)$ *pour tout* $\tau \neq 0$ *et* Lu *soit microlocalement de classe* $H^{\sigma+\ell}$ *en* $(x_0,0,\xi_0,0)$. *Alors* $u \in H^\sigma_{(x_0,0,\xi_0,0)}$.

Preuve. — Nous suivons de près Hanges. On peut supposer que $\forall(x,\xi) \in \mathbf{T^*R}^n\backslash 0$ $\operatorname{Re} b_0(x,\xi) \leqslant \ell - \varepsilon - 1/2$ et que $b_0(x,\xi)$ n'appartient pas à $\mathbf{N}$ quand (x,ξ) est dans un voisinage conique V de (x_0,ξ_0). Le lemme 3.2 assure l'existence d'une paramétrice pour l'opérateur $\mathrm{L} - \ell \mathrm{I}_d$. Notons γ_j l'opérateur de $j^{\text{ème}}$ trace en $t = 0$ et M_ℓ l'opérateur défini par le reste de Taylor (en t) d'ordre ℓ. Hanges montre alors dans [3] qu'il existe $a \in \tilde{\mathrm{S}}^0$ et des opérateurs $(j-\mathrm{B})^{-1} \in \mathrm{L}_c^0(\mathbf{R}^{n+1})$, K, R_1, j variant de 0 à $\ell - 1$, tels que $\mathrm{KL} = \mathrm{I}_d + \mathrm{R}_1$ où :

$$\mathrm{K} = \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{t^j}{j\,!} (j-\mathrm{B})^{-1}\gamma_j + t^\ell \mathrm{M}_\ell \mathrm{T}_a\, \partial_t^\ell ,$$

R_1 est un opérateur dont le front d'onde est déterminé dans [3].

Les hypothèses faites sur u permettent de choisir $\chi \in \mathrm{L}_c^0(\mathbf{R}^{n+1})$ dont le symbole vaut 1 dans un voisinage conique (aussi petit que l'on veut) de $(x_0,0,\xi_0,0)$, est nul hors d'un voisinage un peu plus gros, tel que $\mathrm{L}\chi u$ soit microlocalement de classe $\mathrm{H}^{\sigma+\ell}$ aux points $(x_0,0,\xi_0,\tau)$ pour tout τ. On peut supposer qu'il existe $c > 0$ tel que χu soit microlocalement C^∞ aux points (x,t,ξ,τ) vérifiant $c|\xi| < |\tau|$.

$\mathrm{R}_1\chi u$ est alors (voir [3]) microlocalement C^∞ en $(x_0,0,\xi_0,0)$ et des arguments de localisation spectrale montrent alors que $\gamma_j \mathrm{L}\chi u$ est bien définie et microlocalement de classe $\mathrm{H}^{\ell+\sigma-j-1/2}$ en $(x_0,0,\xi_0,0)$.

On a

$$\begin{aligned}(\ell-1)\,!\, &\mathrm{M}_\ell \mathrm{T}_a\, \partial_t^\ell \mathrm{L}\chi u \\ &= \int_0^1 (1-\eta)^{\ell-1} \int_0^1 \int e^{i(x-y)\cdot\theta} a(\rho,y,\theta)(\partial_t^\ell \mathrm{L}\chi u)(y,\rho\eta t)\, d\theta\, dy\, d\rho\, d\eta\,.\end{aligned}$$

En reprenant l'étude faite pour les opérateurs T_a on vérifie aisément que ce terme est microlocalement de classe H^σ en $(x_0,0,\xi_0,0)$, ce qui prouve la proposition.

4. Preuve du théorème 2.4.

Reprenons les notations de la partie 2 et du théorème 2.4. Quitte à permuter p_1 et p_2 on peut supposer $\mathrm{M}(z_0) \leqslant 0$. Comme dans la partie 3 on se ramène à $\mathrm{L} = t\,\partial_t - \mathrm{B}(x,\mathrm{D}_x)$, $z_0 = (x_0,0,\xi_0,0)$. L'invariance du symbole sous-principal sur les caractéristiques doubles montre que

Re $b_0(x_0,\xi_0) = M(z_0) - 1/2$ est inférieur ou égal à $-1/2$. Cette partie 4 est consacrée à la preuve de la proposition 4.1 où, pour fixer les idées, nous avons choisi arbitrairement les deux demi-bicaractéristiques porteuses d'informations microlocales se rencontrant en z_0. Cette proposition entraîne le théorème 2.4.

PROPOSITION 4.1. — *Soit* $\sigma \in \mathbf{R}$ *et posons* $N = 1 + [|M(z_0)|]$. *Soit* $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n+1})$, *telle que* u *soit microlocalement de classe* $H^{\sigma+N}$ *aux points* $(x_0,t,\xi_0,0)$ *et* $(x_0,0,\xi_0,\tau)$ *pour tout* t *et* $\tau < 0$ *et telle que* Lu *soit microlocalement de classe* $H^{\sigma+N}$ *en* $(x_0,0,\xi_0,0)$.

Si $M(z_0) < 0$ [*resp.* $= 0$] *alors* u *est microlocalement de classe* H^σ [*resp.* $H^{\sigma-1/2}$] *en* $(x_0,0,\xi_0,0)$.

RAPPEL DE QUELQUES RÉSULTATS DE [3]. 4.2. — Soient $G_+ = \mathbf{C}\backslash\{z : z = i\theta, \theta \leqslant 0\} \cdot \mathscr{B}(G_+ \times G_+ ; S^m_{1,0}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n))$ désigne l'ensemble des fonctions $a(z,\omega,y,\xi)$ holomorphes sur $G_+ \times G_+$ à valeurs dans $S^m_{1,0}$ et « à croissance lente » quand z ou ω tend vers 0. Notons Y la fonction de Heaviside, pour $a \in \mathscr{B}(G_+ \times G_+ ; S^m_{1,0})$ on définit l'opérateur R_a en posant

$$(1) \quad R_a(v)(x,t) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} Y(t-s) a(s+i.0, t+i.0, y, \xi) v(y,s)\, dy\, ds\, d\xi$$

où $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$. Les résultats de Hanges permettent d'obtenir la :

PROPOSITION 4.3. — 1° *Il existe* a *appartenant à* $\mathscr{B}(G_+ \times G_+, S^0_{1,0})$ *et* b *appartenant à* $\mathscr{B}(G_+ \times G_+, S^{-\infty})$ *tels que*

$$t^N R_a L = t^N I_d + t^N R_b .$$

En outre, $(x_0,0,\xi_0,0)$ *n'est pas dans le front d'onde* C^∞ *de* $R_a u_1$ *et* $R_b u_2$ *pourvu que* u_1 *et* u_2 *soient microlocalement* C^∞ *hors d'un petit voisinage conique de* $(x_0,0,\xi_0,0)$ *et que* u_1 *soit microlocalement* C^∞ *aux points* $(x_0,t,\xi_0,0)$ *et* $(x_0,0,\xi_0,\tau)$ *pour tout* t *et* $\tau \leqslant 0$.

2° *Soit* σ_1 *un réel. Quitte à modifier* b_0 *hors d'un voisinage conique de* $(x_0,0,\xi_0,0)$ *on peut supposer, si* s *et* t *décrivent une partie bornée de* $\mathbf{R}^*$, *qu'il existe* $\varepsilon > 0$ *et* $c > 0$ *tels que les* $t^N\ a(s,t,y,\theta)$ *définissent une famille d'opérateurs pseudo-différentiels en* (y,θ) *d'ordre* 0 *opérant dans* H^{σ_1} *avec une norme majorée par* $c|t|^{\varepsilon-1/2}|s|^{\varepsilon-1/2}$ *si* $M(z_0) < 0$, *par* $c|t|^{\varepsilon-1/2}|s|^{-\varepsilon-1/2}$ *si* $M(z_0)$ *est nul.*

Preuve. — Le 1°) est dû à Hanges. On montre aisément le 2°) en utilisant le fait que le symbole a admet un développement asymptotique où le terme de degré $-k$ est une somme finie de termes du type :

$$s^{-b_0(y,-\varepsilon)-1}t^{b_0(y,-\varepsilon)}(\log s)^{\ell}(\log t)^{j}h_{-k}(y,\xi)$$

où $\ell, j \in \mathbf{N}$ et $h_{-k}(y,\xi)$ appartient à $S^{-k}_{1,0}$.

PROPOSITION 4.4. — *Soit* u *comme dans la proposition* 4.2. *Supposons* $M(z_0) < 0$ [*resp.* $M(z_0) = 0$]. *Alors il existe* $\chi \in L^0_c(\mathbf{R}^{n+1})$ *elliptique en* $(x_0, 0, \xi_0, 0)$ *tel que* $t^N\chi u$ *soit microlocalement de classe* $H^{\sigma+N}$ [*resp.* $H^{\sigma+1/2}$] *au point* $(x_0, 0, \xi_0, 0)$.

Preuve de la proposition 4.1 *à partir de la proposition* 4.4. — Comme χu est microlocalement de classe $H^{\sigma+N}$ aux points $(x_0, 0, \xi_0, \tau)$ pour tout $\tau < 0$, la proposition découle de N applications successives du théorème classique de propagation de singularités (cf. [4]) à l'opérateur qu'est la multiplication par t.

Preuve de la proposition 4.4. — Il existe $c' > 0$ et $\chi \in L^0_c(\mathbf{R}^{n+1})$ dont le symbole vaut 1 dans un voisinage conique de $(x_0, 0, \xi_0, 0)$, est nul aux points (x,t,ξ,τ) vérifiant $c'|\xi| < |\tau|$, et tel que $\chi L u \in H^{\sigma+N}$. La relation $L\chi = \chi L + [L,\chi]$ et l'hypothèse faite sur u montrent que $L\chi u$ est microlocalement de classe $H^{\sigma+N}$ aux points $(x_0, 0, \xi_0, \tau)$ et $(x_0, t, \xi_0, 0)$ pour tout t et $\tau \leqslant 0$. On peut alors écrire $L\chi u = v + v'$ avec les propriétés suivantes : v' est microlocalement C^∞ aux points $(x_0, 0, \xi_0, \tau)$ et $(x_0, t, \xi_0, 0)$ pour tout t et $\tau \leqslant 0$; v est à support compact, de classe $H^{\sigma+N}$ et il existe $c > 0$ tel que v soit microlocalement C^∞ aux points (x,t,ξ,τ) vérifiant $c|\xi| < |\tau|$. Avec les notations de la proposition 4.3 on a :

$$t^N R_a L\chi u = t^N \chi u + t^N R_b \chi u .$$

La proposition 4.3 assure que $(x_0, 0, \xi_0, 0)$ n'est pas dans le front d'onde C^∞ de $t^N R_a v'$, $t^N R_b \chi u$. La proposition découle alors du :

LEMME 4.5. *(avec ces notations).* — *Si* $M(z_0) < 0$ [*resp.* $= 0$] *alors* $t^N R_a v$ *est microlocalement de classe* $H^{\sigma+N}$ [*resp.* $H^{\sigma+1/2}$] *en* $(x_0, 0, \xi_0, 0)$.

Preuve. — Comme $\operatorname{supp} v$ est compact on peut se contenter d'intégrer en s, dans l'expression (1) définissant R_a, de $-T_1$ à t pourvu que T_1 soit assez grand. Désignons par $A_{s,t}$ l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $t^{\mathrm{N}}a(s,t,y,\theta)$, on a l'égalité :

$$(2) \qquad t^{\mathrm{N}}(\mathrm{R}_a v)(x,t) = \int_{-\mathrm{T}_1}^{t} \mathrm{A}_{s,t} v(.,s)\, ds.$$

Cela dit on peut écrire $v = v_1 + v_2$ où v_2 est C^∞, v_1 est de classe $\mathrm{H}^{\sigma+\mathrm{N}}$, le spectre de v_1 est inclus dans $\{(\xi,\tau) | |\xi| \geqslant c_1|\tau|\}$ pour $c_1 > 0$ convenable. Le lemme 3.5 (avec $\rho = 1$) montre que $s \to v_1(.,s)$ appartient à $\mathrm{L}^2(\mathbf{R},\mathrm{H}^{\sigma+\mathrm{N}}(\mathbf{R}^n))$, sa norme L^2 étant majorée par cte $|v_1|_{\mathrm{H}^{\sigma+\mathrm{N}}}$.

1^er^ *cas* : Supposons $\mathrm{M}(z_0) < 0$. D'après la proposition 4.3 la norme de $\mathrm{A}_{s,t}$ est majorée par cte $|t|^{\varepsilon-1/2}|s|^{\varepsilon-1/2}$, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (2) on obtient alors (pour $|t| \leqslant 1$) :

$$|t^{\mathrm{N}}(\mathrm{R}_a v_1)(.,t)|_{\mathrm{H}^{\sigma+\mathrm{N}}(\mathbf{R}^n)} \leqslant \text{cte}\, |v_1|_{\mathrm{H}^{\sigma+\mathrm{N}}} |t|^{\varepsilon-1/2}.$$

Donc $t \to t^{\mathrm{N}}\mathrm{R}_a v_1$ appartient à $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},\mathrm{H}^{\sigma+\mathrm{N}})$.

2^ème^ *cas :* Supposons $\mathrm{M}(z_0) = 0$, alors $\mathrm{N} = 1$. D'après la proposition 4.3 la norme de $\mathrm{A}_{s,t}$ est majorée par cte $\times\ |t|^{\varepsilon-1/2} \times |s|^{-\varepsilon-1/2}$, or $|s|^{-\varepsilon-1/2}$ n'est pas de classe L^2 au voisinage de 0. Comme le spectre de v_1 est inclus dans $\{(\xi,\tau) | |\xi| \geqslant c_1|\tau|\}$, les traces en s sont bien définies et il existe alors $c > 0$ tel que pour tout s on ait :

$$|v_1(.,s)|_{\mathrm{H}^{\sigma+1/2}} \leqslant c|v_1|_{\mathrm{H}^{\sigma+1}(\mathbf{R}^{n+1})}.$$

Comme $|s|^{-\varepsilon-1/2}$ appartient à $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ on obtient l'inégalité (pour $|t| \leqslant 1$) :

$$|t^{\mathrm{N}}\mathrm{R}_a v_1(.,t)|_{\mathrm{H}^{\sigma+1/2}(\mathbf{R}^n)} \leqslant \text{cte}\, |t|^{\varepsilon-1/2}|v_1|_{\mathrm{H}^{\sigma+1}}.$$

Donc $t \to t^{\mathrm{N}}\mathrm{R}_a v_1$ appartient à $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},\mathrm{H}^{\sigma+1/2})$.

Enfin il est clair que $t^{\mathrm{N}}\mathrm{R}_a v_2$ est microlocalement C^∞ en $(x_0,0,\xi_0,0)$. Le lemme est donc démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4^e^ série, t. 14 (1981).

[2] R. Coifman, Y. Meyer, Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, *Astérisque*, vol. 57 (1978).

[3] N. Hanges, Parametrices and propagation of singularities for operators with non-involutive characteristics, *Indiana University*, *Math. Journal*, vol. 28, N° 1 (1979).

[4] L. Hormander, On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential equations, *Ens. Math.*, 17 (1971).

[5] V. Ivrii, Sufficient conditions for regular and completely regular hyperbolicity, *Trans. Moscow Math. Soc.*, issue 1 (1978).

Manuscrit reçu le 24 avril 1984
révisé le 10 janvier 1985.

Éric Leichtnam,
École Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75005 Paris.