Annales de l'institut Fourier

Alain Louveau

Sur la génération des fonctions boréliennes fortement affines sur un convexe compact métrisable

Annales de l'institut Fourier, tome 36, nº 2 (1986), p. 57-68

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_2_57_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 2 (1986), 57-68.

SUR LA GÉNÉRATION DES FONCTIONS BORÉLIENNES FORTEMENT AFFINES SUR UN CONVEXE COMPACT MÉTRISABLE

par Alain LOUVEAU

Introduction.

Soit K un convexe compact métrisable d'un espace vectoriel topologique localement convexe, et $\mathscr{A}(K)$ l'espace vectoriel des fonctions affines continues sur K. Nous noterons $\mathscr{B}(K)$ l'espace des fonctions fortement affines boréliennes sur K, c'est-à-dire des fonctions boréliennes sur K qui satisfont aux égalités barycentriques : Pour toute probabilité μ sur K de barycentre $b(\mu)$, on a l'égalité $\int_K f\,d\mu = f(b(\mu))$. (Par un résultat de G. Choquet, ces fonctions sont nécessairement bornées sur K; cf. [2]).

Le problème que nous allons étudier est celui de la génération des fonctions de $\mathscr{B}(K)$. Dans [2], G. Choquet montre que toute fonction affine de première classe de Baire sur K est fortement affine, et limite simple d'une suite de fonctions de $\mathscr{A}(K)$. Par contre un contrexemple de Talagrand [5] montre qu'en général l'itération, même transfinie, de l'opération de limite simple ne permet pas d'atteindre toutes les fonctions de $\mathscr{B}(K)$ qui sont de seconde classe de Baire.

Le résultat principal de ce travail est qu'il existe cependant un moyen canonique d'engendrer $\mathscr{B}(K)$ à partir de $\mathscr{A}(K)$:

THÉORÈME 1. — *Il existe un filtre, noté* $G\mathscr{N}$, *sur l'ensemble* ω *des entiers, tel que pour tout convexe compact métrisable* K, *l'ensemble* $\mathscr{B}(K)$ *soit exactement l'ensemble des limites simples selon ce filtre des suites bornées de fonctions de* $\mathscr{A}(K)$.

Mots-clés : Convexes compacts - Fonctions boréliennes - Calcul barycentrique - Limites simples - Filtres coanalytiques.

Dans une première partie, nous définissons le filtre $G\mathcal{N}$, et établissons ses principales propriétés combinatoires. En particulier, nous prouvons pour ce filtre un analogue du théorème de convergence de Lebesgue : Si μ est une probabilité sur un compact métrisable E et (f_n) une suite bornée de fonctions μ-mesurables sur E, convergeant selon le filtre $G\mathcal{N}$ vers une fonction f, alors la limite est μ-mesurable, et $\mu(f) = \lim_{G\mathcal{N}} \mu(f_n)$.

La seconde partie est consacrée à la démonstration du théorème 1, et la dernière partie à un autre résultat de génération par limite simple selon $G\mathcal{N}$, pour les fonctions bianalytiques sur un métrisable séparable.

1. Le filtre $G\mathcal{N}$.

Nous notons ω l'ensemble des entiers, et S l'ensemble des suites finies d'entiers. Si u et v sont des éléments de S, $u^\frown v$ désigne la concaténée des deux suites, $|u|$ la longueur de la suite u; nous confondrons souvent un entier et la suite de longueur 1 correspondante. L'ensemble S est un arbre pour l'ordre $\subset$ de restriction, défini par $u \subset v$ si u est un segment initial de v. La suite vide est notée $\varnothing$.

Pour des raisons de commodité, nous allons définir le filtre $G\mathcal{N}$ sur S (ce qui, moyennant une bijection avec ω, est tout à fait inessentiel). Soit donc A une sous-partie de S. Considérons le jeu infini J(A) où deux joueurs, notés I et II, choisissent alternativement des entiers n_0, m_0, $n_1, m_1, \ldots$, assujettis à la condition $m_i \geqslant n_i$. Le joueur I gagne la partie $(n_0,m_0,n_1,m_1,\ldots)$ de J(A) s'il existe un entier k tel que pour tout élément u de S, la suite $(m_0,m_1,\ldots,m_{k-1})^\frown u$ est dans A.

Nous définissons l'ensemble $G\mathcal{N}$ comme l'ensemble des parties A de S pour lesquelles le joueur I possède une stratégie gagnante dans le jeu J(A).

LEMME 1. — *L'ensemble* $G\mathcal{N}$ *est un filtre sur* S, *coanalytique dans* $\{0,1\}^S$ *(muni de la topologie usuelle).*

Démonstration. — Le jeu J(A) est ouvert, uniformément en A inclus dans S; par suite, l'un des deux joueurs a toujours une stratégie gagnante dans J(A). Soit $\check{A} = \{u \in S \mid \exists v, u^\frown v \notin A\}$, et notons, pour $f : S \to \omega$ et $u = (u_0,\ldots,u_{k-1})$, $\bar{f}(u) = (f((u_0)), f((u_0,u_1))\ldots,f(u))$. On a alors :

$$\begin{aligned} A \notin G\mathcal{N} &\leftrightarrow \text{I n'a pas de stratégie gagnante dans } J(A),\\ &\leftrightarrow \text{II a une stratégie gagnante dans } J(A),\\ \leftrightarrow \exists f : S \to \omega \quad &\forall u = (u_0,\ldots,u_{k-1})(f(u) \geqslant u_{k-1} \text{ et } \bar{f}(u) \in \check{A}). \end{aligned}$$

Un calcul facile montre alors que $\mathrm{G}\mathscr{N}$ est coanalytique. D'autre part il est clair que toute stratégie gagnante pour I dans un jeu $\mathrm{J}(\mathrm{A})$ reste encore gagnante dans les jeux $\mathrm{J}(\mathrm{B})$, où B est un sur-ensemble de A, et que I perd $\mathrm{J}(\varnothing)$. Finalement, si σ_1 et σ_2 sont des stratégies gagnantes pour I dans $\mathrm{J}(\mathrm{A}_1)$ et $\mathrm{J}(\mathrm{A}_2)$ respectivement, on vérifie que la stratégie définie comme sup ponctuel des stratégies σ_1 et σ_2 est gagnante dans le jeu $\mathrm{J}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2)$.

L'analyse (habituelle pour les jeux ouverts) de la notion de stratégie gagnante fournit une définition équivalente du filtre $\mathrm{G}\mathscr{N}$ qui va nous servir à établir ses propriétés combinatoires.

Si C est une partie de S, on définit une dérivation $d(\mathrm{C})$ par $d(\mathrm{C}) = \{u \in \mathrm{C} : \{n : u^\frown n \in \mathrm{C} \text{ est infini}\}\}$, puis par induction sur l'ordinal ξ, $d_1(\mathrm{C}) = \mathrm{C}$, $d_{\xi+1}(\mathrm{C}) = d(d_\xi(\mathrm{C}))$, et $d_\xi(\mathrm{C}) = \bigcap_{\eta<\xi} d_\eta(\mathrm{C})$ si ξ est limite. Enfin nous posons $d_\infty(\mathrm{C}) = d_{\aleph_1}(\mathrm{C}) = \bigcap_{\xi} d_\xi(\mathrm{C})$. (Noter que comme C est dénombrable, l'intersection précédente l'est aussi). Pour A inclus dans S, nous désignons par $\check{\mathrm{A}}$ l'arbre $\{u \in \mathrm{S} \mid \exists v, u^\frown v \notin \mathrm{A}\}$, et posons $h(\mathrm{A}) = \sup\{\xi < \aleph_1 : \varnothing \in d_\xi(\check{\mathrm{A}})\}$, avec $h(\mathrm{A}) = 0$ si $\varnothing \notin \check{\mathrm{A}}$.

LEMME 2. — (i) $\mathrm{G}\mathscr{N} = \{\mathrm{A} \subset \mathrm{S} : h(\mathrm{A}) < \aleph_1\}$.

(ii) *Soit* ξ *un ordinal dénombrable, et* $\mathscr{N}_\xi = \{\mathrm{A} \subset \mathrm{S} : h(\mathrm{A}) \leqslant \xi\}$. *L'ensemble* $\mathscr{N}_\xi$ *est un filtre borélien sur* S, *et la famille* $(\mathscr{N}_\xi)_{\xi<\aleph_1}$ *forme une famille de constituants du coanalytique* $\mathrm{G}\mathscr{N}$.

(iii) *Notons, pour* $\mathrm{A} \subset \mathrm{S}$, $n^\frown \mathrm{A} = \{n^\frown u : u \in \mathrm{A}\}$, *et pour* $\mathscr{F}$ *un filtre sur* S, $n^\frown \mathscr{F}$ *le filtre engendré par les* $n^\frown \mathrm{A}$, $\mathrm{A} \in \mathscr{F}$. *On a avec ces notations :*

(a) $\mathscr{N}_0 = \{\mathrm{S}\}$,

(b) *pour* $\xi > 0$, $\mathscr{N}_\xi = \liminf_n \left(n^\frown \bigcup_{\eta<\xi} \mathscr{N}_\eta \right)$,

(c) $\mathrm{G}\mathscr{N} = \liminf_n (n^\frown \mathrm{G}\mathscr{N})$.

Démonstration. — (i). Supposons avoir $h(\mathrm{A}) = \aleph_1$, c'est-à-dire que la suite $\varnothing$ est dans $d_\infty(\check{\mathrm{A}}) = d(d_\infty(\check{\mathrm{A}}))$. Par définition de la dérivation d, il existe une infinité d'entiers m tels que $m \in d_\infty(\check{\mathrm{A}}) = d(d_\infty(\check{\mathrm{A}}))$, donc pour chacun d'eux une infinité d'entiers p tels que $\langle m,p \rangle \in d_\infty(\check{\mathrm{A}})$, etc... Par suite le joueur II a une stratégie lui permettant de toujours jouer dans $d_\infty(\check{\mathrm{A}})$, donc *a fortiori* dans $\check{\mathrm{A}}$, et A n'est pas dans $\mathrm{G}\mathscr{N}$. Réciproquement si A n'est pas dans $\mathrm{G}\mathscr{N}$, le joueur II a une stratégie gagnante dans $J(A)$, et l'arbre T des suites jouées par II en suivant sa stratégie en réponse aux jeux possibles de I satisfait $\varnothing \in T \subset \check{A}$, et $d(T) = T$; par suite $\varnothing \in T \subset d_\infty(\check{A})$ et $h(A) = \aleph_1$.

(ii). C'est une conséquence de (i) et (iii) : Les égalités de (*a*) et (*b*) assurent que les ensembles $\mathcal{N}_\xi$ sont des filtres, et (*b*) fournit une définition inductive G_δ de la suite $(\mathcal{N}_\xi)_{\xi<\aleph_1}$, de point fixe $G\mathcal{N}$. Par suite les $\mathcal{N}_\xi$ sont boréliens, et constituants du coanalytique $G\mathcal{N}$.

(iii). (*a*) est immédiat. Pour (*b*), soit $\xi > 0$. On a par définition $A \in \mathcal{N}_\xi$ si et seulement si $\varnothing \notin d_{\xi+1}(\check{A})$, si et seulement si pour un entier n_0 on a $n \notin d_\xi(\check{A})$ pour $n \geqslant n_0$. Soit $A_n = \{u : n^\frown u \in A\}$. On vérifie que $\check{A}_n = \{u : n^\frown u \in \check{A}\}$, puis par induction que pour tout ordinal η, on a $d_\eta(\check{A}_n) = \{u : n^\frown u \in d_\eta(\check{A})\}$. Par suite $n \notin d_\xi(\check{A})$ si et seulement si il existe un $\eta < \xi$ tel que $A_n \in \mathcal{N}_\eta$, et l'égalité de (*b*) est vérifiée. (*c*) est analogue.

Remarques. — 1. Des filtres proches des filtres $\mathcal{N}_\xi$ ont été déjà étudiés dans la littérature, en liaison avec le théorème de Hausdorff-Lebesgue sur la génération des fonctions boréliennes dans les espaces polonais (cf. [4]).

2. On peut de manière plus générale définir un opérateur de jeu G sur les filtres $\mathcal{F}$ sur ω, en définissant $G\mathcal{F}$ comme l'ensemble des parties A de S pour lesquelles le joueur I a une stratégie gagnante dans le jeu $J_\mathcal{F}(A)$ où I joue des éléments $F_0, F_1, \ldots$ de $\mathcal{F}$, II joue des entiers $m_0, m_1, \ldots$ assujettis à la condition $m_i \in F_i$, et la règle de gain est la même que précédemment. On retrouve le filtre $G\mathcal{N}$ en partant du filtre de Fréchet sur ω (qui est habituellement noté $\mathcal{N}$, d'où notre notation -la notation G faisant référence à l'opérateur de Moschovakis, cf [6]). Il est possible d'associer à $G\mathcal{F}$ une dérivation (prendre

$$d_\mathcal{F}(C) = \{u \in C : \{n : u^\frown n \notin C\} \notin \mathcal{F}\})$$

et d'obtenir des résultats très analogues à ceux du lemme précédent.

Nous allons maintenant utiliser le lemme 2 pour l'étude des opérations de limite selon $G\mathcal{N}$. Rappelons que si $\mathcal{F}$ est un filtre sur S, on définit pour une suite $(A_u)_{u\in S}$ de parties d'un ensemble E

$$\liminf_\mathcal{F}(A_u) = \{x \in E : \{u \in S : x \in A_u\} \in \mathcal{F}\},$$

$$\limsup_\mathcal{F}(A_u) = E - \liminf_\mathcal{F}(E - A_u)$$

et, lorsque $\liminf_{\mathscr{F}} (A_u) = \limsup_{\mathscr{F}} (A_u) = A$, on dit que A est la limite selon $\mathscr{F}$ des A_u, ce qui est noté $\lim_{\mathscr{F}} (A_u) = A$. On définit de façon analogue les notions de $\liminf_{\mathscr{F}}$, $\limsup_{\mathscr{F}}$ et limite pour les suites de fonctions numériques sur E.

Des calculs faciles permettent de démontrer le lemme suivant :

LEMME 3. — *Soient* (A_u) *une suite de boréliens d'un espace métrisable compact* E, (f_u) *une suite bornée de fonctions boréliennes sur* E, *et* $\mathscr{F}$ *un filtre coanalytique (resp. borélien) dans* $\{0,1\}^S$. *Alors les ensembles* $\liminf_{\mathscr{F}} A_u$, $E - \limsup_{\mathscr{F}} A_u$, $\{(x,t) \in E \times \mathbf{R} : \liminf_{\mathscr{F}} f_u(x) > t\}$ *et* $\{(x,t) : \limsup_{\mathscr{F}} f_u(x) < t\}$ *sont coanalytiques (resp. boréliens). En particulier, si* $\lim_{\mathscr{F}} A_u$ *ou* $\lim_{\mathscr{F}} f_u$ *existent, ils sont boréliens.*

LEMME 4. — *Soit* E *un espace métrisable compact,* μ *une mesure positive sur* E, *et* $(f_u)_{s \in S}$ *une suite bornée de fonctions* μ*-mesurables. La fonction* $f = \liminf_{G\mathscr{N}} f_u$ *est* μ*-mesurable, et* $\mu(f) \leqslant \liminf_{G\mathscr{N}} \mu(f_u)$. *En particulier, si la suite* f_u *converge simplement vers* f *selon* $G\mathscr{N}$, *alors* $\mu(f) = \lim_{G\mathscr{N}} \mu(f_u)$.

Démonstration. — Quitte à travailler à un ensemble μ-négligeable près, on peut supposer les fonctions f_u boréliennes. Par le lemme 3, la fonction f est alors à sous-graphe coanalytique, donc universellement mesurable. Posons $f_\xi = \liminf_{\mathscr{N}} (f_u)$. Chaque fonction f_ξ est borélienne par le lemme 3, et l'on a $f = \sup_{\xi < \aleph_1} (f_\xi)$. Nous disons que puisque par le lemme 2 les $\mathscr{N}_\xi$ sont des constituants de $G\mathscr{N}$, il existe un ordinal ξ_0 tel que $f = f_{\xi_0}$ μ p.p. En effet, pour $\varepsilon > 0$ donné, considérons une fonction borélienne g_ε satisfaisant $g_\varepsilon < f$ et $\mu(f - g_\varepsilon) < \varepsilon$. Pour chaque x de E, on a par l'inégalité $g_\varepsilon < f$ que l'ensemble $A_x = \{u \in S : g_\varepsilon(x) < f_u(x)\}$ est dans $G\mathscr{N}$. Par suite l'ensemble $G_\varepsilon = \{A_x : x \in E\}$ est un sous-ensemble analytique de $G\mathscr{N}$, et par le théorème de la borne il existe un ordinal dénombrable $\xi(\varepsilon)$ tel que $G_\varepsilon \subset \mathscr{N}_{\xi(\varepsilon)}$, et donc $g_\varepsilon \leqslant f_{\xi(\varepsilon)}$. L'ordinal $\xi_0 = \sup_n \xi\left(\frac{1}{n}\right)$ convient clairement.

Pour cet ordinal, on a $\mu(f) = \mu(f_{\xi_0})$ et $\liminf_{\mathcal{N}_{\xi_0}} \mu(f_u) \leqslant \liminf_{G\mathcal{N}} \mu(f_u)$; il suffit donc, pour obtenir la première assertion, de démontrer pour tout ξ l'inégalité $\mu(f_\xi) \leqslant \liminf_{\mathcal{N}_\xi} \mu(f_u)$.

C'est immédiat pour $\xi = 0$. Supposons l'avoir vérifiée pour tout $\eta < \xi$; par l'égalité iii (*b*) du lemme 2, on a $f_\xi = \liminf_n \sup_{\eta<\xi} \liminf_{\mathcal{N}_n} f_u^n$, où $f_u^n = f_{n^\frown u}$. Par suite par l'inégalité de Fatou, convergence monotone et l'hypothèse d'induction, on obtient l'inégalité désirée. Enfin, la seconde assertion se déduit de la première, appliquée à (f_u) et $(-f_u)$.

2. Fonctions boréliennes fortement affines.

Nous reprenons le cadre de l'introduction : K est un convexe compact métrisable, $\mathcal{A}(K)$ l'espace vectoriel des fonctions affines continues sur K et $\mathcal{B}(K)$ celui des boréliennes fortement affines (bornées). Notre but est de montrer que $\mathcal{B}(K)$ coïncide avec l'ensemble des limites simples selon $G\mathcal{N}$ de suites bornées d'éléments de $\mathcal{A}(K)$.

L'une des directions se déduit des résultats de la section précédente : Si (f_u) est une suite bornée de fonctions affines continues de limite selon $G\mathcal{N}$ la fonction f, alors f est borélienne par le lemme 3, et de plus si μ est une probabilité de barycentre x sur K, on a par le lemme 4 les égalités $\mu(f) = \lim_{G\mathcal{N}} \mu(f_u) = \lim_{G\mathcal{N}} f_u(x) = f(x)$, et f est fortement affine.

Pour démontrer l'inclusion inverse, nous allons utiliser le théorème de capacitabilité de Choquet, sous la forme suivante :

THÉORÈME (G. Choquet) [1]. — *Soient* E *et* F *deux espaces métrisables compacts, et* C *une fonction de* $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ *dans* $\bar{\mathbf{R}}_+$ *qui est croissante* ($A \subset A'$ *et* $B \subset B'$ *impliquent* $C(A,B) \leqslant C(A',B')$) *et montante* (*si les* A_n *tendent en croissant vers* A, *les* B_n *tendent en croissant vers* B, *alors* $C(A,B) = \sup_n C(A_n,B_n)$). *Si* A *et* B *sont deux analytiques de* E *et* F *respectivement, et* t *est tel que* $C(A,B) > t$, *il existe deux suites décroissantes* (H_n) *et* (L_n) *de compacts telles que pour tout* n $C(H_n,L_n) > t$, $H = \bigcap_n H_n$ *est contenu dans* A, *et* $L = \bigcap_n L_n$ *est contenu dans* B.

Fixons une fonction f de $\mathcal{B}(K)$, que nous pouvons supposer à valeurs dans $]-1,+1[$. Soit $E = F = K \times [-1,+1]$ et définissons une fonctionnelle C sur $\mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(F)$ par :

$$C(A,B) = \begin{cases} 0 & \text{s'il existe une suite } (f_u)_{u \in S}, \text{ bornée par } 1, \text{ de fonctions} \\ & \text{de } \mathscr{A}(K) \text{ satisfaisant :} \\ & \text{(i) } A \subset \liminf\limits_{G\mathscr{N}} \{(x,t) \in E : f_u(x) > t\}. \\ & \text{(ii) } B \subset \limsup\limits_{G\mathscr{N}} \{(x,t) \in E : f_u(x) < t\}. \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction C est clairement croissante.

LEMME 5. — *La fonction* C *est montante.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que si A est réunion croissante des A_n, B est réunion croissante des B_n et pour tout n $C(A_n,B_n) = 0$, alors $C(A,B) = 0$. Choisissons pour chaque n une suite (f_u^n) qui témoigne que $C(A_n,B_n) = 0$, et posons $g_u = f_v^n$ si $u = n^\frown v$ (et $g_\varnothing = 0$). Nous disons que la suite g_u témoigne que $C(A,B) = 0$. Montrons (i), (ii) étant analogue. Soit donc (x,t) appartenant à A; comme la suite A_n est croissante, (x,t) est dans A_n pour n assez grand, et pour n assez grand on a $\{u : f_u^n(x) > t\} \in G\mathscr{N}$. D'après l'égalité (iii c) du lemme 2, on en déduit que $\{u : g_u(x) > t\}$ est dans $G\mathscr{N}$, et (i) est vérifié.

Posons $A_0 = \{(x,t) \in E : f(x) > t\}$ et $B_0 = \{(x,t) : f(x) < t\}$. La fonction f étant borélienne, A_0 et B_0 sont analytiques, et par le lemme précédent, nous pouvons appliquer le théorème de Choquet à C, A_0 et B_0.

Si $C(A_0,B_0) = 0$, toute suite (f_u) qui témoigne de ce fait satisfait clairement $f = \lim\limits_{G\mathscr{N}} f_u$, et le théorème 1 est démontré. Il reste donc à voir que l'on ne peut avoir $C(A_0,B_0) = 1$. L'argument est par contradiction. Supposons donc que $C(A_0,B_0) = 1$, et soient H_n et L_n les suites de compacts données par le théorème de capacitabilité, satisfaisant $C(H_n,L_n) = 1$ pour tout n, $H = \bigcap\limits_n H_n \subset A_0$ et $L = \bigcap\limits_n L_n \subset B_0$. Posons $H_0 = K \times \{-1\}$, et $L_0 = K \times \{+1\}$. Par l'hypothèse sur f: H_0 est contenu dans A_0, et L_0 dans B_0. Soit $\tilde{H}$ l'enveloppe convexe fermée de $H \cup H_0$, $\tilde{L}$ celle de $L \cup L_0$, et de même $\tilde{H}_n$ celle de $H_n \cup H_0$ et $\tilde{L}_n$ celle de $L_n \cup L_0$.

Posons, pour g s.c.s. bornée sur K, $\tilde{g}$ son enveloppe convexe s.c.s., i.e. $\tilde{g} = \inf\{f \in \mathscr{A}(K) : f \geqslant g\}$. D'après des résultats de Mokobodzki (cf [3]), on a, en notant $M_1(K)$ l'ensemble des probabilités sur K :

(*a*) $g(x) = \sup\{\mu(g) : \mu \in M_1(K), b(\mu)=x\}$,

(*b*) si g_n est une suite décroissante de fonctions s.c.s. et $g = \inf_n g_n$, alors $\tilde{g} = \inf_n \tilde{g}_n$.

Posons $h(x) = \sup\{t : (x,t) \in H \cup H_0\}$, et similairement pour h_n. Par (*a*), l'ensemble $\tilde{H}$ est le sous-graphe fermé de $\tilde{h}$, et par (*b*) $\tilde{h} = \inf_n \tilde{h}_n$, i.e. $\tilde{H} = \bigcap_n \tilde{H}_n$. Nous disons que $\tilde{H}$ est contenu dans A_0. En effet, l'ensemble H est contenu dans A_0, et par suite $h < f$. D'autre part, si $x \in K$ est fixé, la fonction s.c.s. $\mu \mapsto \mu(h)$, sur le compact des probabilités de barycentre x, atteint son maximum $\tilde{h}(x)$, et par suite on a encore $\tilde{h} < f$, i.e. $\tilde{H} \subset A_0$. Un argument analogue avec B_0 et les L_n (et l'opération $\check{g} = -(-\tilde{g})$) montre que $\tilde{L} = \bigcap_n \tilde{L}_n$ est contenu dans B_0. Et comme A_0 et B_0 sont disjoints, un argument de compacité fournit l'existence d'un entier n tel que $\tilde{H}_n \cap \tilde{L}_n = \varnothing$. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de Hahn-Banach (dans un espace séparable, donc en n'utilisant que le choix dénombrable) : Il existe une fonction affine continue g sur K, à valeurs dans $[-1,1]$, telle que $\tilde{H}_n \subset \{(x,t) : c(x) > t\}$ et $\tilde{L}_n \subset \{(x,t) : g(x) < t\}$, et par suite la suite constante $f_u = g$ témoigne que $C(H_n, L_n) = 0$, une contradiction qui achève la démonstration.

Remarques. — 1. Pour chaque fonction f de $\mathscr{B}(K)$, on peut par le lemme 3 remplacer le filtre $G\mathscr{N}$ par l'un des filtres $\mathscr{N}_\xi$. Mais on voit facilement que ceci ne peut pas être fait uniformément, dans le cas général.

2. Le résultat précédent, avec la même démonstration, peut facilement être étendu en un résultat de séparation pour deux fonctions bornées f et g sur K avec $f \leqslant g$, où f est fortement concave à sous-graphe analytique, et g fortement convexe à sur-graphe coanalytique. Par contre, nous ne savons pas si un résultat semblable est vrai lorsqu'on intervertit analytique et coanalytique (cf les résultats de la section 3).

3. On peut également étendre le résultat dans le cadre abstrait d'une notion de balayage par rapport à un espace vectoriel de fonctions continues $\mathscr{E}$ sur un métrisable compact E, à la Dellacherie (cf [3]), à condition de savoir que si f est $\mathscr{E}$-concave s.c.s. et majorée par g $\mathscr{E}$-convexe s.c.i. sur E, il existe h $\mathscr{E}$-affine continue sur E avec $f \leqslant h \leqslant g$. Cependant, cette généralisation est assez illusoire, car on ne connaît pas de cas intéressant où cette condition est satisfaite, hormis le cas $\mathscr{E} = \mathscr{A}(K)$.

3. Génération des fonctions bianalytiques.

Dans cette section, X est un espace métrisable séparable, que nous pouvons supposer plongé dans un compactifié $\hat{X}$. Une partie A de X est dite analytique si A est noyau d'un schéma de Suslin sur les fermés de X; il revient au même de dire que A est la trace sur X d'un analytique de $\hat{X}$. Si A et X − A sont analytiques dans X, on dit que A est bianalytique. (Par le théorème de Suslin, cette notion coïncide avec celle de borélien lorsque l'espace X est Polonais, ou plus généralement Suslinien; mais il n'y a pas coïncidence en général). Une fonction f de X dans $\mathbf{R}$ est dite bianalytique si $f^{-1}(U)$ est bianalytique, pour tout ouvert U de $\mathbf{R}$.

Le théorème de Lebesgue-Hausdorff assure que l'on obtient les fonctions boréliennes sur X en itérant l'opération de limite simple à partir des fonctions continues sur X. Nous allons établir ici un résultat analogue pour les fonctions bianalytiques et le filtre $\mathbf{G}\mathcal{N}$:

THÉORÈME 2. — *Soit* X *un espace métrisable séparable. Une fonction* $f: X \to \mathbf{R}$ *est bianalytique si et seulement si* f *est limite simple selon* $\mathbf{G}\mathcal{N}$ *d'une suite de fonctions continues.*

De façon assez étrange, la démonstration du théorème 2 diffère de manière essentielle de celle du théorème 1 : Nous n'allons pas utiliser un argument de séparation d'ensembles analytiques (et donc de capacitabilité), mais un argument de réduction d'ensembles coanalytiques, raffinant le second théorème de séparation de Kuratowski.

LEMME 6. — *Soit* E *un espace métrisable compact,* C_1 *et* C_2 *deux sous-ensembles coanalytiques de* E. *Il existe une suite* $(H_u)_{u \in S}$ *de compacts de* E *satisfaisant :*

(i) $C_1 - C_2 \subset \liminf_{\mathbf{G}\mathcal{N}} H_u$,

(ii) $C_2 - C_1 \subset E - \limsup_{\mathbf{G}\mathcal{N}} H_u \left(= \liminf_{\mathbf{G}\mathcal{N}} (E - H_u)\right)$.

Démonstration. — L'ensemble $E - C_2$ est analytique, donc noyau d'un schéma de Suslin de compacts $(L_u)_{u \in S}$ que l'on peut supposer satisfaisant :

(*a*) si $u \subset v$, alors $L_u \supset L_v$.

(*b*) si $|u| = |v|$ et $u(k) \leqslant v(k)$ pour tout $k < |u|$, $L_u \subset L_v$.

De même on peut choisir un schéma de Suslin $(E-K_u)_{u\in S}$ d'ouverts de noyau $E - C_1$, et satisfaisant :

(a') si $u \subset v$, alors $K_u \subset K_v$.

(b') si $|u| = |v|$ et $u(k) \leqslant v(k)$ pour $k < |u|$, $K_u \supset K_v$.

Posons $H_u = \bigcap_{t\subset u} (K_t \cup L_t)$. Nous allons vérifier que les H_u conviennent.

(i) Soit $x \in C_1 - C_2$. Puisque $x \in C_1$, l'ensemble $A = \{u : x \notin K_u\}$ est un arbre bien fondé. Puisque $x \notin C_2$, l'ensemble $E = \{u : x \in L_u\}$ est un arbre admettant une branche infinie $\alpha \in \omega^\omega$. Soit $D = \{u : x \in H_u\}$. Nous disons que la stratégie du joueur I dans J(D) consistant à jouer cet α (indépendamment du jeu de II) est gagnante : En effet, si dans une partie où I joue α, II joue $\beta \in \omega^\omega$, il existe un entier k tel que $\beta|_k = (\beta(0),\ldots,\beta(k-1))$ ne soit pas dans A (qui est bien fondé). Si maintenant u étend $\beta|_k$, nous disons que $x \in H_u$: Si $t \subset u$, on a soit $\beta|_k \subset t$, soit $t \subset \beta|_k$. Dans le premier cas, $t \notin A$ et donc $x \in K_t$. Dans le second cas, $t = \beta\Gamma_{k'}$ pour un $k' \leqslant k$, et d'après la règle du jeu J(D) on a pour $i < k'$ $\alpha(i) \leqslant t(i)$, et par suite $x \in L_{\alpha|_{k'}} \subset L_t$. Dans les deux cas $x \in K_t \cup L_t$ et finalement $x \in H_u$. On a donc montré que $D \in G\mathcal{N}$, et $C_1 - C_2 \subset \liminf H_u$.

(ii) Soit maintenant x dans $C_2 - C_1$. L'ensemble $A = \{u : y \notin K_u\}$ admet alors une branche infinie α, tandis que $B = \{u : x \in L_u\}$ est bien fondé. Si maintenant $D' = \{u : x \notin H_u\}$, un argument similaire montre que la stratégie pour I dans J(D') consistant à jouer α est gagnante, ce qui fournit l'inclusion désirée.

Le lemme 6 peut être légèrement amélioré :

LEMME 7. — *Dans les conditions du lemme* 6, *on peut choisir la suite* (H_u) *de façon qu'en plus on ait* $C_1 \cup C_2 \subset \liminf_{G\mathcal{N}} H_u \cup \liminf_{G\mathcal{N}} (E-H_u)$.

Démonstration. — On utilise le lemme 6 pour définir par induction sur k des ensembles C_1^k et des suites H_u^k de la façon suivante : $C_1^0 = C_1$, et (H_u^0) est choisie (par le lemme 6) de façon que $H^0 = \liminf_{G\mathcal{N}} H_u^0$ et $L^0 = \liminf_{G\mathcal{N}} E - H_u^0$ satisfassent $C_1^0 - C_2 \subset H^0$ et $C_2 - C_1^0 \subset L^0$. Si les H_u^k ont été définis, on pose $H^k = \liminf_{G\mathcal{N}} H_u^k$ et de même pour L^k, et on définit $C_1^{k+1} = C_1^k \cap H^k$, puis on choisit (H_u^{k+1}), par le lemme 6, de façon que les H^{k+1} et L^{k+1} correspondants satisfassent $C_1^{k+1} - C_2 \subset H^{k+1}$ et $C_2 - C_1^{k+1} \subset L^{k+1}$. Posons finalement

$H_\varnothing = E$, et $H_u = H_v^k$ si $u = k^\frown v$. Par les propriétés de $G\mathcal{N}$, on a $H = \liminf_{G\mathcal{N}} H_u = \liminf_k H^k$ et $L = \liminf_{G\mathcal{N}} (E - H_u) = \liminf_k L^k$. Montrons que la suite (H_u) convient :

(*a*) Si $x \in C_1 - C_2$, nous disons que x est dans tous les H^k. C'est clair pour $k = 0$, et par induction si c'est vrai pour tout $i \leqslant k$, alors $x \in C_1^{k+1} - C_2$, et donc $x \in H^{k+1}$. Donc $x \in H$.

(*b*) On a toujours $C_1^k \subset C_1$, donc si x est dans $C_2 - C_1$, x est *a fortiori* dans tous les $C_2 - C_1^k$, donc dans les L^k, et $x \in L$.

(*c*) Si x est dans $C_1 \cup C_2$, ou bien $x \notin C_2$ et par (*a*) $x \in H$, ou bien $x \in C_2$. Dans ce cas, et si $x \notin H$, il existe un k pour lequel $x \notin H^k$; comme pour $n > k$, C_1^n est inclus dans H^k, x est dans $C_2 - C_1^n$, donc dans L^n. Finalement, x est dans L, et la démonstration est complète.

COROLLAIRE 8. — *Soit* X *un espace métrisable séparable,* C_1 *et* C_2 *deux parties coanalytiques de* X.

(i) (*Second théorème de séparation de Kuratowski*). *Il existe deux parties coanalytiques* C_1' *et* C_2' *de* X *telles que* $C_1' \subset C_1$, $C_2' \subset C_2$, $C_1' \cap C_2' = \varnothing$ *et* $C_1' \cup C_2' = C_1 \cup C_2$.

(ii) *Si* C_1 *et* C_2 *sont disjoints, il existe une suite* $(H_u)_{u \in S}$ *de fermés de* X *telle que* $C_1 \subset \liminf_{G\mathcal{N}} H_u \subset \limsup_{G\mathcal{N}} H_u \subset X - C_2$. *En particulier, si* C *est bianalytique dans* X, *il existe une suite* $(H_u)_{u \in S}$ *de fermés telle que* $C = \lim_{G\mathcal{N}} H_u$.

Démonstration. — Soient $\hat{C}_1$ et $\hat{C}_2$ des coanalytiques de $\hat{X}$ de trace C_1 et C_2 respectivement sur X, et $\hat{H}$ et $\hat{L}$ associés à ces coanalytiques par le lemme 7. Pour (i), les ensembles $C_1' = C_1 \cap \hat{H}$ et $C_2' = C_2 \cap \hat{L}$ conviennent. Pour (ii), $H_u = X \cap \hat{H}_u$ convient.

De manière analogue à ce qui précède, on déduit le théorème 2 du résultat de séparation suivant :

LEMME 9. — *Soit* X *un espace métrisable séparable,* f *et* g *deux fonctions numériques sur* X, *avec* f *à sous-graphe coanalytique dans* $X \times \mathbf{R}$, *et* g *à sous-graphe analytique. Il existe alors une suite* $(h_u)_{u \in S}$ *de fonctions numériques continues sur* X *telles qu'en tout point* x *de* X *où* $f(x) \leqslant g(x)$, *on ait :*

$$f(x) \leqslant \liminf_{G\mathcal{N}} h_u(x) \leqslant \limsup_{G\mathcal{N}} h_u(x) \leqslant g(x).$$

Démonstration. — On se ramène sans difficulté au cas où X est métrisable compact, et f et g sont bornées par 1 en valeur absolue. On applique alors le lemme 6, dans $E = X \times [-1,1]$, au sous-graphe de f et au sur-graphe de g, en remarquant qu'avec les notations du lemme 6, on peut prendre les L_u et les K_u sous-graphes fermés de fonctions continues, auquel cas les H_u le sont aussi. La famille (h_u) ainsi obtenue répond clairement à la question.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. CHOQUET, Theory of capacities, *Annales Inst. Fourier*, Grenoble, 5 (1953-54), 131-295.

[2] G. CHOQUET, Remarques à propos de la démonstration d'unicité de P.-A. Meyer, (appendice), *Séminaire de Théorie du Potentiel 6ᵉ année*, exposé n° 8, IHP Paris, 1961-62.

[3] C. DELLACHERIE et P.-A. MEYER, *Probabilités et Potentiel*, Tome 3, (chapitre X — 3), Hermann, Paris, 1984.

[4] M. KATĚTOV, On descriptive classification of functions, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra III, *Proceedings of the Third Prague Topological Symposium*, 1971, pp. 235-242.

[5] M. TALAGRAND, A new type of Borel affine functions, à paraître dans *Compositio Mathematica*.

[6] Y. N. MOSCHOVAKIS, Descriptive Set Theory, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 100, North Holland, 1980.

Manuscrit reçu le 18 février 1985.

Alain LOUVEAU,
Équipe d'Analyse
E.R.A. au C.N.R.S. 294
Université Paris VI
4, Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.