ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MOHAMED CHARKANI EL HASSANI
ROLAND GILLARD

Unités elliptiques et groupes de classes

Annales de l'institut Fourier, tome 36, n° 3 (1986), p. 29-41
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_3_29_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 3 (1986), 29-41

UNITÉS ELLIPTIQUES ET GROUPES DE CLASSES

par M. CHARKANI EL HASSANI
et R. GILLARD

Introduction.

L'objet de ce travail est d'étudier les extensions abéliennes d'un corps quadratique imaginaire (théorie elliptique) qui sont encore *abéliennes* sur $\mathbf{Q}$ (théorie cyclotomique). Ceci permet en traduisant des résultats cyclotomiques (dus à G. Gras et à B. Mazur et A. Wiles) en énoncés purement elliptiques d'obtenir des résultats nouveaux dans des cas particuliers importants et de (re-) formuler des *questions* de la théorie elliptique, principalement dans le cas *supersingulier.*

Après avoir introduit au § 1 les principaux objets étudiés, nous exposons au § 2 les résultats de [4] lorsque l'on regarde un composant isotypique pour l'action du groupe de Galois. Nous donnons au § 3 les applications à la théorie elliptique dans le cas d'une extension encore *abélienne* sur $\mathbf{Q}$. Dans le § 4, on compare la situation précédente à la situation générale de [5]. Ceci permet de préciser les questions de [5] en apportant divers compléments concernant la structure galoisienne du groupe des classes.

Si après [4], nous nous attendions à des résultats comparables à ceux du § 3, il n'en est pas de même de certains énoncés du § 4 (notamment 4.1.3, 4.3.0 et 4.3.4) qui furent les bonnes surprises de ce travail. Enfin le rôle clef de U_{pr} (groupe des unités locales primaires) n'est apparu qu'en cours de route.

Mots-clés: Unités cyclotomiques – Unités elleptiques – Nombres de classes – Nombres de Bernoulli.

1. Notations principales.

1.1. Soient K un corps quadratique imaginaire, $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers et h le nombre de classes d'idéaux de K. Fixons un nombre premier p différent de 2 et 3. Soient $F/\mathbf{Q}$ une extension abélienne contenant K et Δ (resp. G) le groupe de Galois de F/K (resp. $F/\mathbf{Q}$). Soient c la conjugaison complexe et F^+ le sous-corps réel maximal de F. On suppose que p ne divise ni $[F:K]$ ni h. Soient Cl(F) (resp. $\mathrm{Cl}(F^+)$) le groupe des classes d'idéaux de F (resp. de F^+) et E (resp. E^+) le groupe des unités de l'anneau des entiers $\mathcal{O}(F)$ (resp. $\mathcal{O}(F^+)$) de F (resp. F^+).

1.2. *Unités cyclotomiques.*

Soient $L/\mathbf{Q}$ une extension abélienne réelle et f son conducteur ; ζ_f désignant une racine primitive f-ième de l'unité, on note θ_L une racine carrée de la norme sur L de $1-\zeta_f$. On désigne par $\mathcal{C}_L^*$ le groupe des θ_L^u, u parcourant l'idéal d'augmentation de $\mathbf{Z}[\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})]$.

Dans la suite, on appelle groupe des unités *cyclotomiques* de L le groupe

$$\mathcal{C}_L := \Pi\, \mathcal{C}_{L'}^*$$

où L' parcourut les sous-extensions de L. On pose $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{F^+}$, $\Theta = \theta_{F^+}$, cf. 1.1.

1.3. *Unités elliptiques.*

Soient $\mathfrak{f}$ le conducteur de F/K, f le plus petit entier >0 dans $\mathfrak{f}$, $w(\mathfrak{f})$ le nombre de racines de 1 contenues dans K et congrues à 1 modulo $\mathfrak{f}$. On pose :

$$m(\ ) = \begin{cases} 12.f.w(\mathfrak{f}) & \text{si } \mathfrak{f} \neq 1 \\ 12.h.w(\mathfrak{f}) & \text{si } \mathfrak{f} = 1. \end{cases}$$

Désignons par Cl(F/K) le groupe de classes correspondant dans la théorie d'Artin-Hasse à l'extension F/K. On définit $g_F(C)$ pour $C \in \mathrm{Cl}(F/K)$, comme dans [7] p. 212 et 244. Si $\mathfrak{f} \neq 1$, pour chaque C, on a ainsi un élément (presque générateur) du groupe $\Phi_F(w_F)$ (cf. [7] 11.6) et on pose (ibidem)

$$\Omega_F = \{x \in F^* \,|\, x^{m(\ )} \in \Phi_F(w_F)\}.$$

Si $\mathfrak{f} = 1$, on pose (cf. [7] chap. 9) :

$$\Omega_{\mathrm{F}} = \{x \in \mathrm{F}^* \,|\, x^{m(\mathfrak{f})} \in \Delta_{\mathrm{H}}(c_0\,, ww_{\mathrm{H}})\}.$$

Le groupe des unités elliptiques utilisé ici est bricolé à l'aide des groupes précédents correspondant aux sous-extensions F′ de F/K :

$$\mathcal{E} := \mu \,.\, \prod_{\mathrm{K} \subset \mathrm{F}' \subset \mathrm{F}} \Omega_{\mathrm{F}'}\,,$$

où μ est le sous-groupe de torsion de F^* .

1.4. *Commentaires.*

Les groupes d'unités cyclotomiques et elliptiques ne sont sûrement pas les meilleurs possibles, mais ils sont bien adaptés à la situation semi-simple dans laquelle se cantonne cet article ; il est aussi possible de tirer de [3] les relations suivantes :

1.4.1. PROPOSITION. – *La p-partie du nombre de classes de* F (*resp.* F^+) *est donnée par la p-partie de l'indice de* $\mathcal{E}$ *dans* E (*resp. de* $\mathcal{C}$ *dans* E^+).

1.5. *Facteurs isotypiques.*

Soit Φ un caractère de Δ défini et irréductible sur $\mathbf{Q}_p$: Φ correspond à un idempotent e_Φ et à un facteur direct simple de l'algèbre $\mathbf{Z}_p[\Delta]$. Si M est un $\mathbf{Z}[\Delta]$-module (resp. un $\mathbf{Z}_p[\Delta]$-module), on note M_Φ le composant isotypique relatif à Φ dans $\mathrm{M} \otimes \mathbf{Z}_p$ (resp. dans M).

Si φ est un caractère de Δ intervenant dans la décomposition de Φ en caractères absolument irréductibles (on écrit $\varphi|\Phi$), φ est un homomorphisme $\Delta \longrightarrow \mathbf{Q}_p^*$: notons φ_+ (resp. φ_-) son prolongement à G tel que $\varphi_+(c) = 1$ (resp. $\varphi_-(c) = -1$). On appelle Φ_+ (resp. Φ_-) le caractère de G défini et irréductible sur $\mathbf{Q}_p$ et contenant φ_+ (resp. φ_-) dans sa décomposition absolue. Si M est un $\mathbf{Z}_p[\mathrm{G}]$-module, on définit M_{Φ_+} (resp. M_{Φ_-}) en procédant comme plus haut.

Notons F_Φ la sous-extension de F/K correspondant à $\ker\varphi$ pour $\varphi|\Phi$. On identifie caractères de Δ (resp. G) et caractères de Dirichlet grâce à la loi de réciprocité d'Artin.

1.6. *Unités p-locales.*

Pour chaque place w de F divisant p, on note F^w le complété correspondant, U^w le groupe des unités de l'anneau $\mathcal{O}(F^w)$ des entiers de F^w. On considère aussi U^w_{pr} le sous-groupe des unités primaires α, c'est-à-dire telles que l'extension $F^w(\sqrt[p]{\alpha})/F^w$ soit non ramifiée. On désigne par U (resp. U_{pr}) le produit des U^w (resp. U^w_{pr}) pour $w|p$. Notons $\overline{U}$ le quotient de U par son sous-groupe de torsion : c'est un $\mathbf{Z}_p$-module libre muni d'une action de Δ, associons-lui $\overline{U}_\Phi$ comme en 1.5.

2. Indices reliant unités cyclotomiques et unités elliptiques.

2.0. Résumons et exploitons [4] : son objet était de donner une relation entre unités elliptiques et unités cyclotomiques de F. Comme nous nous intéressons aux Φ-parties, on va pouvoir faire $F = F_\Phi$, ce qui simplifie le résultat de [4]. Celui-ci demeure encore assez technique par notre désir de généralité qui introduit pour les extensions F/K d'ordre pair des difficultés liées aux différences possibles entre les conducteurs de φ, φ_+ et φ_- (cf. 1.5) : il faut tenir compte des facteurs eulériens classiques lors de changements de conducteurs. Cependant la forme sous laquelle on emploie 2.1.5 est très simple, voir tout de suite 2.2.

2.1. On suppose dans ce § 2, que $F = F_\Phi$; on a un diagramme de corps :

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, dash] \arrow[dd, dash] & F'_2 \arrow[rr, dash] \arrow[dd, dash] & & F \arrow[dd, dash] \arrow[dl, dash] \\
 & & F'_1 \arrow[dl, dash] & \\
\mathbf{Q} \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[rr, dash] & & F^+
\end{tikzcd} \qquad (2.1.1)$$

où F'_2/K est la sous-extension de F/K correspondant au 2-sous-groupe de Sylow de son groupe de Galois et F'_1 est la sous-extension de $F/F'_2 \cap F^+$ vérifiant $[F : F'_1] = [F : F'_2]$ (= 1 ou 2!). Notons S_0 (resp. S_1) l'ensemble des nombres premiers dont le groupe d'inertie dans $F/\mathbf{Q}$ est $\mathrm{Gal}(F/F^+)$ (resp. $\mathrm{Gal}(F/F'_1)$). On pose

$$F_0 := \begin{cases} F^+ & \text{si } S_0 \neq \emptyset \\ F & \text{si } S_0 = \emptyset \end{cases} \quad \text{et} \quad F_1 := \begin{cases} F'_1 & \text{si } S_1 \neq \emptyset \\ F & \text{si } S_1 = \emptyset \end{cases} \qquad (2.1.2)$$

On désigne par f_0 (resp. $\overline{f}_1$) le conducteur de F_0 (resp. F_1) et par f_1 le plus petit commun multiple de $\overline{f}_1$ et f (cf. 1.3). Introduisons

$$\alpha := -m(\mathfrak{f})\Big(\sum_{\sigma\in\Delta}\alpha(\sigma)\sigma^{-1}\Big)/[\mathrm{F}:\mathrm{F}^1]\in 6.\mathbf{Z}[\Delta] \qquad (2.1.3)$$

avec, pour $\sigma\in\Delta$ (ou plus généralement dans G),

$$\alpha(\sigma) := \theta(\sigma)\,\Sigma\,\mathrm{B}_1(a/f)\,; \qquad (2.1.4)$$

ici θ est le caractère de G correspondant à $\mathrm{K}/\mathbf{Q}$ et dans la sommation a parcourt l'ensemble des entiers de 1 à f, premiers à f, tels que l'automorphisme $\zeta_f \longrightarrow \zeta_f^a$ agisse sur F^1 comme σ.

2.1.5. THEOREME. – *On suppose que* $\mathrm{F}=\mathrm{F}_\Phi$ *et* $\Phi\neq 1$; *soit* C *dans* $\mathrm{Cl}(\mathrm{F}/\mathrm{K})$ *correspondant à un automorphisme* $\tau\in\mathrm{Gal}(\mathrm{F}/\mathrm{K})$. *Les éléments* $g_{\mathrm{F}}(\mathrm{C})$ *et* $\Theta^{\alpha\tau}$ *de* F^* *ont même image dans* $\overline{\mathrm{U}}_\Phi$.

Démonstration. – Il suffit d'utiliser la Φ-partie de [4] théorèmes 2 et 3, compte-tenu de ses remarques 1 et 2 ; on peut aussi, comme dans [1] repartir de la formule d'induction des fonctions L en $s=0$ et refaire les calculs, les définitions de 2.1.2 remplaçant celles de $\mathrm{F}^0_{\mathfrak{J}}$, $\mathrm{F}^1_{\mathfrak{J}}$ de [4].

2.1.6. Erratum: il faut rajouter un h dans [4] théorème 3, deuxième membre.

2.2. *Formule d'indice.*

Notons $\omega_{\mathbf{Q}}$ le caractère de G (si $\zeta_p\in\mathrm{F}$) à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$ tel que $\zeta_p^\sigma=\zeta_p^{\omega_{\mathbf{Q}}(\sigma)}$ et ω sa restriction à Δ. Observons que Φ est égal à ω si et seulement si $\varphi_-=\omega_{\mathbf{Q}}$. Pour $\Phi\neq\omega$, notons $b(\Phi)$ la norme sur $\mathbf{Q}_p$ du nombre de Bernoulli généralisé B_{1,φ_-} : $b(\Phi)$ est dans $\mathbf{Z}_p$. Pour $\Phi=\omega$, posons simplement $b(\Phi)=p\mathrm{B}_{1,\omega}$: c'est une unité de $\mathbf{Z}_p$. Désignons par Φ^* le caractère obtenu à partir de Φ en composant avec l'involution $\sigma\longrightarrow\sigma^{-1}$ de Δ.

2.2.1. COROLLAIRE. – $\mathcal{E}_\Phi$ *se plonge dans* $(\mu.\mathcal{C})_\Phi$ *et le quotient est d'ordre égal à* $b(\Phi^*)$ *à une unité de* $\mathbf{Z}_p$*-près.*

Démonstration. – Le corollaire se déduit facilement de 2.1.5 : tout se passe dans le $\mathbf{Z}_p[\Delta]_\Phi$-module E_Φ qui est libre de rang 1 si $\Phi \neq \omega$ (si $\Phi = \omega$, $E_\Phi \simeq \mu \times \mathbf{Z}[\Delta]_\Phi$). On réduit l'indice à celui du module engendré par $g_{F_\Phi}(c)$ et ses conjugués (ceci supprime les facteurs $m(\mathfrak{f})$ figurant dans α). On exploite ensuite l'isomorphisme induit par $\varphi : \mathbf{Z}[\Delta]_\Phi \simeq \mathbf{Z}_p[\operatorname{Im}\varphi]$. Le calcul de l'image de α conduit à $B_{1,\varphi^{-1}}$. On conclut en notant que l'indice d'un idéal de $\mathbf{Z}_p[\operatorname{Im}\varphi]$ est donné par la norme d'un générateur. Pour $\Phi = \omega$, il faut tenir compte de l'idéal intervenant dans la définition de $\Phi_H(w_H)$ ([7] 11.6). Les facteurs $12w(\mathfrak{f})$ ou h sont négligeables ($p \neq 2$ ou 3 et $p \nmid h$).

2.2.2. *Remarque.* – Pour $\Phi = \omega$, on sait que $b(\Phi)$ est une unité. Pour $\Phi = 1$, $b(\Phi)$ est égal à $B_{1,\theta}$, tout aussi inversible dans $\mathbf{Z}_p^*$ car $p \nmid h$. De plus, pour $\Phi = 1$, (resp. $\Phi = \omega$) le groupe E_Φ (resp. $(E/\mathcal{E})_\Phi$, cf. [10] prop. 35) est trivial. Tout ceci montre qu'il n'y aura rien d'intéressant pour les caractères 1 et ω et permettra de les oublier souvent dans les raisonnements.

3. Applications.

3.0. Considérons la suite de $\mathbf{Z}_p[\Delta]$-modules reliés par les applications canoniques :

$$(\mathcal{E}/\mathcal{E}^p) \xrightarrow{\Lambda_1} (\mu . \mathcal{C}/\mathcal{C}^p) \xrightarrow{\Lambda_2} (E/E^p) \xrightarrow{\Lambda_3} (U/U_{pr}) \qquad (3.0.1)$$

et posons

$$T_{\text{glob}} := \ker(\Lambda_2 \circ \Lambda_1), \qquad (3.0.2)$$

$$T_{\text{loc}} := \ker(\Lambda_3 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1). \qquad (3.0.3)$$

On voit donc que T_{loc} contient T_{glob} : T_{glob} discute si les unités elliptiques sont des puissances p-ièmes dans F, et T_{loc} si leurs racines p-ièmes engendrent des extensions non ramifiées (le problème est seulement au-dessus de p).

Nous allons calculer les ordres de $(T_{\text{glob}})_\Phi$ et $(T_{\text{loc}})_\Phi$ au moyen des $b(\Phi)$, puis en déduire diverses conséquences sur le groupe des classes de F. Pour cela, on utilisera le résultat de 2.2 ainsi que ceux, dans toute leur force, de la théorie cyclotomique rappelés ci-dessous.

3.1. *Théorie cyclotomique.*

Dans [6], G. Gras a démontré un résultat qui se particularise pour nous ainsi :

3.1.1. THEOREME. – *L'application* $\Lambda_3 \circ \Lambda_2$ *est nulle sur* $(\mu\, \mathcal{C} / \mathcal{C}^p)_\Phi$ *si et seulement si* p *divise* $b(\Phi\, \omega^{-1})$.

C'est ce résultat, ainsi que des exemples numériques, qui l'ont amené à sa conjecture maintenant démontrée ([9] I, § 10, théorème 1). Pour nous :

3.1.2. THEOREME. – *Les* p*-sous-groupes de Sylow de* $\mathrm{Cl}(F^+)$ *et de* $E^+/\mathcal{C}$ *considérés comme* $\mathbf{Z}_p[\Delta]$*-modules ont des suites de Jordan-Hölder isomorphes.*

Ceci signifie que les composantes isotypiques non nulles des $\mathbf{Z}_p[\Delta]$-modules associés correspondent aux mêmes facteurs simples de $\mathbf{Z}_p[\Delta]$ et que les multiplicités sont les mêmes : on note $b'(\Phi\omega^{-1})$ les ordres communs des groupes $(E^+/\mathcal{C})_\Phi$ et $\mathrm{Cl}(F^+)_\Phi \simeq \mathrm{Cl}(F)_{\Phi +}$. On a aussi un résultat sur la partie imaginaire du groupe des classes ([9] I, § 10, théorème 2) :

3.1.3. THEOREME. – *Pour tout* Φ, *l'ordre du groupe* $\mathrm{Cl}(F)_\Phi$ *est égal à* $b(\Phi^*)$ *à une unité* p*-adique près.*

3.2. T_{glob}

3.2.1. COROLLAIRE. – *Pour tout* Φ, *l'ordre de* $\mathrm{Cl}(F)_{\Phi -}$ *est égal à celui de* $(\mu\,.\,\mathcal{C}/\mathcal{E})_\Phi$.

Démonstration. – L'assertion résulte de 2.2.1 et 3.1.3. On obtient ainsi l'analogue de la conjecture de Gras :

3.2.2. THEOREME. – *Si* p *est un nombre premier premier à* $6\,.\,[F:K]\,.\,|\mathrm{Cl}(K)|$, *les* p*-sous-groupes de Sylow de* $\mathrm{Cl}(F)$ *et* $E/\mathcal{E}$, *considérés comme* $\mathbf{Z}_p[\Delta]$*-modules ont des suites de Jordan-Hölder isomorphes.*

Démonstration. – On déduit le théorème à partir de 3.2.1 et 3.1.2 au moyen de la décomposition $\mathrm{Cl}(F)_\Phi = \mathrm{Cl}(F^+)_\Phi \oplus \mathrm{Cl}(F)_{\Phi -}$ et de la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mu\,.\,\mathcal{C}/\mathcal{E} \longrightarrow E/\mathcal{E} \longrightarrow E/\mu\,.\,\mathcal{C} \longrightarrow 1\,.$$

Pour comparer T_{glob} et T_{loc}, il est suggestif d'introduire la variable booléenne $\delta(\Phi)$ (resp. $\delta'(\Phi)$) valant 1 si p divise $b(\Phi)$ (resp. $b'(\Phi)$) et 0 sinon : on a $\delta'(\Phi) \leqslant \delta(\Phi)$, cf. [8] et (4.3.5). On note $\vee$ le "ou" logique et $q(\Phi)$ l'ordre de $\mathbf{F}_p[\Delta]_\Phi$: de la structure galoisienne de E, on déduit que (E/E^p) est d'ordre $q(\Phi)$ et donc que les deux premiers modules de (3.0.1) aussi.

3.2.3. Proposition. – $(T_{glob})_\Phi$ *est d'ordre* $q(\Phi)^{\delta(\Phi^*)\vee\delta'(\Phi\omega^{-1})}$.

Démonstration. – On utilise 2.2.1 et 3.1.2 pour discuter si p divise l'ordre de $(E/\mathcal{E})_\Phi$.

3.3. T_{loc}.

C'est le noyau de $(\Lambda_3 \circ \Lambda_2) \circ \Lambda_1$. En appliquant 2.2.1 et 3.1.1, on déduit :

3.3.1. Proposition. – $(T_{loc})_\Phi$ *est d'ordre* $q(\Phi)^{\delta(\Phi^*)\vee\delta(\Phi\omega^{-1})}$.

Pour M un $\mathbf{F}_p[\Delta]$-module, on considère son dual galoisien (si $\zeta_p \in F$!)

$$D(M) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(M, \mu),$$

sur lequel Δ opère de façon à ce que $\tau(f(m)) = (\tau(f))(\tau m)$, si $f \in D(M)$, $m \in M$ et $\tau \in \Delta$. On a alors un isomorphisme $D(M_{\Phi^*}) \simeq M_{\Phi\cdot\omega}$. De 3.3.1, on déduit aussitôt

3.3.2. Corollaire. – $D(T_{loc}) \simeq T_{loc}$.

3.4. Comme pour $\Phi = \omega$, les $\mathbf{F}_p[\Delta]$-modules $(T_{loc})_\Phi$ et $(T_{glob})_\Phi$ sont monogènes, la comparaison de 3.2.3 et 3.3.1 donne (si $\zeta_p \in F$) :

3.4.1. Proposition. – *On a une injection* $T_{glob} \hookrightarrow T_{loc}$ *ainsi qu'une surjection* $D(T_{glob}) \oplus T_{glob} \longrightarrow T_{loc}$, *respectant toutes deux l'action de Galois.*

Cette proposition répond (en la corrigeant légèrement) à la question de [11] demandant si T_{loc} et $D(T_{glob}) \oplus T_{glob}$ sont isomorphes, ce qui excluait que $(T_{glob})_\Phi$ et $D(T_{glob})_\Phi$ puissent être $\neq 0$ simultanément (ce qui a pourtant lieu dès que $\delta'(\Phi\omega^{-1}) = 1$).

4. Questions pour le cas non abélien.

4.0. La motivation de notre étude était de discuter les questions de [5] : cet article donne pour p inerte dans K un critère numérique pour la nullité de $(T_{loc})_\Phi$, même dans le cas où l'extension abélienne F de K ne l'est plus sur $\mathbf{Q}$ (on peut cependant supposer sans dommage que $F/\mathbf{Q}$ est encore galoisienne. On note toujours G le groupe $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q})$) ; il montre que ceci suffit à discuter la divisibilité de Cl(F) par p. Enfin, [5] tente un raffinement galoisien des résultats évoqués ci-dessus en considérant les composants isotypiques. Dans la suite, *on suppose que l'idéal* (p) *reste premier dans* K.

4.1. Désignons par $\mathcal{O}_p$ la complétion de l'anneau $\mathcal{O}$ des entiers de K. Dans [5], on construit (à l'aide d'un logarithme tordu) un isomorphisme de $\mathbf{Z}[\Delta]$-modules :

$$\delta : U/U_{pr} \longrightarrow \mathcal{O}(F)/p\,\mathcal{O}(F). \tag{4.1.1}$$

Notons $\mathbf{B}$ l'image de $\delta \circ \Lambda_3 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_1$. On observe alors que le membre de droite de 4.1.1 est en fait un $\mathcal{O}_p[\Delta]$-module. Pour Φ comme en 1.5, notons Ψ un de ses composants irréductibles sur $\mathcal{O}_p$: Ψ correspond à un composant isotypique de $\mathcal{O}_p[\Delta]$; notons Ψ' le conjugué de Ψ sur $\mathbf{Q}_p$ (par l'automorphisme de Frobenius). Si $\mathcal{O}_p$ est contenu dans $\mathbf{Z}_p[\varphi(\Delta)]$ pour $\varphi | \Phi$, on a $\Phi = \Psi + \Psi'$ et dans le cas contraire $\Phi = \Psi = \Psi'$.

[5] introduit d'une part un entier algébrique $B(\Psi)$ sur $\mathbf{Q}_p$ qui s'obtient à l'aide de valeurs de séries d'Eisenstein et d'autre part la ψ-composante $\mathbf{B}_\Psi$ de $\mathcal{O}.\mathbf{B}$. Le lien entre les deux est donné par :

4.1.2. Proposition. – *La nullité de* $\mathbf{B}_\Psi$ *est équivalente à la divisibilité par* p *de* $B(\Psi)$.

Démonstration. – Ceci résulte des raisonnements de [5] si $\Phi \neq \omega$. Si $\Phi = \omega$, on doit vérifier qu'aucune condition n'est vérifiée (cf. 2.2.2 et [10] proposition 35).

Si jamais l'extension $F/\mathbf{Q}$ est abélienne comme dans les premiers paragraphes, on a alors :

4.1.3. PROPOSITION. – *Si l'extension* $F/\mathbf{Q}$ (cf. § 1) *est abélienne, les divisibilités de* $B(\Psi)$ *et* $B(\Psi')$ *sont équivalentes.*

Démonstration. – Si $\Psi = \Psi'$, il n'y a rien à démontrer. Si $\Phi = \Psi + \Psi'$ le corps engendré sur $\mathbf{F}_p$ par l'image de $\varphi|\Psi$ contient $\mathcal{O}/p\,\mathcal{O}$ et s'identifie à $(\mathbf{F}_p[\Delta])_\Phi$ et à $(\mathbf{F}_p[\Delta]\otimes\mathcal{O})_\Psi$ (notation copiée sur celle de 1.5). Par ailleurs, comme les unités de F sont des produits d'unités de F^+ par des éléments de μ annulés par e_Φ (car $\Psi \neq \Psi' \Longrightarrow \Phi \neq \omega$), on voit que $\mathbf{B}_\Phi$ est un fait déjà dans $\mathcal{O}(F^+)\otimes\mathbf{F}_p$. En utilisant une base normale de $\mathcal{O}(F)\otimes\mathbf{F}_p$ sur $\mathbf{F}_p$, on vérifie que $\mathcal{O}\,.\,\mathbf{B}_\Phi$ s'identifie à $\mathbf{B}_\Phi\otimes\mathcal{O}$. Les considérations sur les algèbres de groupes ci-dessus montrent alors que $\mathbf{B}_\Phi$ s'identifie à $\mathbf{B}_\Psi$. En raisonnant de même pour Ψ' et en appliquant 4.1.2, on obtient 4.1.3.

Sans supposer l'extension $F/\mathbf{Q}$ abélienne et en se rappelant que $(T_{loc})_\Phi$ est monogène, on déduit de 4.1.2 :

4.1.4. PROPOSITION. – $(T_{loc})_\Phi$ *est non nul si et seulement si les nombres* $B(\Psi)$ et $B(\Psi')$ *sont tous deux divisibles par* p.

Ainsi comme dans le critère de Kummer de [10], on fait souvent appel à *deux* nombres ; mais 4.1.3 rassurera le lecteur cyclotomiste qui lui est habitué à ne discuter qu'*un seul* nombre de Bernoulli.

4.2. *Questions.*

En utilisant 4.1.4, 3.2.3 et 3.3.1, il est facile de donner des exemples (en fait déjà dans [11]) où la question suivante (= [5] 2.4.1) a une réponse négative :

Question : *A-t-on une équivalence :*

4.2.1. $\mathrm{Cl}(F)_\Phi \neq 0 \;\Leftrightarrow\; B(\Psi)$ *et* $B(\Psi')$ *sont divisibles par* p ?

Exemple. – 4.2.1 est faux dès que l'on a un Φ vérifiant $\delta'(\Phi\omega^{-1}) = 0$, $\delta(\Phi\omega^{-1}) = 1$ et $\delta(\Phi^*) = 0$ car alors $\mathrm{Cl}(F)_\Phi = 0$ et $(T_{loc})_{\Phi\omega^{-1}} \simeq (T_{loc})_\Phi \neq 0$. C'est le cas pour $K = Q(\sqrt{-163})$, $F = K(\zeta_5)$, $p = 5$ et $\Phi = \omega^3$, cf. [11].

En fait, il semble naturel d'espérer la généralisation de 3.2.2 (cf. aussi 1.4.1) :

Question : *Est-il vrai que*

4.2.2. *Les p-sous-groupes de Sylow de* $\mathrm{Cl}(F)$ *et* $E/\mathcal{E}$, *considérés comme* $\mathbf{Z}_p[\Delta]$*-modules ont des suites de Jordan-Hölder isomorphes ?*

Une question plus faible consiste à demander si les groupes $(T_{\mathrm{glob}})_\Phi$ et $\mathrm{Cl}(F)_\Phi$ sont nuls en même temps. Via 4.1.4, si on peut répondre affirmativement à 4.2.2, 4.2.1 se réduit à la comparaison de $(T_{\mathrm{glob}})_\Phi$ et $(T_{\mathrm{loc}})_\Phi$. On ne peut guère espérer mieux que :

Question : *Est-il vrai que*

4.2.3. T_{glob} *et* T_{loc} *sont reliés par une surjection comme dans 3.4.1 ?*

Ceci permettrait d'avoir des critères numériques :

4.2.4. PROPOSITION. – *Si la réponse aux questions précédentes est affirmative, un des deux sous-groupes* $\mathrm{Cl}(F)_\Phi$ *ou* $\mathrm{Cl}(F)_{\Phi^*\omega}$ *au moins est non nul si et seulement si les deux nombres* $B(\Psi)$ *et* $B(\Psi')$ *son divisibles par* p.

Les exemples de divisibilités simultanée de $B(\Psi)$ et $B(\Psi')$ pour $\Psi \neq \Psi'$ semblent rares, M. Chellali a cependant réussi à en trouver. On peut observer que 4.2.3 implique l'invariance de T_{loc} par D :

Question : *Est-il vrai que*

4.2.5. T_{loc} *et* $D(T_{\mathrm{loc}})$ *sont* Z_p $[\Delta]$*-isomorphes ?*

Ceci se traduit ainsi (en adaptant aux Ψ la définition de l'involution $\varphi \longrightarrow \varphi^*$) :

Question : *Est-il vrai que*

4.2.6. *La divisibilité simultanée de* $B(\Psi^*)$ *et* $B(\Psi^{*\prime})$ *par p équivaut à celle de* $B(\Psi\,\omega)$ *et* $B(\Psi'\,\omega)$?

On renvoie à [2] et [5] pour des exemples de Ψ vérifiant 4.2.6.

4.3. Donnons quelques faits préchant en faveur de réponses positives.

4.3.0. Supposons $F/\mathbf{Q}$ galoisienne et choisissons une conjugaison complexe c par exemple en plongeant F dans $\mathbf{C}$; on obtient une involution bien définie $\sigma \longrightarrow \overline{\sigma} = c\,\sigma\,c^{-1}$ sur Δ, donc sur $\mathbf{Z}[\Delta]$. Pour M un $\mathbf{Z}[\Delta]$-module, notons $\overline{\mathrm{M}}$ le $\mathbf{Z}[\Delta]$-module obtenu par extension des scalaires correspondante. On vérifie que

$\overline{D(M)} = D(\overline{M})$ si M est annulé par p. De plus, si M est un $\mathbf{Z}(G)$-module l'application $m \longrightarrow cm$ définit un isomorphisme $M \longrightarrow \overline{M}$.

L'assertion de 4.2.5 est que T_{loc} et $D(T_{loc})$ sont isomorphes. Le théorème 2.4.4 de [5] montre l'existence de nombreux Φ non abéliens tels que $(T_{loc})_\Phi \simeq \overline{D}(T_{loc})_\Phi$. Mais en fait il n'y a pas lieu de distinguer entre D et $\overline{D}$:

4.3.1. Lemme. — *Supposons* $F/\mathbf{Q}$ *galoisienne, les* $\mathbf{Z}[\Delta]$*-modules* $Cl(F)$, E, $\mathcal{E}$, U, U_{pr} *sont des* $\mathbf{Z}[G]$*-modules.*

Démonstration. — C'est clair pour $Cl(F)$, E, U et U_{pr}. Pour $\mathcal{E}$, il suffit de revenir aux définitions en remarquant l'égalité

$$c(g_{\mathfrak{f}}(C)) = g_{c(\mathfrak{f})}(c(C)), \tag{4.3.2}$$

d'où

$$c\Omega_{F'} = \Omega_{c(F')} \qquad \text{si } K \subset F' \subset F. \tag{4.3.3}$$

Enfin, on a :

4.3.4. Proposition. — *Si* 4.2.2 *est vrai,* 4.2.3 *aussi.*

Démonstration. — Soit $T_{L/G}$ le noyau de $E/E^p \longrightarrow U/U_{pr}$. D'après [8], en notant que $U_{pr} \cap \mu = \{1\}$, on a une suite exacte :

$$1 \longrightarrow T_{L/G} \longrightarrow D(A) \longrightarrow A, \tag{4.3.5}$$

où A désigne le noyau de la multiplication par p dans $Cl(F)$. Si 4.2.2 est vérifié (sa forme faible suffit) A et T_{glob} s'identifient et (4.3.5) devient :

$$1 \longrightarrow T_{L/G} \longrightarrow D(T_{glob}) \longrightarrow T_{glob}. \tag{4.3.6}$$

De par la définition de $T_{L/G}$, on a une suite exacte :

$$1 \longrightarrow T_{glob} \longrightarrow T_{loc} \longrightarrow T_{L/G}. \tag{4.3.7}$$

Si $(T_{loc})_\Phi = 1$ ou si $(T_{loc})_\Phi \neq 1$ et $(T_{glob})_\Phi \neq 1$, la Φ partie de la question 4.2.3 admet une réponse positive. Le cas critique est celui où $(T_{loc})_\Phi \neq 1$ et $(T_{glob})_\Phi = 1$. Mais alors $(T_{L/G})_\Phi$ est $\neq 1$, donc $D(T_{glob})_\Phi$ aussi, et on a bien une surjection $(T_{glob})_\Phi \oplus D(T_{glob})_\Phi \longrightarrow (T_{loc})_\Phi$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. CHARKANI EL HASSANI, *Involution de Leopoldt et unités elliptiques*, Thèse de 3^e cycle, Grenoble, 1984.

[2] M. CHELLALI, article en préparation.

[3] R. GILLARD, Remarques sur les unités cyclotomiques et les unités elliptiques, *J. Number Theory,* 11 (1979), 21-48.

[4] R. GILLARD, Unités elliptiques et unités cyclotomiques, *Math. Ann.,* 243 (1979), 181-189.

[5] R. GILLARD, Séries d'Eisenstein et critère de Kummer, *Sém. Th. nombres, Paris,* 1981-1982, 59–72, Birkhauser, Boston-Basel-Stuttgart, 1983.

[6] G. GRAS, Classes d'idéaux des corps abéliens et nombres de Bernoulli généralisés, *Ann. Inst. Fourier,* Grenoble, 27-1 (1977), 1-66.

[7] D. KUBERT et S. LANG, *Modular units,* Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1981.

[8] H.W. LEOPOLDT, Zur Struktur der ℓ-Klassengruppe galoisscher Zahlkorper, *J. reine angew. Math.,* 199 (1958), 165-174.

[9] B. MAZUR et A. WILES, Class fields of abelian extensions of $\mathbf{Q}$, *Inv. Math.,* 76 (1984), 179-330.

[10] G. ROBERT, Nombres de Hurwitz et unités elliptiques, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.,* 11 (1978), 297-389.

[11] G. ROBERT, Une curieuse symétrie sur les unités elliptiques, *Sém. Th. nombres de Grenoble,* (1979).

[12] G. ROBERT, Congruences entre séries d'Eisenstein dans le cas supersingulier, *Inv. Math.,* 61 (1980), 103-158.

Manuscrit reçu le 3 avril 1985
révisé le 10 septembre 1985.

M. CHARKANI EL HASSANI & R. GILLARD,
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques associé au CNRS
Université de Grenoble I
B.P. 74
38402 St. Martin d'Hères Cedex.