ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROBERT DALMASSO

Un résultat sur les fonctions de classe $C^{1,\alpha}$ et application au problème de Cauchy

Annales de l'institut Fourier, tome 36, nº 3 (1986), p. 43-55

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_3_43_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 3 (1986), 43-55

UN RÉSULTAT SUR LES FONCTIONS DE CLASSE $C^{1,\alpha}$ ET APPLICATION AU PROBLÈME DE CAUCHY

par Robert DALMASSO

1. Introduction et notations.

Il est bien connu (voir G. Glaeser [4] et J. Dieudonné [3]) que, si f est une fonction numérique $\geqslant 0$, de classe C^2 dans un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ telle que les dérivées d'ordre $\leqslant 2$ de f s'annulent aux zéros de f alors la racine carrée de f est de classe C^1 dans U.

Nous allons montrer que, si f est une fonction $\geqslant 0$ différentiable sur un intervalle $[0,T]$, si sa dérivée est höldérienne d'ordre α avec $0<\alpha\leqslant 1$ et si $f'(0)=0$ (resp. $f'(T)=0$) quand $f(0)=0$ (resp. $f(T)=0$) alors $f^{\frac{1}{1+\alpha}}$, qui est absolument continue d'après [2], admet (presque partout) une dérivée bornée presque partout.

Ceci va nous permettre d'étudier le problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u - a(t)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0 \quad \text{dans} \quad [0,T] \times \mathbf{R} \\ \\ u(0,x) = \varphi(x)\,, \dfrac{\partial}{\partial t} u(0,x) = \psi(x) \end{array}\right. \tag{1.1}$$

sous la condition d'hyperbolicité

$$a(t) \geqslant 0 \ \forall t \in [0,T]. \tag{1.2}$$

Rappelons que le problème (1.1) est bien posé dans un espace X de fonctions ou fonctionnelles sur $\mathbf{R}$ si pour φ et ψ dans X

Mots-clés : Classe $C^{1,\alpha}$ (Hölder) – Classe de Gevrey $G^s(\mathbf{R})$ – Problème de Cauchy.

il admet une solution unique u dans $C^1([0,T],X)$ (pour plus de détails voir [1] et [2]).

Nous montrons dans ce travail le résultat suivant : si a vérifiant (1.2) est continûment différentiable et si sa dérivée est höldérienne d'ordre α avec $0 \leqslant q \leqslant 1$ alors pour des données φ et ψ dans la classe de Gevrey $G^s(\mathbf{R})$ le problème (1.1) admet une solution unique dans $C^2([0,T], G^s(\mathbf{R}))$ sous la condition :

$$1 \leqslant s \leqslant \frac{3+\alpha}{2}.$$

Ce résultat est à rapprocher du théorème obtenu par F. Colombini, E. Jannelli et S. Spagnolo (voir [2]) dans un cadre plus général.

Notations

On utilisera les espaces vectoriels topologiques (e.v.t.) suivants :

H e.v.t. des fonctions entières sur $\mathbf{R}$.

$G^s(\mathbf{R})$ pour s réel $\geqslant 1$ e.v.t. des fonctions de Gevrey d'ordre s sur $\mathbf{R}$ c'est-à-dire des fonctions indéfiniment différentiables f telles que, pour tout compact K de $\mathbf{R}$ il existe C et A tels que

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(x) \right| \leqslant C A^m m^{sm} \ \forall x \in K \ \forall m \in \mathbf{N}.$$

$D^s(\mathbf{R})$ e.v.t. des éléments de $G^s(\mathbf{R})$ à support compact.

H' e.v.t. des fonctionnelles holomorphes sur $\mathbf{C}$.

$C^k([0,T],X)$ où X désigne l'un des e.v.t. ci-dessus est l'e.v.t. des applications u de $[0,T]$ dans X admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre k.

$C^{1,\alpha}([a,b])$ où $a < b$ et $\alpha \in [0,1]$ désigne l'espace des fonctions continûment différentiables sur $[a,b]$ et admettant une dérivée höldérienne d'ordre α si $\alpha > 0$.

2. Etude des fonctions de $C^{1,\alpha}([a,b])$.

Nous commençons par démontrer un lemme qui généralise un résultat obtenu par J. Dieudonné dans [3] pour des fonctions de classe C^2.

LEMME 2.1. – *Soit* $f \in C^{1,\alpha}([-2T, 2T])$, $T > 0, \alpha \in]0,1]$, $f \geqslant 0$ *et* $f(0) = f'(0) = 0$ *alors on a :*

$$|f'(x)|^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \leqslant \frac{1+\alpha}{\alpha} f(x) M^{\frac{1}{\alpha}} \quad \forall x \in [-T, T] \tag{2.1}$$

où

$M = \sup \{|f'(x) - f'(y)|\,|x - y|^{-\alpha} / x \neq y,\ x, y \in [-2T, 2T]\}$.

Démonstration. – Remarquons tout d'abord que $|f'(x)| \leqslant M|x|^\alpha$ pour tout $x \in [-2T, 2T]$; en effet :

$$|f'(x)| = |f'(x) - f'(0)| \leqslant M|x|^\alpha .$$

Ensuite, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x \in [-T, T]$ tel que

$$|f'(x)|^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} > \frac{1+\alpha}{\alpha} f(x) M^{\frac{1}{\alpha}} . \tag{2.2}$$

On peut écrire

$$f(y) = f(x) + (y-x) f'(x) + (y-x) \int_0^1 (f'(x + s(y-x)) - f'(x))\, ds \tag{2.3}$$

ceci pour tout $y \in [-2T, 2T]$. On a deux cas :

i) Si $f'(x) > 0$ on pose

$$y = x - \left(\frac{f'(x)}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

et la remarque précédente montre que $y \in [-2T, 2T]$.

(2.3) entraîne

$$f(y) \leqslant f(x) + (y-x) f'(x) + \frac{M}{1+\alpha} |y-x|^{1+\alpha}$$

d'où l'on déduit

$$f(y) \leqslant f(x) - \left(\frac{f'(x)^{1+\alpha}}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

et (2.2) montre que $f(y) < 0$ ce qui est absurde.

ii) Si $f'(x) < 0$ on pose

$$y = x + \left(\frac{|f'(x)|}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

alors de la même façon que pour i) on a $y \in [-2T, 2T]$ et

$$f(y) \leqslant f(x) + (y-x) f'(x) + \frac{M}{1+\alpha} |y-x|^{1+\alpha}$$

$$= f(x) - \left(\frac{|f'(x)|}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}} |f'(x)| + \left(\frac{|f'(x)|^{1+\alpha}}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{1+\alpha}$$

et (2.2) montre que $f(y) < 0$ ce qui est absurde.

Nous aurons besoin dans la suite du lemme 2.1 sous deux formes différentes contenues dans le lemme suivant :

LEMME 2.2. – *Soit* $g \in C^{1,\alpha}([a, b])$, $\alpha \in]0,1]$, $g \geqslant 0$ *et notons*

$$M = \sup \{|g'(x) - g'(y)| |x-y|^{-\alpha} / x \neq y, x, y \in [a, b]\}$$

alors, si $g(a) = g'(a) = 0$ (resp. *si* $g(b) = g'(b) = 0$) *on a*

$$|g'(x)|^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \leqslant \frac{1+\alpha}{\alpha} g(x) (2^{1-\alpha} M)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{2.4}$$

pour tout $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ $\left(\text{resp. } x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]\right)$.

Démonstration. – i) Si $g(a) = g'(a) = 0$ on pose

$$f(x) = \begin{cases} g(a+x) & \text{si } x \in [0, b-a] \\ g(a-x) & \text{si } x \in [a-b, 0]. \end{cases}$$

Il est clair que $f \in C^{1,\alpha}([a-b, b-a])$ et que $f(0) = f'(0) = 0$. D'autre part un simple calcul montre que

$$\sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in [a-b, b-a]}} |f'(x) - f'(y)| |x-y|^{-\alpha} \leqslant 2^{1-\alpha} M$$

d'où (2.4) en appliquant le lemme 2.1.

ii) Si $g(b) = g'(b) = 0$ on pose $h(x) = g(a+b-x)$ pour $x \in [a,b]$, alors $h \in C^{1,\alpha}([a,b])$, $h(a) = h'(a) = 0$, $h'(x) = -g'(a+b-x)$ et on applique *i*).

Le lemme 2.2 va nous permettre de démontrer un résultat qui est essentiel pour notre travail et qui constitue la dernière partie du théorème suivant :

THEOREME 2.1. – *Soit* $g \in C^{1,\alpha}([0,T])$, $\alpha \in]0,1]$ et $g \geqslant 0$. *Posons*

$$h = g^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

alors :

i) *h est absolument continue.*

ii) *Il existe* $E \subset [0,T]$ *de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue* m *sur* $[0,T]$ *tel que* $h'(x)$ *existe pour tout* $x \in [0,T] \setminus E$.

iii) *Supposons en outre vérifiée l'hypothèse suivante :*

$$(\mathrm{H}) \left\{ \begin{array}{l} \textit{si } g(0) = 0 \text{ (resp. } g(T) = 0) \textit{ alors } g'(0) = 0 \\ (\text{resp. } g'(T) = 0) \end{array} \right.$$

alors h' est bornée sur $[0,T] \setminus E$.

Démonstration. – i) est un cas particulier du lemme 1 de [2] et ii) est alors bien connu (voir [5] par exemple). Montrons iii) : l'hypothèse (H) nous conduit à considérer trois cas.

Cas 1. – Si $g(0) = g'(0) = g(T) = g'(T) = 0$ nous allons montrer

$$|h'(x)| \leqslant \left(\frac{2^{1-\alpha} M}{\alpha^\alpha (1+\alpha)}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad \forall x \in [0,T] \setminus E \tag{2.5}$$

où $M = \sup \{ |g'(x) - g'(y)| \, |x-y|^{-\alpha} / x \neq y,\ x, y \in [0,T] \}$.

En effet (2.5) résulte du lemme 2.2 aux points $x \in [0,T] \setminus E$ tels que $g(x) \neq 0$. Soit alors $x \in [0,T] \setminus E$ tel que $g(x) = 0$. Nécessairement $g'(x) = 0$ en effet : si $x = 0$ ou T cela résulte de l'hypothèse (H) et si $x \in]0,T[$ cela résulte du fait que $g \geqslant 0$ sur $[0,T]$. Or pour tout $y \in [0,T]$ on a

$$g(y) = (y-x) \int_0^1 g'(x + s(y-x)) \, ds$$

et donc pour $y \neq x$ on a

$$\left|\frac{h(y)-h(x)}{y-x}\right| \leqslant |y-x|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$$

$$\left(\int_0^1 |g'(x+s(y-x))-g'(x)|\, ds\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

$$\leqslant \left(\frac{M}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

d'où (2.5).

Cas 2. – Nous allons traiter le cas $g(0)=g'(0)=0$ et $g(T)>0$ (le cas $g(T)=g'(T)=0$ et $g(0)>0$ se traitant de façon analogue). Soit $x \in [0, T[$ le dernier zéro de g alors la même démonstration que pour le cas 1 montre que l'inégalité (2.5) est vérifiée sur $\left[0, \frac{x+T}{2}\right] \setminus E$ et comme $h \in C^1\left(\left[\frac{x+T}{2}, T\right]\right)$ h' est bornée sur $\left[\frac{x+T}{2}, T\right]$ d'où le résultat.

Cas 3. – Si $g^{-1}(0) = \phi$, le résultat est trivial, car alors $h \in C^1([0,T])$. Sinon soit $x \in]0, T[$ un zéro de g et on est ramené au cas 2.

3. Application au problème de Cauchy.

Les résultats de la partie 2 vont nous permettre de démontrer le théorème suivant :

THEOREME 3.1. – *Soit* $a \in C^{1,\alpha}([0,T])$ $\alpha \in [0,1]$, $a \geqslant 0$ *alors le problème de Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u - a(t) \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0 \ \textit{dans} \ [0,T] \times \mathbf{R} \\ \\ u(0,x) = \varphi(x), \dfrac{\partial}{\partial t} u(0,x) = \psi(x) \end{array}\right. \tag{3.1}$$

admet une solution unique u *dans* $C^2([0,T], G^s(\mathbf{R}))$ *pour des données* φ *et* ψ *dans* $G^s(\mathbf{R})$ *si*

$$1 \leqslant s \leqslant \frac{3+\alpha}{2}.$$

Démonstration. — D'après [2] il nous suffit de faire la démonstration pour $s = \dfrac{3+\alpha}{2}$. Comme dans [2] on montre l'unicité du problème (3.1) ce qui permet de supposer φ et ψ dans $D^{\frac{3+\alpha}{2}}(\mathbf{R})$. D'après le théorème de Ovciannikov (3.1) admet une solution u dans $C^2([0,T], H')$ et nous devons montrer que u appartient à $C^2([0,T], D^{\frac{3+\alpha}{2}}(\mathbf{R}))$. Notons

$$v(t,\xi) = \langle u(t,x), \exp(-ix \cdot \xi) \rangle \ \xi \in \mathbf{R}$$

la transformée de Fourier de u par rapport à x : d'après le théorème de Paley-Wiener il nous suffit de prouver qu'il existe M et $\delta > 0$ tels que

$$|v(t,\xi)| \leqslant M \exp(-\delta\, |\xi|^{\frac{2}{3+\alpha}}) \tag{3.2}$$

pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ et tout $t \in [0,T]$, sachant que les transformées de Fourier $\hat{\varphi}$ et $\hat{\psi}$ des données initiales vérifient une inégalité analogue. Comme $v(t,\xi)$ est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} v(t,\xi) + a(t)\,\xi^2\, v(t,\xi) = 0 \\[2ex] v(0,\xi) = \hat{\varphi}(\xi), \dfrac{d}{dt} v(0,\xi) = \hat{\psi}(\xi) \end{cases}$$

il est clair que (3.2) résulte de la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. — *Soit* $a \in C^{1,\alpha}([0,T])$, $\alpha \in [0,1]$, $a \geqslant 0$ *alors il existe une fonction* μ : $[0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *vérifiant* $\lim \mu(s) = 0$ *quand* s *tend vers* $+\infty$ *telle que toute solution* $u(t,\xi)$ *de l'équation différentielle* $\dfrac{d^2}{dt^2} u(t,\xi) + a(t)\,\xi^2\, u(t,\xi) = 0$ *vérifie l'inégalité*

$$|u(t_1, \xi)|^2 + \left|\frac{d}{dt} u(t_1, \xi)\right|^2 \leqslant C\Big(|u(t_2, \xi)|^2 + \left|\frac{d}{dt} u(t_2, \xi)\right|^2\Big)(1 + |\xi|)^{\ell} \exp\big(\mu(|\xi|)\, |\xi|^{\frac{2}{3+\alpha}}\big) \tag{3.3}$$

pour tous t_1, t_2 *dans* $[0, T]$, *où* C *et* ℓ *sont des constantes positives indépendantes de* ξ, t_1, t_2.

Commençons par démontrer deux lemmes :

LEMME 3.1. – *Soit* $k \in C^1([c, d])$, $k \geqslant 0$ *et supposons* k *croissante* (resp. k *décroissante*) *alors toute solution* u *de l'équation différentielle* $\frac{d^2}{dt^2} u(t, \xi) + k(t)\, \xi^2 u(t, \xi) = 0$ *vérifie l'inégalité*

$$|u(t_1, \xi)|^2 + \left|\frac{d}{dt} u(t_1, \xi)\right|^2 \leqslant C(1 + |\xi|)^{\ell} \left(|u(t_2, \xi)|^2 + \left|\frac{d}{dt} u(t_2, \xi)\right|^2\right) \tag{3.4}$$

pour tous t_1, t_2 *dans* $[c, d]$, *où* C *et* ℓ *sont des constantes positives indépendantes de* ξ, t_1, t_2.

Démonstration. – On suppose k croissante (l'autre cas se traitant de façon analogue). Tout d'abord quand $|\xi| < R$ pour tout $R > 0$, l'inégalité (3.4) est évidente les coefficients étant uniformément bornés.

1) Si $k(c) > 0$, on pose $E(t, \xi) = k(t)\, \xi^2 |u|^2 + \left|\frac{d}{dt} u\right|^2$ on dérive et on applique le lemme de Gronwall pour obtenir l'inégalité

$$E(t_1, \xi) \leqslant E(t_2, \xi) \exp \left|\int_{t_1}^{t_2} \frac{k'(t)}{k(t)}\, dt\right|$$

pour tous t_1, t_2 dans $[c, d]$, d'où (3.4).

2) Si $k(c) = 0$ soit $R > 0$ tel que pour tout $|\xi| \geqslant R$ il existe $t_\xi \in]c, d[$ tel que $k(t_\xi) = \frac{1}{|\xi|^2}$ et posons $E_1(t, \xi) = |u|^2 + \left|\frac{d}{dt} u\right|^2$ alors on a $\left|\frac{d}{dt} E_1(t, \xi)\right| \leqslant E_1(t, \xi)$ pour tout $t \in [c, t_\xi]$, d'où (3.4) sur $[c, t_\xi]$. Sur $[t_\xi, d]$ on pose $E_2(t, \xi) = k(t)\, \xi^2 |u|^2 + \left|\frac{d}{dt} u\right|^2$

et on obtient $\left|\frac{d}{dt} E_2(t,\xi)\right| \leqslant \frac{k'(t)}{k(t)} E_2(t,\xi)$ pour tout $t \in [t_\xi, d]$, d'où (3.4) sur $[t_\xi, d]$.

LEMME 3.2. – *Soit* $a \in C^1([0,T])$, $a \geqslant 0$ *et telle que* $a(0) = 0$ *et* $a'(0) \neq 0$ (resp. $a(T) = 0$ et $a'(T) \neq 0$) *alors* $a'(0) > 0$ (resp $a'(T) < 0$). *De plus pour tout* $\alpha > 0$, $a^{\frac{1}{1+\alpha}}$ *n'est pas dérivable à droite en* 0 (resp *à gauche en* T).

Démonstration. – Traitons le cas $a(0) = 0$ et $a'(0) \neq 0$. On a

$$a(t) = t(a'(0) + \theta(t)) \tag{3.5}$$

où $\theta(t) = \int_0^1 (a'(st) - a'(0))\, ds$, donc θ est continue et $\theta(0) = 0$. L'hypothèse $a \geqslant 0$ entraine donc $a'(0) > 0$, et (3.5) permet alors de montrer la deuxième partie du lemme 3.2.

Démonstration de la proposition 3.1. En premier lieu on remarque que pour tout $R > 0$, quand $|\xi| < R$ l'inégalité (3.3) est évidente, les coefficients étant uniformément bornés.

Si $a(0) = 0$ et $a'(0) \neq 0$ (resp. $a(T) = 0$ et $a'(T) \neq 0$) le lemme 3.2 montre qu'il existe $\beta \in]0, T[$ tel que a soit croissante dans $[0, \beta]$ (resp. décroissante dans $[\beta, T]$) et le lemme 3.1 entraine (3.3) sur $[0, \beta]$ (resp. $[\beta, T]$).

On peut donc supposer que, pour $\alpha \in]0,1]$, a vérifie l'hypothèse (H) du théorème 2.1 appliqué à $g = a$. On introduit $a_\epsilon(t) = a(t) + \epsilon$ pour tout $t \in [0, T]$ où $\epsilon \in]0, 1[$ désigne un paramètre et on définit :

$$E_\epsilon(t,\xi) = a_\epsilon(t)\, \xi^2\, |u(t,\xi)|^2 + \left|\frac{d}{dt} u(t,\xi)\right|^2 .$$

On a facilement

$$\left|\frac{d}{dt} E_\epsilon(t,\xi)\right| \leqslant \left(\frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)} + \epsilon^{\frac{1}{2}}\, |\xi|\right) E_\epsilon(t,\xi)$$

pour tout $t \in [0, T]$. On en déduit, en utilisant le lemme de Gronwall

$$E_\epsilon(t_1, \xi) \leqslant E_\epsilon(t_2, \xi) \exp\left(\int_0^T \frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)}\, dt + T\epsilon^{\frac{1}{2}}\, |\xi|\right) \tag{3.6}$$

pour tous t_1, t_2 dans $[0, T]$.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 3.3. – *Soit* $a \in C^{1,\alpha}([0,T])$, $\alpha \in [0,1]$ *et* $a \geqslant 0$ *alors, avec les notations ci-dessus, pour tout ensemble mesurable* $A \subset [0,T]$, *on a*

$$\int_A \left|(a_\epsilon^{\frac{1}{1+\alpha}})'(t)\right| dt \leqslant \int_A \left|(a^{\frac{1}{1+\alpha}})'(t)\right| dt.$$

Démonstration. – Si $\alpha = 0$ l'inégalité est triviale, on peut donc supposer que $\alpha \in]0,1]$ et il nous suffit alors de montrer

$$\left|(a_\epsilon^{\frac{1}{1+\alpha}})'(t)\right| \leqslant \left|(a^{\frac{1}{1+\alpha}})'(t)\right| \quad \forall t \in A \setminus E \tag{3.7}$$

où E désigne l'ensemble de mesure nulle du théorème 2.1 appliqué à $g = a$. On a deux cas :

1) Si $t \in A \setminus E$ est tel que $a(t) > 0$ l'inégalité (3.7) résulte du fait que $a_\epsilon \geqslant a$.

2) Si $t \in A \setminus E$ est tel que $a(t) = 0$ alors $a'(t) = 0$ en effet : si $a'(t) \neq 0$ nécessairement $t = 0$ (ou T) car $a \geqslant 0$ et le lemme 3.2 entraîne que $t = 0$ (ou T) appartient à E ce qui est absurde. Mais alors le premier membre de (3.7) est nul et ceci achève la démonstration du lemme 3.3.

Revenons à la démonstration de la proposition 3.1. Posons pour $|\xi|$ suffisamment grand

$$F_{|\xi|} = \{t \in \text{supp } a / a(t) \geqslant |\xi|^{-\gamma}\}$$

$$G_{|\xi|} = \{t \in \text{supp } a / 0 < a(t) < |\xi|^{-\gamma}\}$$

où $\gamma \in \left]0, \frac{2}{3+\alpha}\right[$ et supp a désigne le support de a et remarquons que

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} m(G_{|\xi|}) = 0$$

(m désignant la mesure de Lebesgue sur $[0,T]$).

On peut écrire

$$\int_0^T \frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)} dt = \int_{F_{|\xi|}} \frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)} dt + \int_{G_{|\xi|}} \frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)} dt \tag{3.8}$$

et on a

$$\int_{F_{|\xi|}} \frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)}\, dt \leqslant C\, |\xi|^\gamma \tag{3.9}$$

(C désignant une constante) et

$$\frac{1}{1+\alpha} \int_{G_{|\xi|}} \frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)}\, dt \leqslant \epsilon^{-\frac{1}{1+\alpha}} \int_{G_{|\xi|}} \left|(a_\epsilon^{\frac{1}{1+\alpha}})'\,(t)\right| dt. \tag{3.10}$$

En utilisant successivement le lemme 3.3 et le théorème 2.1 appliqué à $g = a$ on déduit de (3.10)

$$\int_{G_{|\xi|}} \frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)}\, dt \leqslant C\, \epsilon^{-\frac{1}{1+\alpha}}\, m(G_{|\xi|}) \tag{3.11}$$

(C désignant une constante). Posons

$$\lambda_{|\xi|} = \max\left(m\,(G_{|\xi|}),\, \frac{1}{|\xi|}\right)$$

alors (3.8), (3.9) et (3.11) donnent

$$\int_0^T \frac{|a'_\epsilon(t)|}{a_\epsilon(t)}\, dt + T\,\epsilon^{\frac{1}{2}}\, |\xi| \leqslant C(|\xi|^\gamma + \epsilon^{-\frac{1}{1+\alpha}}\, \lambda_{|\xi|} + \epsilon^{\frac{1}{2}}\, |\xi|) \tag{3.12}$$

pour une nouvelle constante C. Choisissons

$$\epsilon = (\lambda_{|\xi|}\, |\xi|^{-1})^{\frac{2(1+\alpha)}{3+\alpha}} \tag{3.13}$$

alors, de (3.6), (3.12) et (3.13) on tire

$$E_\epsilon(t_1, \xi) \leqslant C\, E_\epsilon(t_2, \xi)\, \exp\,(\mu(|\xi|)\, |\xi|^{\frac{2}{3+\alpha}})$$

pour tous $t_1, t_2 \in [0, T]$, C désignant une constante et μ étant définie par :

$$\mu(s) = C(2\,\lambda_s^{\frac{1+\alpha}{3+\alpha}} + s^{\gamma - \frac{2}{3+\alpha}})$$

pour s suffisamment grand. Or on a pour $|\xi|$ suffisamment grand

$$|u(t, \xi)|^2 + \left|\frac{d}{dt} u(t, \xi)\right|^2 \leqslant E_\epsilon(t, \xi)$$

et

$$E_\epsilon(t, \xi) \leqslant C(1 + |\xi|)^2\, (|u(t, \xi)|^2 + \left|\frac{d}{dt} u(t, \xi)\right|^2)$$

pour tout $t \in [0, T]$ (C étant une constante) et donc la proposition 3.1 est démontrée.

Remarque. – Nous remercions le referee pour avoir noté que, par le lemme 1 de [2], si a est une fonction de classe $C^{k,\alpha}([0,T])$ $k \in \mathbf{N}^*$ et $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ vérifiant $a(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,T]$ alors $a^{\frac{1}{k+\alpha}}$ est absolument continue et si $\gamma > 0$ et

$$G_{|\xi|} = \{t \in \operatorname{supp} a \ / \ 0 < a(t) < |\xi|^{-\gamma}\}$$

on a

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \int_{G_{|\xi|}} \left| (a^{\frac{1}{k+\alpha}})'(t) \right| dt = 0. \qquad (*)$$

On peut ainsi démontrer la proposition 3.1 à partir de l'inégalité (3.10) en utilisant successivement le lemme 3.3 pour $a \in C^{k,\alpha}([0,T])$ et (*) (sans recours au théorème 2.1).

Notons alors que le théorème 3.1 est valable pour une fonction a de classe $C^{k,\alpha}([0,T])$ $k \in \mathbf{N}^*$ et $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ vérifiant $a(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,T]$ sous la condition suivante

$$1 \leqslant s \leqslant 1 + \frac{k+\alpha}{2}$$

ce qui permet d'améliorer le résultat de [2] dans le cas particulier $n = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. COLOMBINI, E. DE GIORGI, S. SPAGNOLO, Sur les équations hyperboliques avec des coefficients qui ne dépendent que du temps, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* 6 (1979), 511-559.

[2] F. COLOMBINI, E. JANNELLI, S. SPAGNOLO, Well posedness in the Gevrey classes of the Cauchy problem for a non strictly hyperbolic equation with coefficients depending on time, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* 10 (1983), 291-312.

[3] J. DIEUDONNE, Sur un théorème de Glaeser, *J. Analyse Math.,* 23 (1970), 85-88.

[4] G. GLAESER, Racine carrée d'une fonction différentiable, *Ann. Inst. Fourier,* 13-2 (1963), 203-210.

[5] F. RIESZ, B. SZ. NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle,* Gauthier – Villars, Paris.

Manuscrit reçu le 4 mars 1985.

Robert DALMASSO,
Faculté des Sciences de Tunis
Département de Mathématiques
Campus Universitaire
1060 Tunis (Tunisie).